У Ч Е Б Н И К И
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

ВШЭ
HSE

А.А.Фридман

ЛЕКЦИИ
по курсу микроэкономики
продвинутого уровня

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки «Экономика»

Издательский дом ГУ ВШЭ

Москва 2007

УДК 330.101.542(075)
ББК 65.012.1
Ф88

Подготовлено при содействии НФПК — Национального фонда подготовки кадров в рамках программы «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в вузах»

Рецензент:
декан факультета экономики Европейского университета в Санкт-Петербурге доктор физико-математических наук
С.Л. Печерский

ISBN 978-5-7598-0335-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЫСЛИТЬ В ТЕРМИНАХ МИКРОЭКОНОМИКИ

Перед Вами, читатель, книга, которую давно ожидали в российских вузах. Это, пожалуй, первый подготовленный и изданный в нашей стране полный курс лекций по микроэкономическому анализу для студентов продвинутого уровня (магистратура и аспирантура).

В предлагаемом Вам курсе лекций учтено лучшее из западных учебников по микроэкономике, в основном англоязычных, а также опыт преподавания этой науки в отечественных вузах, что и делает данную учебную книгу особенно ценной. В ней представлен чрезвычайно обширный материал, который в российских учебных изданиях еще не был объединен под одной обложкой. Здесь и выбор потребителя, и выбор производителя в условиях определенности, здесь и выбор в условиях неопределенности. При этом рассматривается как индивидуальный выбор в рамках концепции одного потребителя либо одного производителя, так и результат этого выбора в рамках единой экономической системы.

Исследование — в процессе изучения — состояний экономической системы проводится в рамках двух принципиально важных экономических концепций: концепции согласованного состояния — равновесия и концепции оптимальности, т.е. анализа того, насколько, почему и когда это состояние «хорошее». Изучаются два случая описания функционирующей экономической системы: полное — в рамках концепции общего равновесия, и «урезанное» — в рамках концепции частичного равновесия, т.е. тогда, когда рассматриваются лишь рынки отдельных товаров и услуг.

Значительная часть книги посвящена ситуациям неоптимального функционирования рыночной экономики — фиаско рынков. Подробно изучаются все три основных случая, когда рынок не выводит экономику на оптимум. Прежде всего рассматривается случай, когда в экономике присутствуют, производятся и потребляются общественные блага. При этом, в отличие от большинства книг, изучаются различные способы борьбы с неоптимальностью.

Еще один случай, когда рынок не гарантирует оптимальности возникающей на нем ситуации, — наличие внешних эффектов, экстерналий.

И последний, чрезвычайно важный раздел, которому пока еще мало уделяется внимания в отечественной системе экономического образования, — это экономика информации, изучаемая в рамках концепции асимметричной информации.

Все разделы учебного пособия построены по принципу углубления знаний, полученных в промежуточном курсе микроэкономики. Изложение отличается той строгостью, которая необходима для построения теоретических моделей. Обогащается и усложняется инструментарий анализа. Усвоив представленный в этой книге материал, Вы, читатель, окажетесь подготовленным к восприятию современных научных работ, к проведению самостоятельных научных исследований, анализу сложных экономических проблем. Теперь они станут Вам вполне по плечу, Вы научитесь, мы надеемся, мыслить в терминах микроэкономики.

Именно поэтому мы рекомендуем Вам эти лекции для изучения.

Академик РАН В.Л. Макаров, профессор М.И. Левин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий курс лекций, предназначенный для студентов магистратуры и аспирантов экономических факультетов, построен на основе нескольких вариативных курсов, читающихся в Государственном университете — Высшей школе экономики (ГУ ВШЭ) для различных специальностей экономического факультета.

Предполагается, что студенты, приступающие к изучению данного курса, владеют основами микроэкономического анализа в пределах программы бакалавриата, основными понятиями теории игр, а также необходимыми математическими знаниями (математический анализ, теория нелинейной оптимизации и теория вероятностей).

При написании курса активно использовались наиболее распространенные западные учебники по микроэкономике продвинутого уровня (Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. Oxford University Press, 1995; Varian H.R. Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton & Company, 1992; Kreps D.M. A Course in Microeconomic Theory. Princeton University Press, 1990), а также учебное пособие, созданное коллективом авторов из Новосибирского государственного университета (Бусыгин В., Желободько Е., Цыплаков А. Лекции по микроэкономической теории. Новосибирск: НГУ, 1998). Представленный курс лекций отражает опыт преподавания микроэкономики в ГУ ВШЭ и Российской экономической школе (РЭШ).

Варианты построения курса

Следует отметить, что данное пособие задумывалось как единый курс лекций для студентов различных специальностей экономических факультетов, однако практика преподавания показала, что зачастую различные специализации обучают по разным программам: может варьироваться как продолжительность курса, так и набор тем, включаемых в него. В итоге было принято решение подготовить и опубликовать полный курс лекций, который в таком объеме может читаться студентам, специализирующимся на экономической теории, в продолжение двух семестров, и дать необходимые рекомендации по построению специализированных курсов.

Предлагаемые лекции делятся на следующие блоки (разделы):

- индивидуальный выбор в условиях определенности (I и II разд.);
- индивидуальный выбор в условиях неопределенности (III разд.);
- общее равновесие (IV разд.);
- фиаско рынка — общественные блага, экстерналии и асимметричная информация (V—VII разд.),

которые могут рассматриваться как отдельные курсы. При формировании специализированных программ очень важно учитывать связи, существующие между этими блоками. Так, изучение выбора в условиях определенности необходимо для последующего изучения общего равновесия. Изучению равновесия в модели с контингентными благами и анализу моделей с асимметричной информацией должна предшествовать теория выбора в условиях неопределенности. Фиаско рынка при наличии экстерналий может изучаться как до экономики с общественными благами (тогда общественные блага можно изучить значительно быстрее, поскольку эта ситуация представляет собой частный случай экстерналий), так и после изучения общественных благ.

Приведем пример формирования программы специализированного курса по микроэкономике из представленных в книге блоков. Обратимся к специализации «Финансы». Если на данной специализации продвинутый курс микроэкономики односеместровый, то имеет смысл остановиться непосредственно на том инструментарии, который особенно необходим в теории финансов. В этом случае предлагается взять следующие темы: выбор в условиях неопределенности; общее равновесие (основные концепции, теоремы благосостояния и далее подробно общее равновесие с контингентными благами, модель Раднера); фиаско рынка — асимметричная информация.

Дополнительные материалы

Студентам, аспирантам и преподавателям, использующим эти лекции, будет весьма полезно учебно-методическое пособие «Сборник задач по курсу микроэкономики продвинутого уровня» (М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007), в котором по каждой теме даны основные понятия и результаты, а также большое количество задач с примерами решений и варианты проверочных работ. Это пособие подготовлено коллективом авторов, работающих на кафедре микроэкономического анализа ГУ ВШЭ: В.П. Бусыгиным, Е.В. Покатович и А.А. Фридман. В нем представлены все разделы, включенные в данный курс лекций.

Дело в том, что для успешного освоения предлагаемого курса лекций необходимо иметь или приобрести определенную математическую культуру, поскольку слушатель должен не только понимать суть приведенных в тексте доказательств, но и научиться самостоятельно строить доказательства (аналогичные по уровню сложности) утверждений. Для этого крайне важно иметь соответствующий банк заданий с упражнениями, которые способствовали бы выработке навыков самостоятельного анализа.

В ряде случаев в упражнения, представленные в рекомендуемом задачнике, включены важные теоретические результаты, которые не вошли в текст лекций в силу временнóй ограниченности стандартного лекционного курса, который обычно не превышает двух семестров.

Благодарности

Идея написания пособия по курсу микроэкономики продвинутого уровня возникла у автора в 2001 г., вместе с приглашением на работу на кафедру микроэкономического анализа в ГУ ВШЭ. Таким образом, в течение четырех лет формировался новый курс лекций, который и лег в основу данной книги. Значительный вклад в создание этого курса внесли студенты ГУ ВШЭ, учившиеся в магистратуре в 2001—2004 гг., и ассистенты Евгения Александровна Левина и Елена Викторовна Покатович, поскольку именно задаваемые ими вопросы позволили выявить и более подробно осветить наиболее трудные для понимания места.

Огромная благодарность Елене Викторовне Покатович также за компьютерный набор текста, формул и рисунков.

Автор благодарен Национальному фонду подготовки кадров (НФПК) за финансовую поддержку данного проекта. Отдельная благодарность анонимным рецензентам НФПК за замечания по первоначальному варианту рукописи.

Рукопись претерпела существенные изменения в процессе ее обсуждения с Владимиром Петровичем Бусыгиным, чьи замечания и рекомендации были необыкновенно полезны.

Автор глубоко признателен РЭШ, где начинал свою карьеру. Уникальный опыт работы в РЭШ, общение с профессорами из ведущих отечественных и зарубежных университетов существенно повлияли на представления автора о построении магистерских курсов, организации самостоятельной работы и контроля знаний учащихся. Все это нашло свое отражение в данном курсе лекций.

I

ВЫБОР ПОТРЕБИТЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Лекция 1

Предпочтения и полезность

В теории потребителя мы будем изучать стандартную модель поведения потребителя, в которой предполагается, что потребитель выбирает наилучший набор из всех доступных ему наборов. Для формализации модели необходимо описать множество, на котором потребитель делает выбор, и его предпочтения. Начнем анализ с описания предпочтений.

Пусть потребитель сталкивается с разнообразными потребительскими наборами, представленными потребительским множеством X. Если в экономике имеется N товаров, то, если не сказано иначе, будем считать, что эти товары могут потребляться лишь в неотрицательном количестве и нет более никаких ограничений на потребительские наборы. Тогда множество X представлено N-мерным неотрицательным ортантом $X = R_{+}^{N}$.

Будем считать, что потребитель имеет определенные предпочтения на множестве потребительских наборов X. Если для потребителя набор x не хуже, чем набор y, то будем говорить, что данный потребитель *нестрого* предпочитает набор x набору y и записывать $x \succsim y$. На основе нестрого отношения предпочтения можно определить два других отношения: *строгое* предпочтение и отношение *безразличия*.

Определение

Будем говорить, что набор x строго предпочитается набору y и записывать это как $x \succ y$, если набор x нестрого предпочтительнее набора $y\,(x \succsim y)$, а обратное $(y \succsim x)$ неверно.

Будем говорить, что наборы x и y безразличны для потребителя и записывать $x \sim y$, если набор x нестрого предпочтительнее набора $y\,(x \succsim y)$ и наоборот $y \succsim x$. □

Предпочтения потребителя призваны упорядочить наборы товаров из потребительского множества, поэтому они должны удовлетворять ряду разумных свойств, а именно будем предполагать, что отношение предпочтения полное и транзитивное.

Определение

Аксиома полноты: для любых двух наборов x и y из потребительского множества $X\,(x, y \in X)$ должно выполняться следующее: либо $x \succsim y$, либо $y \succsim x$.

Аксиома транзитивности: для любых трех наборов x, y и z из потребительского множества $X\,(x,\ y,\ z \in X)$, если $x \succsim y$ и $y \succsim z$, то $x \succsim z$. □

Свойство полноты позволяет сравнивать любые наборы из потребительского множества, а свойство транзитивности делает предпочтения согласованными.

Отношение предпочтения, удовлетворяющее аксиомам полноты и транзитивности, в дальнейшем будем называть *рациональным*.

В теории потребителя удобнее работать не с предпочтениями, а с *функцией полезности*, представляющей предпочтения потребителя.

Определение

Функцией полезности, представляющей предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, называют функцию $u : X \to R$ такую, что для любых наборов x и y из X соотношение $x \succsim y$ имеет место тогда и только тогда, когда $u(x) \geq u(y)$. □

Всегда ли отношение предпочтения можно описать с помощью некоторой функции полезности? Как видно из следующего утверждения (1.1), такое представление возможно лишь в том случае, если предпочтения удовлетворяют аксиомам полноты и транзитивности, т.е. являются рациональными.

Утверждение 1.1. Необходимое условие существования функции полезности.

Если предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, представимы с помощью функции полезности $u(\cdot)$, то эти предпочтения являются рациональными.

Доказательство

1. Покажем, что предпочтения $\succsim$ удовлетворяют аксиоме полноты. По определению $u(\cdot)$ областью значений функции полезности является множество действительных чисел. Любые два действительных числа $u(x)$ и $u(y)$ сравнимы: либо $u(x) \geq u(y)$, либо $u(x) \leq u(y)$. Если $u(x) \geq u(y)$, то $x \succsim y$ и, если $u(x) \leq u(y)$, то $y \succsim x$. Таким образом, сравнимы и любые два набора x и y из X и, следовательно, отношение предпочтения удовлетворяет аксиоме полноты.

2. Покажем, что предпочтения транзитивны. Возьмем три любых набора x, y и z из X такие, что $x \succsim y$ и $y \succsim z$. Покажем, что $x \succsim z$. По определению функции полезности имеем $x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ и аналогично $y \succsim z \Leftrightarrow u(y) \geq u(z)$. Поскольку $u(x) \geq u(y)$ и $u(y) \geq u(z)$, то $u(x) \geq u(z)$, что эквивалентно тому, что $y \succsim z$. ■

Является ли условие рациональности предпочтений достаточным для представления их с помощью некой функции полезности? Если бы множество X было конечным (не более чем счетным), то ответ был бы положительным, поскольку элементы этого множества можно было бы упорядочить и присвоить им номера — значения функции полезности. В общем случае рациональности предпочтения недостаточно для существования функции полезности, что можно продемонстрировать на примере лексикографических предпочтений.

Пример 1.1. Лексикографические предпочтения и функция полезности.

Согласно лексикографическим предпочтениям все потребительские наборы упорядочиваются так же как слова в словаре: сначала по первой координате, при совпадении первой координаты — по второй и т.д. Рассмотрим для простоты экономику с двумя товарами: $X = R^2_+$. Определим на этом потребительском множестве лексикографические предпочтения следующим образом:

$$x \succsim y, \text{ если } x_1 > y_1 \text{ или } x_1 = y_1 \text{ и } x_2 \geq y_2.$$

Эти предпочтения удовлетворяют аксиомам полноты и транзитивности, но не могут быть представлены с помощью функции полезности.

Заметим, что при лексикографических предпочтениях никакие два разных набора товаров не могут быть эквивалентны, поскольку различие хотя бы одной из координат векторов, представляющих данные наборы, влечет строгое предпочтение набора с большей координатой. Таким образом, каждый набор товаров (каждая точка из $X = R^2_+$) должна получить свое (уникальное) значение полезности, т.е. нам нужно занумеровать с помощью действительных чисел все точки неотрицательного ортанта, сохраняя при этом их упорядочивание. Покажем, что осуществить подобное отображение невозможно.

Действительно, предположим, что нам удалось построить функцию полезности для лексикографических предпочтений. Рассмотрим два набора, которые отличаются лишь количеством второго блага: $(a,\ 0)$ и $(a,\ 1)$. Если функция полезности для данных предпочтений существует, то $u(a,\ 0) < u(a,\ 1)$, причем $u(a,\ 0)$ и $u(a,\ 1)$ — действительные числа. Тогда найдется рациональное число $r(a)$, лежащее между $u(a,\ 0)$ и $u(a,\ 1)$, т.е. $u(a,\ 0) < r(a) < u(a,\ 1)$. (Если между $u(a,\ 0)$ и $u(a,\ 1)$ лежат несколько рациональных чисел, то в качестве $r(a)$ возьмем наименьшее из них.) Заметим, что, построенная функция $r(a)$ возрастает по a. Действительно, если $\underline{a} < \overline{a}$, то $r(\underline{a}) < u(\underline{a},\ 1) < u(\overline{a},\ 0) < r(\overline{a})$. Таким образом, функция $r(a)$ дает взаимооднозначное отображение множества неотрицательных действительных чисел, которое несчетно, во множество рациональных чисел, являющееся счетным, что математически невозможно. Таким образом, мы показали, что не существует функции полезности, представляющей лексикографические предпочтения.

Попытаемся на интуитивном уровне понять, в чем же состоит особенность лексикографических предпочтений, не позволяющая представить их с помощью функции полезности. Заметим, что нам не удалось найти эквивалентные друг другу потребительские наборы в силу наличия «скачков в предпочтениях». Возможно, исключение подобного скачкообразного поведения, т.е. введение дополнительного предположения о *непрерывности предпочтений*, поможет нам решить эту проблему.

Определение

Отношение предпочтения $\succsim$, определенное на множестве X, *непрерывно*, если для любого элемента $x \in X$

множество наборов не хуже чем $x: \{y \in X : y \succsim x\}$

и

множество наборов не лучше чем $x: \{y \in X : y \precsim x\}$

являются замкнутыми множествами. □

Легко проверить, что лексикографические предпочтения не удовлетворяют приведенному выше определению непрерывности, поскольку множество наборов, которые не хуже чем данный набор x^*, не является замкнутым (см. рис. 1.1).

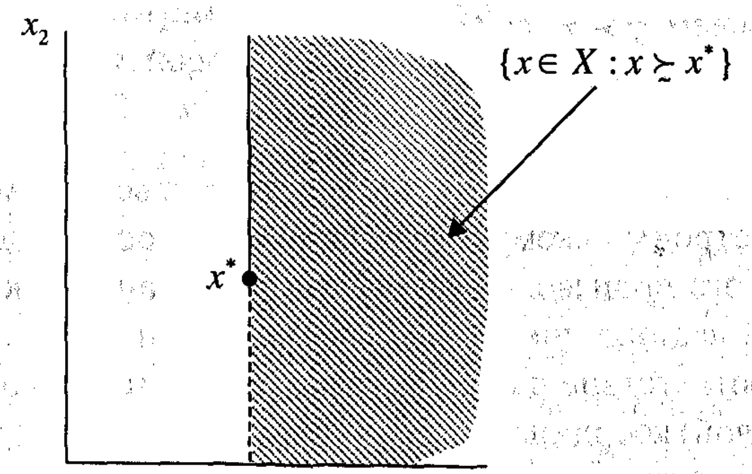


Рис. 1.1. Нарушение аксиомы непрерывности для лексикографических предпочтений

Если дополнить аксиомы полноты и транзитивности предпочтений аксиомой непрерывности, то, как следует из нижеприведенного утверждения, этого набора предположений будет достаточно для существования функции полезности, представляющей эти предпочтения.

Утверждение 1.2. Существование функции полезности.

Пусть предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, рациональны и удовлетворяют аксиоме непрерывности. Тогда существует непрерывная функция полезности $u(x)$, представляющая эти предпочтения.

Докажем существование функции полезности для случая строго монотонных предпочтений, считая, как договорились ранее, что $X = R_+^N$. Однако прежде чем приступить к доказательству, нам необходимо определить, какие предпочтения мы будем называть строго монотонными.

Определение

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *строго монотонными*, если для любых двух наборов x и y из X таких, что $y \geq x$ и $y \neq x$, имеем $y \succ x$.

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *слабо монотонными*, если для любых двух наборов x и y из X таких, что $y \geq x$, имеем $y \succsim x$. □

Доказательство

Поясним графически идею доказательства (см. рис. 1.2).

Построим искомую функцию полезности следующим образом. Для любого произвольного набора x мы найдем эквивалентный ему набор на «единичном луче», обозначенном на рис.1.2 как te. Поставим в соответствие набору x число, соответствующее любой (например, первой) координате этого эквивалентного набора. Напомним, что поскольку эквивалент ищем на единичном луче, то все координаты у этого набора совпадают. Нам нужно показать, что:

1) такой эквивалент существует для любого набора из потребительского множества;

2) этот эквивалент на единичном луче единствен;

3) построенная функция действительно представляет исходные предпочтения.

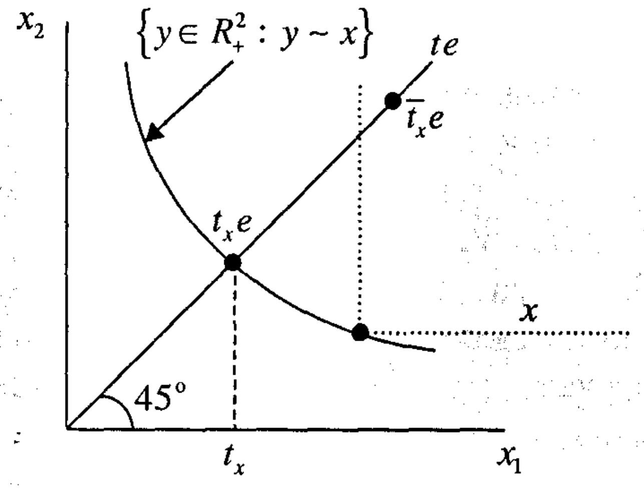


Рис. 1.2. Иллюстрация построения функции полезности

Перейдем к реализации намеченной нами схемы доказательства.

1. Через e обозначим N-мерный единичный вектор: $e = (1, 1, \ldots, 1)$. Рассмотрим произвольный набор $x \in X$. Поставим ему в соответствие число t_x такое, что $x \sim t_x e$. Покажем, что такое число, а следовательно, такой эквивалент набора x на луче te существует. Для этого рассмотрим два множества:

множество чисел t, порождающих наборы на луче te, которые не лучше чем $x: W = \{t \in R_+ : x \succsim te\}$;

множество чисел t, порождающих наборы на луче te, которые не хуже чем $x: B = \{t \in R_+ : te \succsim x\}$.

Заметим, что множество W непусто, поскольку содержит ноль. Действительно, поскольку $x \in R_+^N$, то $x \geq 0$, откуда в силу строгой монотонности получаем $x \succsim 0$. Множество B также непусто, поскольку всегда можно рассмотреть лежащий на единичном луче набор $\bar{t}_x e >> x$, все координаты которого больше, чем координаты x (см. рис.1.2). Тогда в силу строгой монотонности $\bar{t}_x e \succ x$.

Множества W и B замкнуты в силу непрерывности предпочтений. Продемонстрируем замкнутость множества W (для множества B рассуждения аналогичны). Непрерывность предпочтений влечет замкнутость множества $\tilde{W}=\{y\in X: y\precsim x\}$. Заметим, что множество W является пересечением множества $\tilde{W}$ с лучом te и, следовательно, замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств.

Покажем, что объединение множеств W и B совпадает с множеством неотрицательных действительных чисел: $B\cup W=R_+$. Включение $B\cup W\subset R_+$ очевидно в силу определения множеств W и B. Покажем, что имеет место и обратное включение. В силу полноты предпочтений либо $te\succsim x$, и тогда $t\in B$, либо $x\succsim te$ и, значит, $t\in W$. Таким образом, $R_+\subset B\cup W$.

Итак, B и W — непустые, замкнутые множества, а их объединение дает R_+ — связное множество, следовательно, пересечение B и W непусто. Это означает, что для любого $x\in R_+^N$ существует t_x такое, что $t_xe\sim x$, поскольку $t_x\in B$ и $t_x\in W$.

2. Покажем, что для любого $x\in R_+^N$ такое значение t_x $(t_xe\sim x)$ единственно. Предположим, что это не так и существуют $t_x^1\neq t_x^2$ такие, что $t_x^1e\sim x$ и $t_x^2e\sim x$. Предположим для определенности, что $t_x^1>t_x^2$. Тогда $t_x^1e>>t_x^2e$, откуда в силу строгой монотонности имеем $t_x^1e\succ t_x^2e$ и с учетом транзитивности предпочтений приходим к противоречию $x\sim t_x^1e\succ t_x^2e$.

3. Итак, возьмем t_x в качестве значения функции полезности для набора $x: u(x)=t_x$. Осталось убедиться, что полученная функция действительно отражает исходные предпочтения. Это следует из построения функции. Пусть $t_x\geq t_y$, тогда $t_xe\geq t_ye$, откуда в силу строгой монотонности имеем $t_xe\geq t_ye$. По построению $t_xe\sim x$ и $t_xe\sim y$, откуда с учетом транзитивности предпочтений получаем $x\succsim y$. Обратно: пусть $x\succsim y$ и по построению $t_xe\sim x$ и $t_xe\sim y$, откуда имеем $t_xe\succsim t_ye$. Мы хотим показать, что $t_x\geq t_y$. Предположим, что это не так, т.е. $t_x<t_y$. Тогда в силу строгой монотонности $t_ye\succ t_ee$, что противоречит условию $t_xe\succsim t_ye$. ■

Итак, мы доказали существование функции полезности, представляющей рациональные непрерывные предпочтения. Можно показать (здесь мы это делать не будем), что данная функция непрерывна. Отметим, что в утверждении говорится лишь о том, что среди всех функций полезности, представляющих данные предпочтения, есть непрерывная функция. Это вовсе не означает, что все функции полезности, представляющие данные предпочтения, должны быть непрерывны. Согласно определению функции полезности эта функция не является единственной. Любое положительное монотонное преобразование $v(x) = f\left(u(x)\right)$, где $f(\cdot)$ — строго возрастающая функция, также представляет исходные предпочтения. При этом $f(\cdot)$, а следовательно, и функция $f\left(u(\cdot)\right)$, не обязана быть непрерывной функцией, даже если $u(\cdot)$ непрерывна.

При анализе поведения потребителя будут использоваться некоторые дополнительные свойства предпочтений (помимо тех, что гарантируют существование функции полезности). Рассмотрим эти свойства.

В упрощенном доказательстве утверждения о существовании функции полезности мы опирались на свойство строгой монотонности. В дальнейшем анализе мы будем использовать более слабое свойство, отражающее «востребованность» товаров потребителем, называемое *локальной ненасыщаемостью*.

Определение

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *локально ненасыщаемыми*, если для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует

$y \in X$ такой, что $|x - y| \le \varepsilon$ и $y \succ x$, где $|x-y| = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$. □

Другими словами, в любой окрестности каждого потребительского набора x найдется лучший, чем x, потребительский набор. Заметим, что лучший набор (y) может содержать и меньшее количество всех товаров, как показано на рис. 1.3.

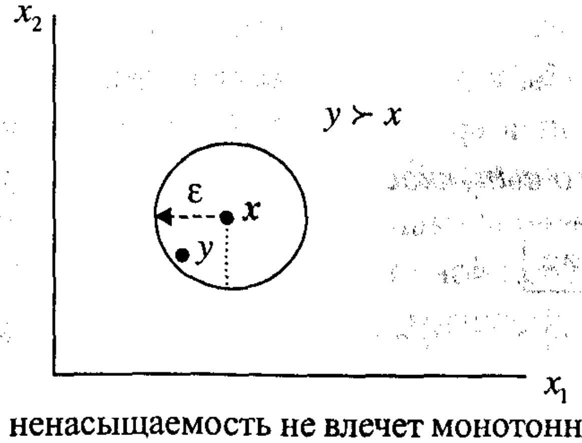


Рис. 1.3. Локальная ненасыщаемость не влечет монотонность предпочтений

Заметим, что в случае, когда $X = R_+^N$, локальная ненасыщаемость исключает ситуацию, когда все товары являются антиблагами, поскольку тогда набор $x = 0$ был бы точкой насыщения предпочтений.

Пример 1.2. Предпочтения, не удовлетворяющие свойству локальной ненасыщаемости.

Приведем пример предпочтений, не удовлетворяющих свойству локальной ненасыщаемости при условии, что товары не являются антиблагами. Подобная ситуация изображена на рис. 1.4, где кривая безразличия представлена целой полосой (все наборы, лежащие в заштрихованной области, эквивалентны для потребителя). Тогда мы можем взять окрестность, целиком лежащую в этой области, и в этой окрестности все наборы будут эквивалентны, т.е. не найдется ни одного набора, который был бы строго предпочтительнее данного набора x.

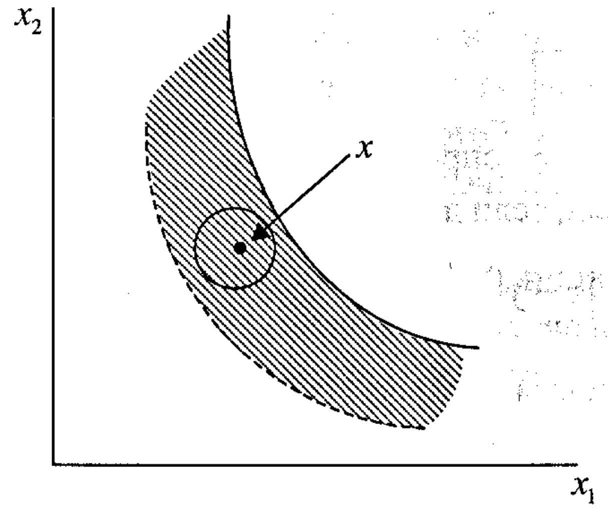


Рис. 1.4. Нарушение локальной ненасыщаемости предпочтений

Для того чтобы в дальнейшем гарантировать «хорошие» свойства решения задачи потребителя, мы будем предполагать *выпуклость* (или даже *строгую выпуклость*) предпочтений.

Определение

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *выпуклыми*, если для любых $x, y, z \in X$ таких, что $y \succsim x$ и $z \succsim x$, имеем $\alpha y + (1-\alpha)z \succsim x$ при любом $0 \le \alpha \le 1$.

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *строго выпуклыми*, если для любых x, y, $z \in X$ таких, что $y \succsim x$, $z \succsim x$ и $y \neq z$, имеем $\alpha y + (1-\alpha)z \succ x$ при любом $0 < \alpha < 1$. □

Согласно вышеприведенным определениям предпочтения являются выпуклыми (строго выпуклыми), если для любого потребительского набора x из X множество всех наборов, которые не хуже, чем данный, выпукло (строго выпукло). Рисунок 1.5 иллюстрирует строгую выпуклость предпочтений.

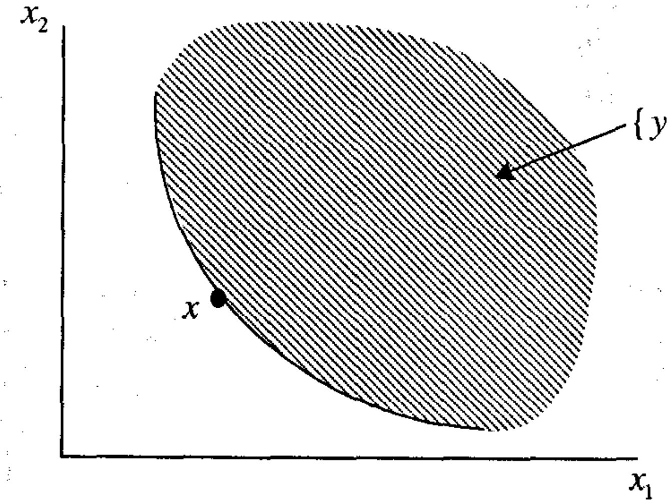


Рис. 1.5. Множество $\{y \in X : y \succsim x\}$
в случае строго выпуклых предпочтений

Выпуклость предпочтений означает квазивогнутость функции полезности $u(\cdot)$ (строгая выпуклость предпочтений — строгую квазивогнутость $u(\cdot)$). Это напрямую следует из определения квазивогнутой функции и определения функции полезности. Напомним, что функция $u(\cdot)$, определенная на множестве X, называется квазивогнутой, если для любого $\bar{u}$ множество $\{y \in X : u(y) \geq \bar{u}\}$ выпукло. Возможно, ранее (например, в курсе промежуточного уровня) вы имели дело с вогнутыми функциями полезности. Заметим, что любая вогнутая функция является и квазивогнутой, однако обратное неверно. Так, например, любая возрастающая функция одной переменной является квазивогнутой, но вовсе не обязана быть вогнутой. Заметим, что не для всех выпуклых предпочтений существует вогнутая функция полезности, представляющая эти предпочтения.

Лекция 2

Задача максимизации полезности

Мы предполагаем, что потребитель стремится выбрать из множества доступных ему потребительских наборов такой набор (наборы), который с его точки зрения является наилучшим.

Будем предполагать, что предпочтения потребителей рациональны и непрерывны, что позволяет представить их с помощью непрерывной функции полезности $u(x)$. Будем предполагать, что потребительское множество — это совокупность всевозможных наборов, в которых каждое благо представлено в неотрицательном количестве, т.е. $X = R_+^N$. Однако в действительности потребителю бывает доступно не все множество X, а лишь некое его подмножество, называемое бюджетным множеством. Пусть приобретение товаров и услуг связано с оплатой каждой единицы товара и цена единицы товара фиксирована. Обозначим вектор цен через $p=(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_N)$. Покупки потребителя при данном векторе цен ограничены имеющимся у него доходом, который будем обозначать через I. При отсутствии каких-либо иных ограничений на выбор потребительского набора бюджетное множество потребителя можно записать как

$$B=\{x\in X : px\le I\}.$$

Задача потребителя, которая заключается в выборе наиболее предпочтительного набора при данных ценах $p>>0$ (будем считать цены всех благ положительными) и уровне дохода $I>0$ может быть записана следующим образом:

$$\max_{x\ge 0}\ u(x)$$
$$px\le I.$$

Заметим, что при принятых допущениях бюджетное множество $B=\{x\in R_+^N : px\le I\}$ непусто $(0\in B)$ и ограниченно, поскольку $0\le x_i\le \dfrac{I}{p_i}$. Таким образом, решение задачи потребителя существует, поскольку бюджетное множество является непустым компактом, а $u(\cdot)$ — непрерывная функция, следовательно, всегда достигает максимума на компактном множестве.

Решая задачу максимизации полезности на бюджетном множестве, мы получаем, что каждой паре $(p,\ I)$ соответствует множество наилучших при данных ценах и доходе потребительских наборов $x(p,\ I)$, которое мы будем называть *вальрасовским* или *маршалловским спросом,* либо просто *спросом*. Заметим, что в общем случае $x(p,\ I)$ не является однозначным соответствием. Если же каждой паре $(p,\ I)$ соответствует единственный наилучший потребительский набор, то $x(p,\ I)$ называют *функцией маршалловского спроса*.

Утверждение 2.1. Свойства маршалловского спроса $x(p, I)$.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p \gg 0$, тогда $x(p,\ I)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность нулевой степени относительно цен и дохода: $x(\lambda p,\ \lambda I) = x(p,\ I)$ для любого $\lambda > 0$;

2) если предпочтения локально ненасыщаемые, то маршалловский спрос удовлетворяет бюджетному ограничению в форме равенства: для любого $x \in x(p,\ I)$ имеем $px = I$;

3) если предпочтения выпуклы, то $x(p,\ I)$ — выпуклое множество;

4) если предпочтения строго выпуклы (следовательно, $u(\cdot)$ строго квазивогнутая), то для каждой пары $(p,\ I)$ множество $x(p,\ I)$ состоит из одного элемента, т.е. $x(p,\ I)$ является функцией спроса и, кроме того, $x(p,\ I)$ — непрерывная функция.

Доказательство

1. При изменении всех цен и дохода в одинаковой пропорции мы умножаем левую и правую части бюджетного ограничения на одно и то же положительное число, что сохраняет неравенство $\lambda px \le \lambda I$; при этом ни множество X, ни функция полезности не изменяются. Это означает, что бюджетное множество остается прежним, что при неизменной целевой функции влечет и прежний набор решений.

2. Покажем, что локальная ненасыщаемость влечет выполнение бюджетного ограничения в виде равенства. Предположим, что это не так и $px < I$ для некоторого набора $x \in x(p,\ I)$. Это означает, что набор x лежит внутри бюджетного множества и, значит, существует некоторая окрестность точки x, которая также целиком лежит внутри бюджетного множества, как показано на рис. 2.1. Согласно локальной ненасыщаемости предпочтений в этой окрестности должен существовать набор y, который строго предпочтительнее x: $y \succ x$, а это противоречит тому, что x является наилучшим набором из данного бюджетного множества.

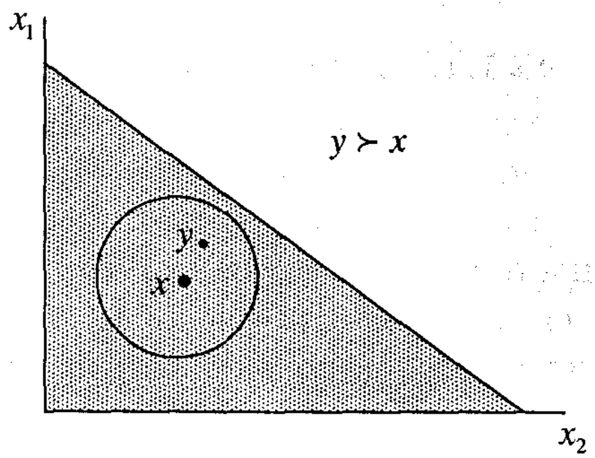


Рис. 2.1. Выполнение бюджетного ограничения как равенства при локальной ненасыщаемости предпочтений

3. Возьмем два набора, являющихся решениями задачи потребителя: $(x,\ x') \in x(p,\ I)$. Эти наборы должны приносить одинаковую полезность $u(x) = u(x') = u^*$.

Рассмотрим $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$, где $\alpha \in [0,1]$. Заметим, что x'' принадлежит бюджетному множеству, поскольку

$$px'' = \alpha px + (1-\alpha)px' \le \alpha I + (1-\alpha)I = I.$$

В силу выпуклости предпочтений имеем $\alpha x + (1-\alpha)x' \succsim x$, откуда $u(x'') \ge u^*$. Это означает, что x'' доступен потребителю при ценах p и доходе I и дает полезность, не меньшую, чем наилучшие при данных параметрах наборы, т.е. x'' также является решением задачи: $x'' \in x(p,\ I)$. Это означает, что $x(p,\ I)$ — выпуклое множество.

4. Предположим, что задача максимизации полезности при ценах p и доходе I имеет два разных решения: $x \neq x'$ и $(x, x') \in x(p, I)$. В силу того что данные наборы являются решениями задачи потребителя, они должны приносить одинаковую полезность: $u(x) = u(x') = u^*$. Рассмотрим $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$, где $\alpha \in (0, 1)$. По аналогии с предыдущим пунктом можно показать, что x'' принадлежит бюджетному множеству. В силу строгой выпуклости предпочтений $\alpha x + (1-\alpha)x' \succ x$, откуда имеем $u(x'') > u^*$, что противоречит тому, что x и x' — решения задачи потребителя при данных ценах и доходе. Таким образом, при строго выпуклых предпочтениях решение задачи потребителя при каждом наборе экзогенных параметров единственно, т.е. мы имеем дело с функцией спроса. Непрерывность функций спроса следует из теоремы о максимуме[1]. ■

Если функция полезности дифференцируема, то при выполнении условия регулярности мы можем охарактеризовать решение задачи потребителя с помощью условий Куна — Таккера. Заметим, что в силу положительности дохода задача максимизации полезности удовлетворяет условию регулярности Слейтера, поскольку $px < I$ при $x = 0$. Согласно теореме Куна — Таккера, если x^* — решение задачи потребителя при (p, I), то существует множитель Лагранжа $\lambda \geq 0$ такой, что для любого товара $i = 1, 2, \ldots, N$

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} \leq \lambda p_i;$$

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} = \lambda p_i, \text{ если } x_i^* > 0.$$

Соответственно внутреннее решение (решение, где потребление каждого товара положительно) характеризуется равенством предель-

---

[1] Формулировка теоремы о максимуме такова. Пусть $x(\alpha)$ — множество решений задачи условной оптимизации: $\max\limits_{x \in G(\alpha)} f(x, \alpha)$ и $V(\alpha) = f(x^*, \alpha)$, где $x^* \in x(\alpha)$. Если $G(\alpha)$ — непрерывное отображение и $f(x, \alpha)$ — непрерывная функция, то отображение $x(\alpha)$ полунепрерывно сверху, а функция $V(\alpha)$ непрерывна. Более того, если $x(\alpha)$ — функциональное отображение, то $x(\alpha)$ — непрерывная функция.

ной нормы замещения между двумя благами и их относительными ценами:

$$MRS_{ij}(x^*) = \frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{\partial u(x^*)/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

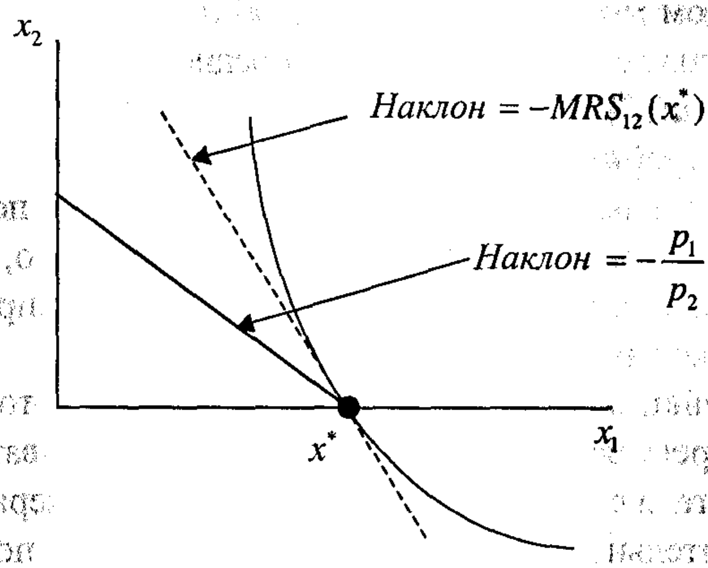


Рис. 2.2. Угловое решение задачи потребителя, характеризующееся превышением предельной нормы замещения над соотношением цен

Однако для углового решения (решения, где какой-то из товаров не потребляется) не требуется равенства предельной нормы замещения и соотношения цен. Так, например, если $x_i^* = 0$, а $x_j^* > 0$, то $MRS_{ij}(x^*) = \frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{\partial u(x^*)/\partial x_j} \le \frac{p_i}{p_j}$. Такая ситуация для случая двух товаров изображена на рис. 2.2, где потребитель приобретает только первый товар $(i = 2,\ j = 1)$. Как видно из рисунка, потребитель хотел бы сократить потребление второго товара еще больше и увеличить за счет этого потребление первого товара, но, поскольку отрицательное потребление не допускается, то ему приходится остановиться в точке x^*. Заметим, что, если функция полезности квазивогнута, то выписанные выше условия первого порядка являются необходимыми и достаточными[2].

Из задачи потребителя, помимо характеристики спроса, мы получаем зависимость полезности от экзогенных параметров, таких, как цены и доход, если подставим найденный спрос в целевую функцию. Полученную функцию называют *косвенной функцией полезности*. В дальнейшем будем обозначать эту функцию через $v(p, I) = u(x^*)$, где $x^* \in x(p, I)$.

Утверждение 2.2. Свойства косвенной функции полезности $v(p, I)$.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p \gg 0$. Тогда $v(p, I)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность нулевой степени относительно $(p, I): v(\lambda p, \lambda I) = v(p, I)$ для всех $\lambda > 0$;

2) не убывает по доходу; строго возрастает по доходу, если предпочтения локально ненасыщаемы;

3) не возрастает по ценам;

4) квазивыпукла по (p, I), т.е. множество $\{(p, I): v(p, I) \leq \bar{v}\}$ выпукло при любом $\bar{v}$;

5) непрерывна при $p \gg 0$ и $I > 0$;

6) если предпочтения локально ненасыщаемые и строго выпуклые ($u(\cdot)$ строго квазивогнута) и функция $v(p, I)$ дифференцируема при $(\tilde{p}, \tilde{I}) \gg 0$, то выполняется *тождество Роя* $x_i(\tilde{p}, \tilde{I}) = -\dfrac{\partial v(\tilde{p}, \tilde{I})/\partial p_i}{\partial v(\tilde{p}, \tilde{I})/\partial I}$.

[2] Рассмотрим задачу $\max_{x \in G} f(x)$, где $G = \{x \in R_N^+ : g(x) \leq 0\}$. Пусть функции $g(\cdot)$ квазивыпуклы, а целевая функция удовлетворяет условию $\sum_i f_i'(x)(\tilde{x}_i - x_i) > 0$ для всех x и $\tilde{x}$ таких, что $f(\tilde{x}) > f(x)$. Тогда, если x^* удовлетворяет необходимым условиям Куна — Такера и выполнено условие регулярности, то x^* является точкой глобального максимума. Указанное условие для целевой функции выполнено, если функция $f(\cdot)$ вогнута или же квазивогнута и $\nabla f(x) \neq 0$ для всех x.

Доказательство

1. Поскольку маршалловский спрос однородный нулевой степени, то при изменении цен и доходов в одинаковой пропорции спрос не меняется, а следовательно, не меняется и значение целевой функции, т.е. $v(p,\ I)$ обладает однородностью нулевой степени относительно $(p,\ I)$.

2. Рассмотрим $I' > I$ и покажем, что $v(p,\ I') \geq v(p,\ I)$. Рассмотрим два бюджетных множества: $B = \{x \in R_+^N : px \leq I\}$ и $B' = \{x \in R_+^N : px \leq I'\}$. Поскольку $I' > I$, то $B \subset B'$, откуда имеем

$$v(p,\ I') = \max_{x \in B'} u(x) \geq \max_{x \in B} u(x) = v(p,\ I).$$

Покажем, что при локально ненасыщаемых предпочтениях не может быть равенства. Рассмотрим $x^* \in \arg\max_{x \in B} u(x)$. В силу локальной ненасыщаемости $px^* = I < I'$. Это означает, что x^* — внутренняя точка множества B', т.е. существует окрестность точки x^*, которая целиком лежит в B', а в любой такой окрестности по свойству локальной ненасыщаемости найдется лучшая точка и, значит, $v(p,\ I') > u(x^*) = v(p,\ I)$.

3. Покажем, что $v(p,\ I)$ не возрастает по p. Рассмотрим $p' \geq p$ и определим бюджетные множества $B = \{x \in R_+^N : px \leq I\}$ и $B' = \{x \in R_+^N : p'x \leq I\}$. Поскольку $B' \subset B$, следовательно

$$v(p,\ I') = \max_{x \in B} u(x) \geq \max_{x \in B'} u(x) = v(p',\ I).$$

4. Покажем, что множество $\{(p, I) : v(p, I) \leq \overline{v}\}$ выпукло при любом $\overline{v}$. Рассмотрим два произвольных элемента этого множества $(p,\ I)$ и $(p',\ I')$ такие, что $v(p,\ I) \leq \overline{v}$ и $v(p',\ I') \leq \overline{v}$. Определим их выпуклую комбинацию: $p'' = (\alpha p + (1-\alpha)p')$ и $I'' = (\alpha I + (1-\alpha)I'')$, где $\alpha \in [0,\ 1]$. Мы хотим показать, что $v(p'',\ I'') \leq \overline{v}$.

Если $p''x \leq I''$, что можно переписать как

$$\alpha px + (1-\alpha)p'x \leq \alpha I + (1-\alpha)I', \text{ то}$$

$$\text{либо } px \leq I, \text{ либо } p'x \leq I'.$$

Рассмотрим каждый случай в отдельности. Если для произвольного x, удовлетворяющего ограничению $p''x \leq I''$, верно первое неравенство, то $u(x) \le v(p,\ I) \le \bar{v}$. Если же окажется верно второе, то $u(x) \le v(p',\ I') \le \bar{v}$. Таким образом, заключаем, что для любого x, удовлетворяющего ограничению $p''x \le I''$, верно $u(x) \le \bar{v}$. Это означает, что $v(p'',\ I'') \le \bar{v}$, поскольку спрос $x(p'',\ I'')$ должен удовлетворять бюджетному ограничению $p''x \le I''$. Таким образом, косвенная функция полезности квазивыпукла по ценам и доходу.

Заметим, что установленное свойство косвенной функции полезности верно для любой прямой функции полезности $u(x)$, независимо от того, является она квазивогнутой или нет. Доказательство можно проиллюстрировать графически. Пусть точки x и x' соответствуют решениям задачи потребителя при параметрах $(p,\ I)$ и $(p',\ I')$ соответственно, причем $u(x) = u(x') = u^*$. Заметим, что бюджетная линия $p''x = I''$ пройдет через точку пересечения прямых $px = I$ и $p'x \le I'$ и будет лежать между ними, как показано на рис. 2.3. Как видно из рисунка, при новом бюджетном множестве $p''x \le I''$ мы не можем достичь уровня полезности, большего, чем u^*.

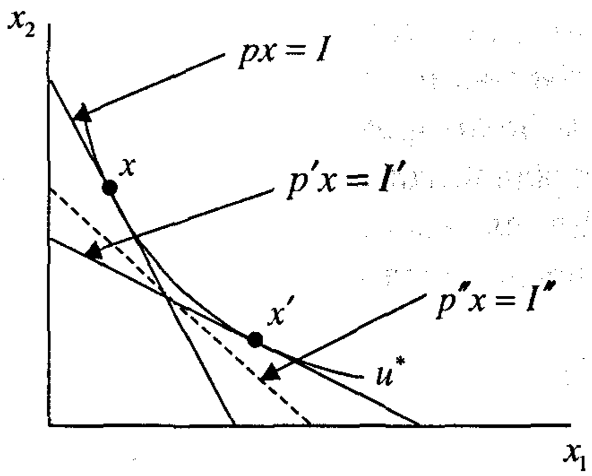


Рис. 2.3. Иллюстрация квазивыпуклости косвенной функции полезности по ценам и доходу

5. Непрерывность косвенной функции полезности при строго положительных ценах и доходе следует из теоремы о максимуме.

6. Доказательство тождества Роя будет приведено позже (после обсуждения двойственности в теории потребителя). ■

Лекция 3

Задача минимизации расходов

В предыдущей лекции мы рассмотрели задачу максимизации полезности при заданном доходе. Теперь поставим вопрос так: как достичь данного уровня полезности с минимальными расходами? Для ответа на этот вопрос следует решить задачу минимизации расходов. Опишем допустимое множество задачи как множество таких наборов из потребительского множества X, полезность которых не меньше заданного уровня $\bar{u}$:

$$V_{\bar{u}} = \{x \in X : u(x) \geq \bar{u}\}.$$

Тогда задача минимизации расходов примет вид

$$\min_{x \in V_{\bar{u}}} px.$$

Обозначим решения этой задачи (при различных значениях цен и полезности) через $h(p, u)$, и будем называть соответствующее отображение *компенсированным спросом* или *спросом по Хиксу*. Заметим, что мы обозначили компенсированный спрос через h для того, чтобы отличать его от маршалловского спроса — решения задачи максимизации полезности. Для случая двух товаров задачу минимизации расходов можно легко представить графически (см. рис. 3.1).

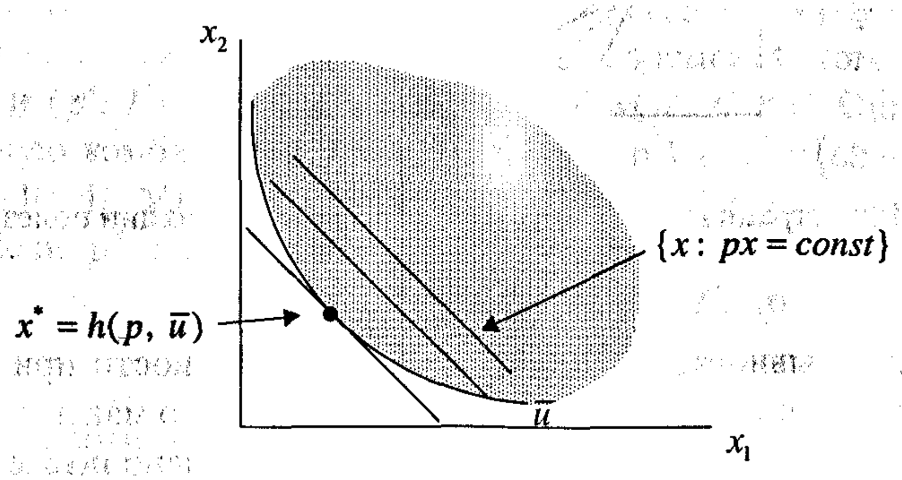


Рис. 3.1. Иллюстрация задачи минимизации расходов

На рис. 3.1 мы изобразили допустимое множество задачи минимизации расходов и линии уровня целевой функции (линии постоянных расходов), которые являются прямыми с наклоном, равным по модулю соотношению цен товаров. Линии постоянных расходов, расположенные ближе к началу координат, соответствуют меньшим расходам. Таким образом, минимальные расходы на множестве $V_{\bar{u}}$ достигаются в точке x^*.

Утверждение 3.1. Свойства компенсированного спроса $h(p, \bar{u})$.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p >> 0$, $\bar{u} \geq u(0)$. Тогда $h(p, \bar{u})$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность нулевой степени относительно цен: $h(\lambda p, \bar{u}) = h(p, \bar{u})$ для любого $\lambda > 0$;

2) ограничение задачи минимизации расходов выполняется как равенство: для любого $x^* \in h(p, \bar{u})$ имеем $u(x^*) = \bar{u}$;

3) если предпочтения выпуклы, то множество $h(p, \bar{u})$ выпукло;

4) если предпочтения строго выпуклы (следовательно, $u(\cdot)$ строго квазивогнутая), то множество $h(p, \bar{u})$ состоит из одного элемента, т.е. отображение является функцией компенсированного спроса;

5) имеет место закон компенсированного спроса: для любых $x' \in h(p', \bar{u})$ и $x'' \in h(p'', \bar{u})$ имеем $(p' - p'')(x' - x'') \leq 0$.

Доказательство

1. Изменение всех цен в одинаковой пропорции никак не отразится на допустимом множестве задачи $V_{\bar{u}}$, а приведет лишь к изменению расходов в той же пропорции, что никак не изменит решения задачи. Это означает однородность нулевой степени компенсированного спроса относительно цен.

2. Покажем, что для любого $x^* \in h(p, u)$ выполняется $u(x^*) = \bar{u}$. Предположим, что это не так и $u(x^*) > \bar{u}$. Тогда $u(x^*) > \bar{u} \geq u(0)$, откуда следует, что $x^* \neq 0$. Поскольку $p >> 0$, $x^* \geq 0$ и $x^* \neq 0$, то $px^* > 0$. Рассмотрим αx^* при $\alpha \in (0, 1)$. Поскольку $\alpha < 1$, то $\alpha px^* < px^*$ для любого $\alpha \in (0, 1)$. Кроме того, в силу непрерывности функции полез-

ности при α, стремящемся к единице, имеем $u(\alpha x^*) > u(x^*)$. Это означает, что x^* не является решением задачи минимизации расходов, поскольку есть другой набор, приносящий бóльшую полезность при меньших расходах. Мы пришли к противоречию, которое означает, что исходное предположение было неверно и, значит, $u(x^*) = \bar{u}$.

3. Возьмем два набора, являющихся решениями задачи минимизации расходов: x, $x' \in h(p, \bar{u})$. В силу того что оба набора решают одну и ту же задачу, им должны соответствовать одинаковые расходы: $px = px'$.

Рассмотрим $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$, где $\alpha \in [0, 1]$. Заметим, что x'' принадлежит множеству $V_{\bar{u}}$ в силу выпуклости предпочтений: $\alpha x + (1-\alpha)x' \succsim x$, откуда имеем $u(x'') \geq \bar{u}$. Кроме того, набору x'' соответствует такой же уровень расходов, как и исходным наборам:

$$px'' = \alpha px + (1-\alpha)px' = px.$$

Это означает, что x'' также является решением задачи: $x'' \in h(p, \bar{u})$, т.е. $h(p, \bar{u})$ — выпуклое множество.

4. Предположим, что задача минимизации расходов при ценах p и желаемом уровне полезности $\bar{u}$ имеет два разных решения: $x \neq x'$ и x, $x' \in h(p, \bar{u})$. Как было замечено выше, обоим наборам должны соответствовать одинаковые расходы: $px = px'$. Рассмотрим $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$, где $\alpha \in (0, 1)$. В силу строгой выпуклости предпочтений $x'' \succ x$, откуда имеем $u(x'') > u(x) \geq \bar{u}$. Кроме того, набору x'' соответствует такой же уровень расходов, как и исходным наборам:

$$px'' = \alpha px + (1-\alpha)px' = px.$$

Это означает, что x'' также является решением задачи: $x'' \in h(p, \bar{u})$, что противоречит утверждению 3.1(2), согласно которому для любого решения задачи минимизации расходов ограничение должно выполняться как равенство, а для x'' имеем $u(x'') > \bar{u}$. Полученное противоречие говорит о том, что задача не может иметь два разных решения.

5. Докажем закон спроса для компенсированного спроса. Поскольку любой набор из множества $h(p', \bar{u})$ дает минимальный уровень расходов при ценах p', то для любого $x' \in h(p', \bar{u})$

$$p'x' \le p'x \text{ для всех } x \in V_{\bar{u}}.$$

Аналогично для любого $x'' \in h(p'', \bar{u})$ имеем

$$p''x'' \le p''x \text{ для всех } x \in V_{\bar{u}}.$$

Эти неравенства, в частности, верны, если в качестве произвольных элементов из множества $V_{\bar{u}}$ будут взяты x' и x'':

$$p'x' \le p'x'' \text{ или } p'x' - p'x'' \le 0,$$

$$p''x'' \le p''x' \text{ или } p''x'' - p''x' \le 0.$$

Сложив эти неравенства, получим закон спроса для компенсированной функции спроса:

$$p'(x' - x'') - p''(x' - x'') = (p' - p'')(x' - x'') \le 0. \blacksquare$$

Если функция полезности дифференцируема, то решение задачи минимизации расходов можно охарактеризовать с помощью условий Куна — Таккера. Согласно теореме Куна — Таккера[3], если x^* — решение задачи минимизации расходов при $(p, \bar{u})$, то существует множитель $\mu \ge 0$ такой, что для любого товара i выполнены условия:

$$p_i \ge \mu \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i}; \quad p_i = \mu \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i}, \text{ если } x_i^* > 0.$$

Соответственно внутреннее решение, так же как и в задаче максимизации полезности характеризуется равенством предельной нормы замещения между двумя благами и их относительными ценами:

$$MRS_{ij}(x^*) = \frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{\partial u(x^*)/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

Это совпадение не случайно. Между задачей минимизации расходов и задачей максимизации полезности существует тесная связь. Ниже мы сформулируем и докажем соответствующие утверждения относительно соотношений между решениями этих задач и значениями целевых функций. Однако прежде закончим анализ самой задачи минимизации расходов.

[3] В данной задаче выполнено условие регулярности, и потому мы можем использовать теорему Куна — Таккера.

Изучив свойства решения задачи минимизации расходов, обратим внимание на значение минимальных расходов. Подставив решение задачи в целевую функцию, мы получим зависимость уровня минимальных расходов от цен и уровня полезности. Полученную функцию, отражающую эту зависимость называют *функцией расходов*. В дальнейшем будем обозначать эту функцию через $e(p,\ \bar{u})$: $e(p,\ \bar{u}) = px^*$, где $x^* \in h(p,\ \bar{u})$.

Утверждение 3.2. Свойства функции расходов $e(p, \bar{u})$.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p \gg 0$ и $\bar{u} > u(0)$. Тогда $e(p,\ \bar{u})$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность первой степени относительно цен: $e(\lambda p,\ \bar{u}) = \lambda e(p,\ \bar{u})$ для всех $\lambda > 0$;

2) возрастает по уровню полезности;

3) не убывает по ценам;

4) вогнута по ценам;

5) непрерывна;

6) если предпочтения строго выпуклые ($u(\cdot)$ строго квазивогнута) и функция $e(p,\ \bar{u})$ дифференцируема при $\bar{p} \gg 0$, то во внутренних точках $(h(\bar{p},\ \bar{u}) \gg 0)$ имеет место лемма Шепарда $h_i(\bar{p},\ \bar{u}) = \dfrac{\partial e(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_i}$.

Доказательство

1. Поскольку компенсированный спрос однородный нулевой степени по ценам, то при таком изменении цен меняется лишь стоимость оптимального набора и меняется в той же пропорции, в какой изменяются все цены.

2. Рассмотрим $u'' > u'$ и покажем, что $e(p,\ u'') > e(p,\ u')$. Пусть

$$x'' \in \arg\min_{x \in V_{u''}} px \quad \text{и} \quad x' \in \arg\min_{x \in V_{u'}} px.$$

Предположим, что $px'' \le px'$. Поскольку $u(x'') > u'$, то $x'' \in V_{u'}$ и, следовательно, является решением задачи минимизации расходов при уровне полезности u', причем $u(x'') > u'$, что противоречит утверждению 3.1(2). Полученное противоречие доказывает утверждение.

3. Пусть $p'' \geq p'$. Обозначим через x'' и x' решения задачи минимизации расходов при ценах p'' и p' соответственно. Тогда

$$e(p', \bar{u}) = p'x' \leq p''x' \leq p''x'' = e(p'', \bar{u}).$$

4. Зафиксируем уровень полезности и рассмотрим два произвольных вектора цен p'' и p'. Обозначим через x'' и x' решения задачи минимизации расходов при ценах p'' и p' соответственно. Обозначим через $\tilde{p}$ линейную комбинацию двух векторов цен $\tilde{p} = \alpha p' + (1-\alpha)p''$, где $\alpha \in [0, 1]$ и пусть $\tilde{x}$ — решение задачи минимизации расходов при ценах $\tilde{p}$.

Поскольку x' дает минимальные расходы при ценах p', то любой другой допустимый набор, включая набор $\tilde{x}$, не может дать меньшие расходы:

$$e(p', \bar{u}) = p'x' \leq p'\tilde{x}.$$

Аналогично найдем, что

$$e(p'', \bar{u}) = p''x'' \leq p''\tilde{x}.$$

Домножим первое неравенство на α, второе — на $(1 - \alpha)$ и сложим:

$$\alpha e(p', \bar{u}) + (1-\alpha)e(p'', \bar{u}) \leq \left(\alpha p' + (1-\alpha)p''\right)\tilde{x} = \tilde{p}\tilde{x} = e(\tilde{p}, \bar{u}).$$

Таким образом, мы доказали вогнутость функции расходов по ценам:

$$\alpha e(p', \bar{u}) + (1-\alpha)e(p'', \bar{u}) \leq e\left(\alpha p' + (1-\alpha)p'', \bar{u}\right).$$

5. Непрерывность функции расходов следует из теоремы о максимуме. Однако мы можем установить непрерывность и другим способом. Поскольку вогнутая функция непрерывна во внутренних точках области определения, то из предыдущего пункта следует непрерывность функции расходов по ценам.

6. Докажем лемму Шепарда. Продифференцировав функцию расходов по цене i-го товара, найдем

$$\frac{\partial e(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial\left(ph(\bar{p}, \bar{u})\right)}{\partial p_i} = h_i(\bar{p}, \bar{u}) + \sum_j p_j \frac{\partial h_j(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_i}.$$

Так как $h(\bar{p}, \bar{u}) >> 0$, то из условий первого порядка для задачи минимизации расходов имеем

$$p_j = \mu \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j}.$$

Подставим это выражение для каждой цены в найденную выше производную от функции расходов:

$$\frac{\partial e(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(\bar{p}, \bar{u}) + \mu \sum_j \frac{\partial u(h)}{\partial h_j} \cdot \frac{\partial h_j(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(\bar{p}, \bar{u}),$$

поскольку $\sum_j \frac{\partial u(h)}{\partial h_j} \cdot \frac{\partial h_j(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = 0$. Равенство нулю этой суммы мы получаем, дифференцируя ограничение задачи минимизации расходов по p_i и учитывая, что это ограничение выполняется как равенство:

$$\frac{\partial u\left(h(\bar{p}, \bar{u})\right)}{\partial p_i} = \sum_j \frac{\partial u(h)}{\partial h_j} \cdot \frac{\partial h_j(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial p_i} = 0. \ \blacksquare$$

Поясним графически свойства 4 и 6. Для этого зафиксируем цены всех товаров, кроме i-го: $p_j = \bar{p}_j$, $j \neq i$. Обозначим через $e(p_i)$ минимальные расходы при векторе цен $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{i-1}, p_i, \bar{p}_{i+1}, \ldots, \bar{p}_N)$ и уровне полезности $\bar{u}$. Пусть при ценах $\bar{p} = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{i-1}, \bar{p}_i, \bar{p}_{i+1}, \ldots, \bar{p}_N)$ потребительский набор $h(\bar{p}, \bar{u})$ является решением задачи минимизации расходов, тогда $e(\bar{p}_i) = \bar{p}h(\bar{p}, \bar{u})$. Предположим, что цена i-го товара изменилась и стала равна p_i, а все остальные цены остались прежними. Если при этом потребитель будет покупать старый набор товаров, то его расходы составят

$$\varphi(p_i) = p_i h_i(\bar{p}, \bar{u}) + \sum_{j \neq i} \bar{p}_j h_j(\bar{p}, \bar{u}).$$

Функцию $\varphi(p_i)$ назовем *функцией «наивного поведения»* потребителя. Если же он изменит приобретаемый набор так, чтобы при новых ценах издержки были минимальны, то его расходы при этом не возрастут, т.е. значение функции расходов при каждом значении p_i будет не больше величины $\varphi(p_i)$:

$$e(p_i) \le p_i h_i(\bar{p},\ \bar{u}) + \sum_{j\ne i} \bar{p}_j h_j(\bar{p},\ \bar{u}).$$

Кроме того, при начальном уровне цены i-го товара оба выражения дадут одинаковые расходы:

$$e(\bar{p}_i) = \bar{p}_i h_i(\bar{p},\ \bar{u}) + \sum_{j\ne i} \bar{p}_j h_j(\bar{p},\ \bar{u}).$$

Изобразим графически функцию «наивного поведения» $\varphi(p_i)$ и функцию расходов $e(p_i)$ (рис. 3.2). График функции $\varphi(p_i)$ — прямая с наклоном, равным $h_i(\bar{p},\ \bar{u})$. График функции $e(p_i)$ везде лежит ниже прямой $\varphi(p_i)$, и в точке $p_i = \bar{p}_i$ их значения совпадают, как это изображено на рис. 3.2. Так как такое соотношение между $\varphi(p_i)$ и $e(p_i)$ выполняется при любом выборе $\bar{p}_i$, то функция расходов вогнута по p_i и, более того, поскольку прямая $\varphi(p_i)$ является касательной к функции $e(p_i)$ в точке $p_i = \bar{p}_i$, то в этой точке их наклоны совпадают, и мы получаем лемму Шепарда:

$$\frac{\partial e(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial\left(\varphi(\bar{p})\right)}{\partial p_i} = h_i(\bar{p},\ \bar{u}).$$

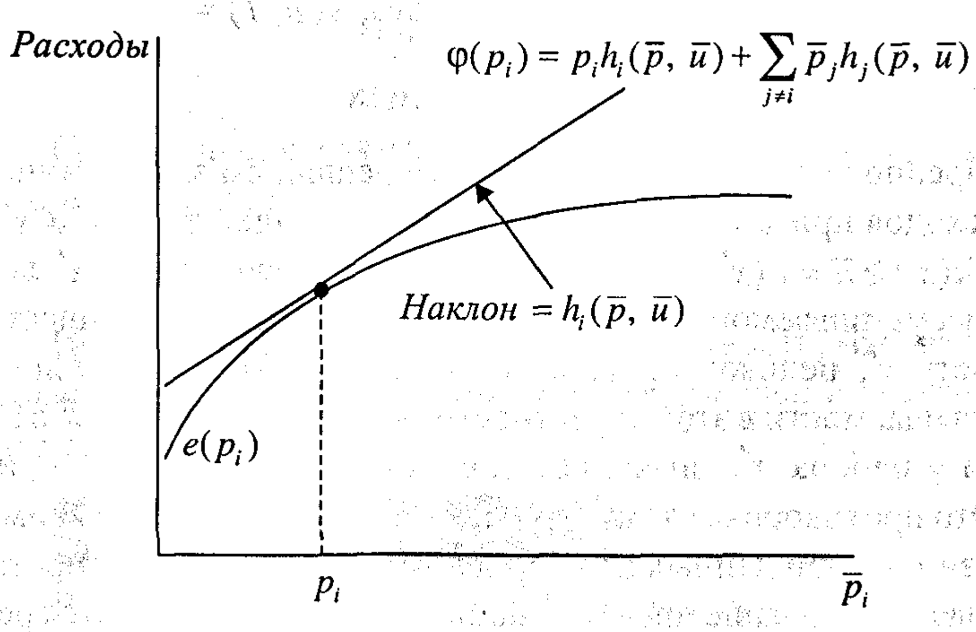


Рис. 3.2. Вогнутость функции расходов и лемма Шепарда

Лекция 4

Двойственность в теории потребителя

Как мы видели, задача максимизации полезности и задача минимизации расходов тесно связаны. Сформулируем и докажем утверждения относительно связи между решениями этих задач и значениями их целевых функций.

Утверждение 4.1. Теорема двойственности.

1. Пусть $u(\cdot)$ — функция полезности, представляющая локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Если x^* — решение задачи максимизации полезности при ценах $p \gg 0$ и доходе $I > 0$, то x^* — решение задачи минимизации расходов при $\bar{u} = u(x^*)$. Более того, $e(p, \bar{u}) = I$.

2. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Если x^* — решение задачи минимизации расходов при $p \gg 0$ и $\bar{u} \geq u(0)$, то x^* — решение задачи максимизации полезности при ценах $p \gg 0$ и доходе $I = e(p, \bar{u})$. Более того, $v(p, I) = \bar{u}$.

Доказательство

1. Предположим, что x^* не является решением задачи минимизации расходов при $\bar{u} = u(x^*)$. Следовательно, существует $x' \neq x^*$ такой, что $u(x') \geq \bar{u} = u(x^*)$ и $px' < px^* \leq I$. Это означает, что x' лежит внутри рассматриваемого бюджетного множества и, значит, существует окрестность x', целиком лежащая в этом множестве. В силу локальной ненасыщаемости в этой окрестности можно найти набор $\tilde{x}$ с большим, чем у набора x', значением полезности: $u(\tilde{x}) > u(x')$, причем $p\tilde{x} < I$. Это противоречит тому, что x^* — решение задачи максимизации полезности при данных ценах p и доходе I. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно и x^* является решением задачи минимизации расходов при $\bar{u} = u(x^*)$, т.е. $e(p, \bar{u}) = px^*$. В силу локальной ненасыщаемости бюджетное ограничение в задаче

максимизации полезности должно выполняться как равенство, т.е. $px^* = I$, откуда получаем искомый результат: $e(p, \bar{u}) = I$.

2. Предположим, что x^* не является решением задачи максимизации полезности при $I = px^*$. Тогда существует $x' \neq x^*$ такой, что $px' \leq I = px^*$ и $u(x') > u(x^*) \geq \bar{u}$. Поскольку x' удовлетворяет ограничению задачи минимизации расходов и стоит при ценах p не больше, чем оптимальный в задаче минимизации расходов набор x^*, то x' также является решением задачи минимизации расходов. Однако существование такого решения противоречит утверждению 3.1(2).

Полученное противоречие свидетельствует о том, что сделанное ранее предположение неверно и x^* является решением задачи максимизации полезности при $I = px^*$. Отсюда следует, что $v(p, I) = u(x^*)$. В силу 3.1(2) набор x^* удовлетворяет ограничению задачи минимизации расходов как равенству $u(x^*) = \bar{u}$, и в итоге получаем, что $v(p, I) = u(x^*) = \bar{u}$. ■

Из доказанного выше утверждения для локально ненасыщаемых непрерывных предпочтений мы получаем соотношения двойственности, связывающие задачу максимизации полезности и задачу минимизации расходов. *Тождества, связывающие функции маршалловского и компенсированного спроса:*

$$x(p, I) = h\big(p, v(p, I)\big);$$
$$h(p, \bar{u}) = x\big(p, e(p, \bar{u})\big).$$

Соотношения, связывающие косвенную функцию полезности и функцию расходов:

$$v\big(p, e(p, \bar{u})\big) = \bar{u};$$
$$e\big(p, v(p, I)\big) = I.$$

Используя эти соотношения двойственности, мы докажем *тождество Роя, связывающее маршалловский спрос и косвенную функцию полезности.*

Доказательство тождества Роя

Рассмотрим точку $p = \bar{p}$ и $I = \bar{I}$, где $v(\bar{p}, \bar{I}) = \bar{u}$.

Мы знаем, что при любом векторе цен p имеет место следующее соотношение:

$$v\left(p,\, e(p,\, \bar{u})\right) = \bar{u}.$$

Продифференцируем его по цене i-го товара и оценим в точке $p = \bar{p}$:

$$\frac{dv\left(\bar{p},\, e(\bar{p},\, \bar{u})\right)}{dp_i} = \frac{\partial v\left(\bar{p},\, e(\bar{p},\, \bar{u})\right)}{\partial p_i} + \frac{\partial v\left(\bar{p},\, e(\bar{p},\, \bar{u})\right)}{\partial I} \cdot \frac{\partial e(\bar{p},\, \bar{u})}{\partial p_i} = 0.$$

В силу леммы Шепарда $\dfrac{\partial e(\bar{p},\, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(\bar{p},\, \bar{u})$. По соотношению двойственности для функции расходов $e(\bar{p},\, \bar{u}) = \bar{I}$. В результате полученное выражение можно переписать как

$$\frac{\partial v(\bar{p},\, \bar{I})}{\partial p_i} + \frac{\partial v(\bar{p},\, \bar{I})}{\partial I} h_i(\bar{p},\, \bar{u}) = 0.$$

Выражая компенсированный спрос, с учетом соотношения двойственности для функций спроса получаем

$$x_i(\bar{p},\, \bar{I}) = h_i\left(\bar{p},\, v(\bar{p},\, \bar{I})\right) = h_i(\bar{p},\, \bar{u}) = -\frac{\partial v(\bar{p},\, \bar{I}) / \partial p_i}{\partial v(\bar{p},\, \bar{I}) / \partial I}. \ \blacksquare$$

Из соотношений двойственности мы знаем, как связаны маршалловский и компенсированный спрос. Используя эти соотношения, мы можем провести анализ сравнительной статики. Рассмотрим, как реагирует маршалловский спрос на изменение цены какого-либо товара. Ответ на этот вопрос в терминах эффектов дохода и замещения дает *уравнение Слуцкого.*

Утверждение 4.2. Уравнение Слуцкого.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая строго выпуклые локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Если $x(p,\, I)$ и $h(p,\, u)$ — дифференцируемые функции маршалловского и компенсированного спроса, то для всех $\bar{p} \gg 0$ и $\bar{I} > 0$ имеет место *уравнение Слуцкого:*

$$\frac{\partial x_i(\bar{p},\, \bar{I})}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(\bar{p},\, \bar{u})}{\partial p_j} - x_j(\bar{p},\, \bar{I}) \frac{\partial x_i(\bar{p},\, \bar{I})}{\partial I}.$$

Доказательство

Рассмотрим вектор цен $\bar{p} \gg 0$ и доход $\bar{I} > 0$. Обозначим максимальный уровень полезности, достижимый при этих ценах и доходе через $\bar{u} = v(\bar{p}, \bar{I})$.

Воспользуемся соотношением двойственности, связывающим маршалловский и компенсированный спрос. Для любого вектора цен p:

$$h(p, \bar{u}) = x\big(p, e(p, \bar{u})\big).$$

Продифференцируем это тождество по цене i-го товара и оценим в точке $\bar{p}$:

$$\frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i\big(\tilde{p}, e(\bar{p}, \bar{u})\big)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i\big(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u})\big)}{\partial I} \cdot \frac{\partial e(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j}.$$

По лемме Шепарда $\dfrac{\partial e(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} = h_j(\bar{p}, \bar{u})$. Используя этот факт и то, что $e(\bar{p}, \bar{u}) = \bar{I}$, получаем:

$$\frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial p_j} + h_j(\bar{p}, \bar{u}) \frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I}.$$

Из соотношения двойственности для j-го товара $h_i(\bar{p}, \bar{u}) = h_i(\bar{p}, v(\bar{p}, \bar{I})) = x_i(\bar{p}, \bar{I})$. Таким образом, подставляя маршалловский спрос вместо компенсированного, получаем искомое соотношение: $\dfrac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial p_j} = \dfrac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} - x_j(\bar{p}, \bar{I}) \dfrac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I}$. ■

Полученное уравнение позволяет разложить эффект изменения цены товара на две составляющие. Во-первых, это изменение спроса при данном уровне полезности (т.е. реакция на изменение относительных цен при неизменном уровне благосостояния), которое описывается первым слагаемым, стоящим в правой части уравнения Слуцкого, — изменением компенсированного спроса. Этот эффект мы называем *эффектом замещения*. Во-вторых, изменение цены влияет на покупательную способность фиксированного дохода, что при неизменных относительных ценах также влияет на спрос. Этот эффект, отражаемый вторым слагаемым, называют *эффектом дохода*.

Выведенное нами уравнение применимо в тех случаях, когда доход потребителя фиксирован (не зависит от цен). В действительности, если доход потребителя состоит не только из экзогенно заданной денежной суммы, но потребитель владеет и неким запасом товаров, то изменение цен будет влиять и на стоимость этого набора. Рассмотрим задачу потребителя при наличии натурального дохода и покажем, как выведенное выше уравнение можно обобщить на случай натурального дохода.

Итак, обозначим натуральный доход (*вектор первоначальных запасов*) потребителя через $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$, где ω_i — запас i-го товара. Тогда задача потребителя примет вид:

$$\max_{x \geq 0} \ u(x)$$
$$px \leq p\omega.$$

В результате спрос потребителя будет зависеть от цен и стоимости первоначального запаса $x(p, p\omega)$.

Утверждение 4.3. Уравнение Слуцкого для случая натурального дохода.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая строго выпуклые локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Если $x(p, p\omega)$ — функция спроса при наличии натурального дохода, $x(p, I)$ — функция маршалловского спроса при фиксированном доходе и $h(p, u)$ — функция компенсированного спроса, то при условии дифференцируемости этих функций при $\bar{p} \gg 0$ имеет место *обобщенное уравнение Слуцкого*

$$\frac{dx_i(\bar{p}, \bar{p}\omega)}{dp_j} = \frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} + \left(\omega_j - x_j(\bar{p}, \bar{p}\omega)\right)\frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I}.$$

Доказательство

Рассмотрим вектор цен $\bar{p} \gg 0$ и обозначим через $\bar{I}$ стоимость вектора первоначальных запасов при ценах $\bar{p} : \bar{I} = \bar{p}\omega$. Пусть $\bar{u}$ —

максимальный уровень полезности, достижимый при этих ценах и доходе: $\bar{u} = v(\bar{p}, \bar{I})$.

Влияние цены товара на рассматриваемый спрос $x(p, p\omega)$ можно поделить на два эффекта: изменение спроса при неизменной стоимости первоначального запаса и изменение спроса в силу изменения самой стоимости натурального дохода:

$$\frac{dx_i(\bar{p}, \bar{p}\omega)}{dp_j} = \frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{dp_j} + \frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I} \cdot \frac{\partial(\bar{p}\omega)}{dp_j}.$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой эффект изменения спроса, вызванного изменением цены товара, при фиксированном доходе, а потому его можно разложить согласно уравнению Слуцкого для случая фиксированного дохода. В результате этого разложения имеем

$$\frac{dx_i(\bar{p}, \bar{p}\omega)}{dp_j} = \frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} - x_j(\bar{p}, \bar{p}\omega)\frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I} + \omega_j \frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I} =$$

$$= \frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} + \left(\omega_j - x_j(\bar{p}, \bar{p}\omega)\right)\frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I}. \blacksquare$$

Свойства функции расходов и уравнение Слуцкого позволяют нам сформулировать ряд дополнительных свойств функций спроса. Для этого введем понятие *матрицы коэффициентов замещения*. Эту матрицу еще называют *матрицей Слуцкого*. Договоримся обозначать эту матрицу через S. Элементами этой матрицы s_{ij} являются эффекты замещения для спроса на i-й товар при изменении цены j-го блага, т.е. $s_{ij} \equiv \dfrac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j}$. С учетом уравнения Слуцкого каждый элемент матрицы может быть выражен через маршалловский спрос:

$$s_{ij} \equiv \frac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p, I)}{\partial p_j} + x_j(p, I)\frac{\partial x_i(p, I)}{\partial I}.$$

Утверждение 4.4. Свойства матрицы замещения Слуцкого.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая строго выпуклые локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Пусть функция расходов $e(p, u)$ дважды непрерывно дифференцируема, тогда матрица замещения Слуцкого $S(p, I)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $S(p, I)$ — симметричная матрица;
2) $S(p, I)$ — отрицательно полуопределенная матрица;
3) $pS(p, I) = 0$.

Доказательство

1. В силу леммы Шепарда $s_{ij} = \dfrac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j} = \dfrac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_i \partial p_j}$. Поскольку мы предполагали, что функция расходов дважды непрерывно дифференцируема, то по теореме Юнга $\dfrac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_i \partial p_j} = \dfrac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_j \partial p_i}$, откуда следует, что $s_{ij} = s_{ji}$, т.е. матрица Слуцкого симметрична.

2. Учитывая, что матрица замещения является матрицей вторых производных функции расходов, а функция расходов вогнута, то матрица $S(p, I)$ должна быть отрицательно полуопределенной.

3. Поскольку компенсированный спрос однородный нулевой степени по ценам, то в силу леммы Эйлера имеем $pS(p, I) = \sum_i p_i \dfrac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j} =$ $= 0$. ■

Подведем итоги проведенному анализу задач максимизации полезности и минимизации расходов. Как показано на рис. 4.1, решения этих задач связаны соотношениями двойственности и, помимо этого, производные решения по ценам связаны уравнением Слуцкого. Значения задач согласно условиям двойственности являются обратными функциями при данном векторе цен. Косвенную функцию полезности мы получаем, подставляя маршалловский спрос в целевую функцию, а с помощью тождества Роя можно совершить обратную операцию: из косвенной функции полезности получить функции маршалловского спроса. Аналогично подстановкой компенсированного спроса в целевую функцию мы получаем функцию расходов, а применяя лемму Шепарда, из функции расходов находим компенсированный спрос.

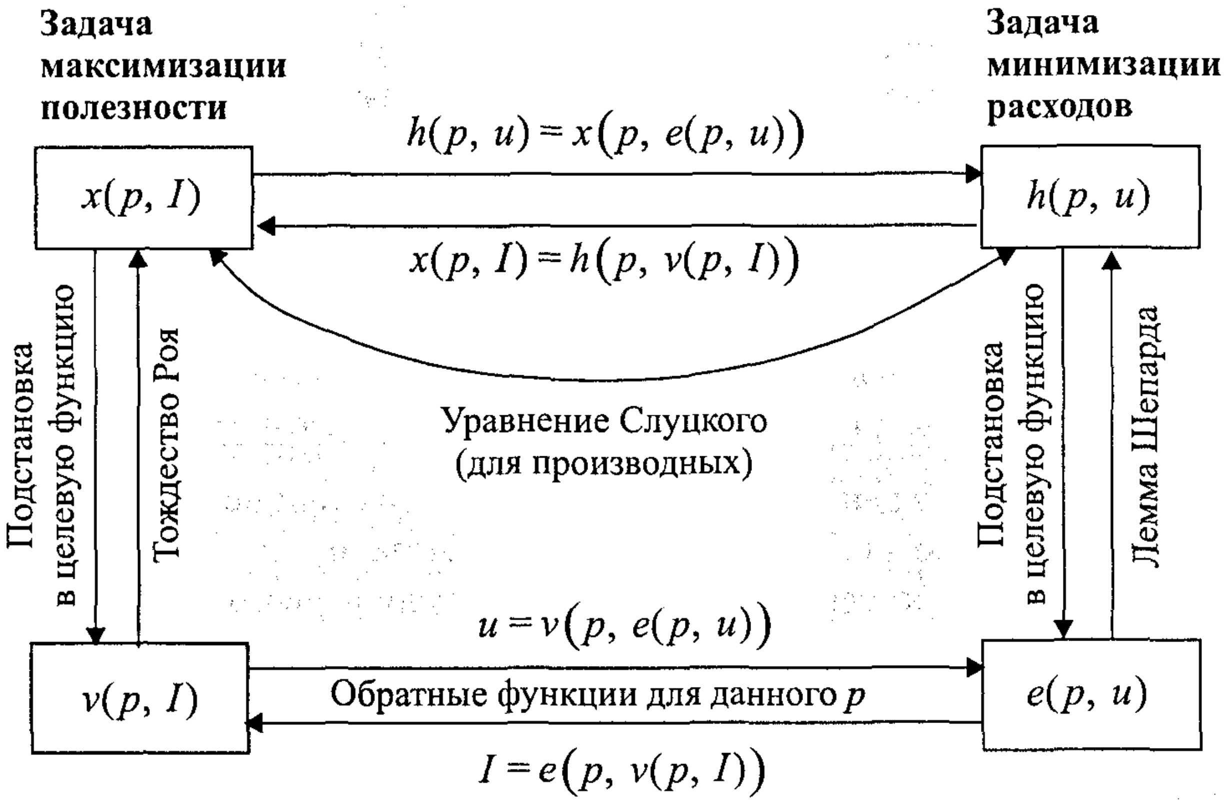


Рис. 4.1. Взаимосвязь задачи максимизации полезности и задачи минимизации расходов

Лекция 5

Задача восстановления предпочтений

Как мы видели, непрерывно дифференцируемые функции маршалловского спроса должны удовлетворять следующим условиям: они однородные нулевой степени по ценам и доходу, удовлетворяют бюджетному ограничению как равенству, и, кроме того, образованная их производными матрица Слуцкого является симметричной и отрицательно полуопределенной. Это список необходимых свойств функций спроса, полученных нами на основе анализа модели спроса рационального потребителя. Является ли этот список достаточным для существования рациональных предпочтений, порождающих функции спроса $x(p, I)$? Для ответа на этот вопрос обратимся к задаче восстановления предпочтений на основе информации о функциях маршалловского спроса.

Разделим задачу восстановления предпочтений на два этапа. Сначала попытаемся на основе маршалловского спроса восстановить функцию расходов, а затем рассмотрим вопрос восстановления предпочтений по функции расходов.

1. Восстановление функции расходов

Рассмотрим сначала случай двух товаров ($N = 2$). Этот случай удобен тем, что, положив цену одного из товаров равной единице, мы можем в дальнейшем работать лишь с одной ценой. Итак, пусть $p_2 = 1$. Выберем произвольную первоначальную точку: цену первого товара p_1^0 и доход I^0. Поскольку нам известны функции маршалловского спроса, то мы можем найти спрос для этих параметров $x(p_1^0, 1, I^0)$. Присвоим этому потребительскому набору уровень полезности u^0. Восстановим расходы как функцию от цены первого товара при уровне полезности u^0. Поскольку цену второго товара и уровень полезности мы зафиксировали, то будем рассматривать расходы только как функцию цены первого товара $e(p_1) = e(p_1, 1, u^0)$. В силу леммы Шепарда имеем

$$\frac{\partial e(p_1)}{\partial p_1} = h_1(p_1, 1, u^0).$$

Компенсированный спрос ненаблюдаем, и мы имеем информацию только о маршалловском спросе. Однако, используя соотношение двойственности, мы можем перейти от компенсированного спроса к маршалловскому: $h_1(p_1, 1, u^0) = x_1\left(p_1, 1, e(p_1, 1, u^0)\right)$. Подставим вместо компенсированного спроса маршалловский, обозначив $x_1\left(p_1, e(p_1)\right) = x_1\left(p_1, 1, e(p_1, 1, u^0)\right)$, и получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial e(p_1)}{\partial p_1} = x_1\left(p_1, e(p_1)\right)$$

при первоначальном условии $e(p_1^0) = I^0$.

Заметим, что решение данного уравнения даст функцию, которая имеет свойства функции расходов. Убедимся, что это действительно так.

Поскольку мы находим, что при любых ценах и доходах спрос неотрицателен, то

$$\frac{\partial e(p_1)}{\partial p_1} = x_1\left(p_1,\ e(p_1)\right) \geq 0.$$

Это означает, что расходы не убывают по цене.

Мы находим функцию расходов из решения дифференциального уравнения, а это означает, что полученная функция будет непрерывной.

Предполагалось, что функции маршалловского спроса порождают отрицательно полуопределенную матрицу замещения Слуцкого. Учитывая, что эта матрица является матрицей вторых производных функции расходов по ценам, мы можем заключить, что построенная функция будет вогнутой по ценам. Таким образом, решив приведенное выше дифференциальное уравнение при начальном условии, мы получим функцию расходов.

Рассмотрим обобщение задачи на случай N товаров. В этом случае, применяя лемму Шепарда для N товаров, мы придем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e(p)}{\partial p_1} = x_1\left(p,\ e(p)\right) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial e(p)}{\partial p_N} = x_N\left(p,\ e(p)\right) \end{cases}$$

при начальном условии $e(p^0) = I^0$. Для того чтобы эта система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица вторых производных функции $e(p)$ была симметричной и отрицательно полуопределенной. И это действительно так в нашем случае, поскольку матрица вторых производных $e(p)$ является матрицей Слуцкого, которая, согласно сделанным нами предположениям, удовлетворяет этим свойствам.

2. Восстановление предпочтений по функции расходов

Мы знаем, как для каждого уровня полезности восстановить соответствующую функцию расходов по наблюдаемому маршалловскому спросу. Теперь нам предстоит решить, каким образом мы сможем по функции расходов восстановить предпочтения потребителя? Попытаемся для каждого уровня полезности $\bar{u}$ восстановить множество $V_{\bar{u}} = \{x \in X : u(x) \geq \bar{u}\}$.

Рассмотрим уровень полезности u^0 и построим множество

$$\tilde{V}_{u_0} = \{x \in R_+^N : px \geq e(p, u^0) \ \ \forall \ \ p >> 0\}.$$

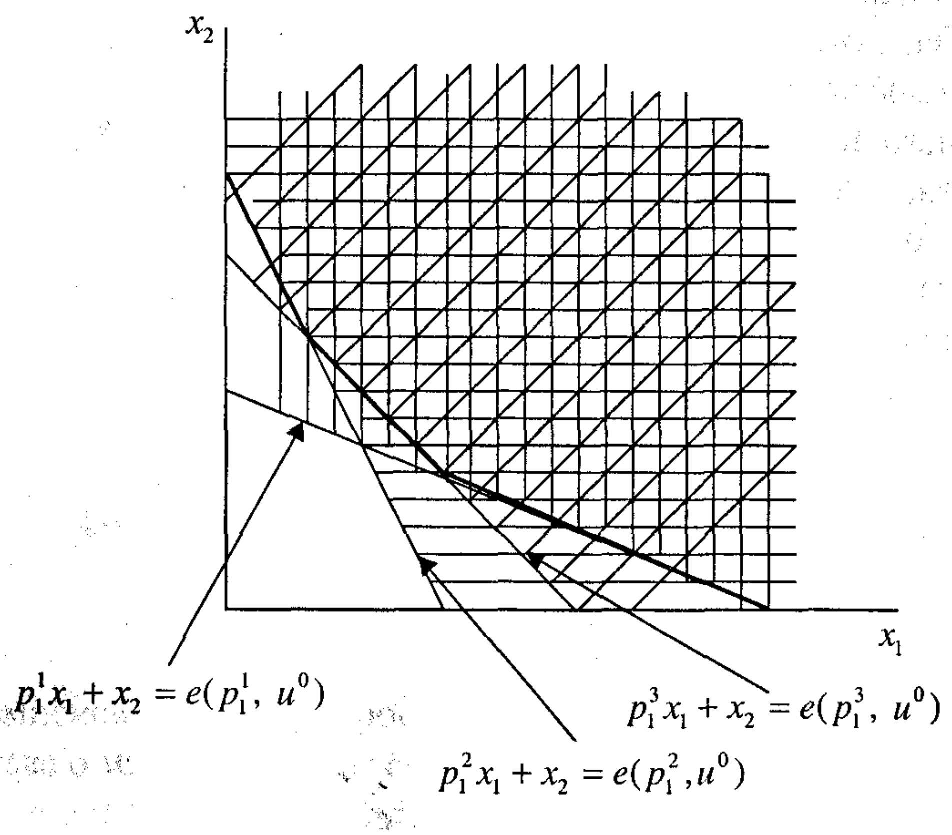


Рис. 5.1. Восстановление предпочтений по функции расходов

Проиллюстрируем процесс построения этого множества для случая двух товаров с помощью рис. 5.1. Итак, зафиксируем цену одного из товаров: пусть $p_2 = 1$. Рассмотрим некое значение цены первого товара $p_1 = p_1^1$ и найдем соответствующие расходы $e(p_1^1,\ u^0)$. Изобразим на графике в первом ортанте (нас интересует лишь неотрицательное потребление) решение неравенства $p_1^1 x_1 + x_2 \geq e(p_1^1,\ u^0)$. Теперь рассмотрим другую цену первого товара $p_1 = p_1^2$ и соответствующий уровень расходов $e(p_1^2,\ u^0)$. Решим графически неравенство $p_1^2 x_1 + x_2 \geq e(p_1^2,\ u^0)$. Снова изменим цену первого товара и получим третье неравенство и т.д. В итоге мы должны взять только те точки, которые удовлетворяют решению всех неравенств, перебрав при этом все возможные неотрицательные значения цены первого товара. Как видно из рисунка, с каждой последующей итерацией граница множества становится все более сглаженной.

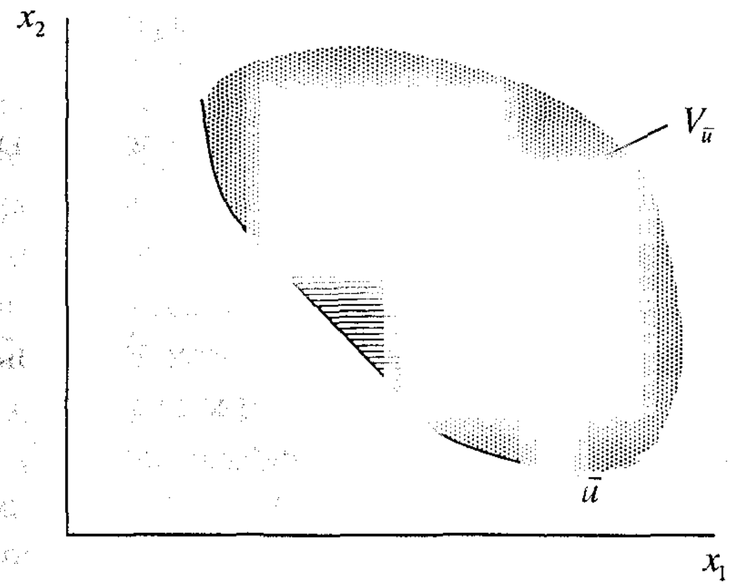


Рис. 5.2. Различие между истинными и восстановленными предпочтениями при невыпуклости предпочтений

Итак, следуя описанной выше процедуре, мы можем для каждого уровня полезности $\bar{u}$ построить множество $\tilde{V}_{\bar{u}}$. Теперь нам нужно ответить на несколько вопросов. Во-первых, действительно ли восстановленное множество будет порождать ту же функцию расходов, что и исходное? Во-вторых, будет ли само восстановленное множество $\tilde{V}_{\bar{u}}$ в точности совпадать с исходным? По построению множества $\tilde{V}_{\bar{u}}$ мы видим, что оно получается как пересечение выпуклых множеств, а потому и само является выпуклым. Это означает, что если предпочтения потребителя не являются выпуклыми, то восстановленное множество может не совпадать с исходным. В этом случае мы можем рассчитывать на восстановление лишь выпуклой оболочки истинного множества $\tilde{V}_{\bar{u}}$, как показано на рис. 5.2. Точки из горизонтально заштрихованной области не принадлежали исходному множеству $V_{\bar{u}}$, но будут принадлежать восстановленному множеству $\tilde{V}_{\bar{u}}$.

Утверждение 5.1. Связь исходных и восстановленных предпочтений.

1. Пусть $e(p,\ \bar{u})$ — функция расходов для рациональных, непрерывных предпочтений, определенных на множестве $X = R_+^N$ и представленных множеством $V_{\bar{u}}$. Если $\tilde{V}_{\bar{u}}$ — множество, восстановленное на основе этой функции расходов: $\tilde{V}_{\bar{u}} = \{x \in R_+^N : px \geq e(p,\ \bar{u})\ \ \forall\ \ p >> 0\}$, то для всех $p >> 0$ $e(p,\bar{u}) = \min\limits_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} px$.

2. Если, кроме того, предпочтения потребителя выпуклы и слабо монотонны, то $\tilde{V}_{\bar{u}} = V_{\bar{u}}$.

Доказательство

1. Рассмотрим произвольный элемент из $V_{\bar{u}}$ и покажем, что он будет принадлежать восстановленному множеству $\tilde{V}_{\bar{u}}$. Итак, пусть $x \in V_{\bar{u}}$, тогда $px \geq e(p,\ \bar{u})$. Согласно определению $\tilde{V}_{\bar{u}}$ это означает, что $x \in \tilde{V}_{\bar{u}}$. Таким образом, $V_{\bar{u}} \subset \tilde{V}_{\bar{u}}$. Отсюда, в частности, следует, что множество $\tilde{V}_{\bar{u}}$ непусто. Заметим, что для каждого уровня полезности множество $\tilde{V}_{\bar{u}}$ замкнутое и ограниченное снизу. Ограниченность снизу следует из того, что $\tilde{V}_{\bar{u}}$ — подмножество R_+^N и, значит, $x \geq 0$. Итак, мы минимизируем непрерывную функцию (px) на непустом замкнутом, ограниченном снизу множестве, следовательно, решение задачи $\min\limits_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} px$ существует.

Поскольку выше было установлено, что $V_{\bar{u}} \subset \tilde{V}_{\bar{u}}$, то мы можем заключить, что $e(p,\ \bar{u}) = \min\limits_{x \in V_{\bar{u}}} px \geq \min\limits_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} px$.

Предположим, что существует вектор цен $p^* >> 0$ такой, что $e(p^*,\ \bar{u}) > \min\limits_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} p^*x$. Пусть минимум $\min\limits_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} p^*x = p^*x^*$. Поскольку $x^* \in \tilde{V}_{\bar{u}}$, то по определению этого множества имеем $p^*x^* > e(p^*,\ \bar{u})$, но это противоречит нашему предположению о том, что $e(p^*, \bar{u}) > \min_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} p^* x$. Таким образом, для всех $p >> 0$ имеем $e(p, \bar{u}) = \min_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} px$.

2. Доказывая первую часть утверждения, мы показали, что $V_{\bar{u}} \subset \tilde{V}_{\bar{u}}$. Убедимся, что при выпуклости и слабой монотонности предпочтений имеет место и обратное включение $\tilde{V}_{\bar{u}} \subset V_{\bar{u}}$. Предположим, что это не так, т.е. существует $\tilde{x} \in V_{\bar{u}}$ и при этом $\tilde{x} \notin V_{\bar{u}}$. Поскольку множество $V_{\bar{u}}$ непустое, выпуклое (в силу выпуклости предпочтений), замкнутое и $\tilde{x} \in V_{\bar{u}}$, то по теореме о разделяющей гиперплоскости существует вектор $p^* \neq 0$ такой, что для любого $x \in V_{\bar{u}}$ имеем $p^* x > p^* \tilde{x}$.

Покажем, что $p^* \geq 0$, т.е. данный вектор можно рассматривать в качестве вектора цен. Предположим, что для некоторого товара $p_i^* < 0$. Рассмотрим некий элемент множества $V_{\bar{u}} : x \in V_{\bar{u}}$. Модифицируем этот набор, оставляя неизменными все координаты кроме i-й и увеличивая i-ю координату: $x' = x + \lambda e_i$, где e_i — вектор, все координаты которого равны нулю, кроме i-й, которая равна единице. В силу слабой монотонности предпочтений $x' \in V_{\bar{u}}$ для любого $\lambda \geq 0$. Рассмотрим стоимость набора x' при ценах $p^* : p^* x' = p^* x + \lambda p_i^*$. Заметим, что последнее слагаемое отрицательно и, увеличивая λ, мы можем сделать его сколь угодно большим (по модулю). В результате при достаточно большом λ мы получим $p^* x' < p^* \tilde{x}$, что противоречит тому, что $x' \in V_{\bar{u}}$. Таким образом, мы показали, что $p^* \geq 0$.

Докажем, что существует разделяющая гиперплоскость, нормаль которой имеет только положительные координаты, т.е. существует $p' >> 0$ такой, что для любого $x \in V_{\bar{u}}$ имеем $p' x > p' \tilde{x}$. Построим p' на основе p^*, увеличив все нулевые координаты вектора p^* (если таковые окажутся) на $\varepsilon > 0$.

Если соответствующие координаты вектора $\tilde{x}$ также нулевые, то $p' x \geq p^* x > p^* \tilde{x} = p^* \tilde{x} + \varepsilon \cdot 0 = p' \tilde{x}$ для любого $x \in V_{\bar{u}}$.

Пусть существует $\tilde{x}_i > 0$ и $p_i^* = 0$. Покажем, что всегда можно выбрать ε достаточно маленьким, чтобы выполнялось условие $p' x > p' \tilde{x}$ для любого $x \in V_{\bar{u}}$. Поскольку для любого $x \in V_{\bar{u}}$ имеем $p^* x > p^* \tilde{x}$, то найдется число $c > 0$ такое, что $p^* x > p^* \tilde{x} + c$ для любого $x \in V_{\bar{u}}$. Положим $\varepsilon = \dfrac{0{,}5c}{\sum_i \tilde{x}_i} > 0$, тогда для любого $x \in V_{\bar{u}}$ имеем

$$p'x > p^*x > p^*\tilde{x} + c > p^*\tilde{x} + \sum_i \varepsilon\tilde{x}_i = p'\tilde{x}.$$

Итак, для любого $x \in V_{\bar{u}}$ имеем $p'x > p'\tilde{x}$ и $p' >> 0$. Пусть x' дает минимальные расходы при ценах $p' >> 0$ на множестве $V_{\bar{u}}$. Это означает, что $x' \in V_{\bar{u}}$ и $p'x' = e(p', \bar{u})$. Поскольку $x' \in V_{\bar{u}}$, то $p'x' > p'\tilde{x}$, т.е. $e(p', \bar{u}) > p'\tilde{x}$, а это противоречит тому, что $\tilde{x} \in \tilde{V}_{\bar{u}}$. Полученное противоречие доказывает, что $\tilde{V}_{\bar{u}} \subset V_{\bar{u}}$. Это вместе с доказанным ранее включением $V_{\bar{u}} \subset \tilde{V}_{\bar{u}}$ означает, что $V_{\bar{u}} = \tilde{V}_{\bar{u}}$. ■

Используя доказанное утверждение о соотношении исходного множества $V_{\bar{u}}$ и восстановленного $\tilde{V}_{\bar{u}}$, мы можем еще раз вернуться к рассмотренному выше примеру невыпуклых предпочтений, изображенных на рис. 5.2. Как видим, все «лишние» точки множества $V_{\bar{u}}$ (точки из горизонтально заштрихованной области) появились в силу того, что они не могут быть отделены от множества $V_{\bar{u}}$ никакой гиперплоскостью.

Однако проблемы могут возникнуть не только в силу невыпуклости предпочтений, но и при отсутствии слабой монотонности предпочтений. Продемонстрируем это с помощью рис. 5.3. Рассмотрим, к примеру, точку x^*. Эта точка не принадлежит множеству $V_{\bar{u}}$, но она будут принадлежать восстановленному множеству. Это объясняется тем, что точка x^* может быть отделена от множества $V_{\bar{u}}$ лишь прямой с положительным наклоном, а это значит, что никакие неотрицательные цены не могут породить такую прямую.

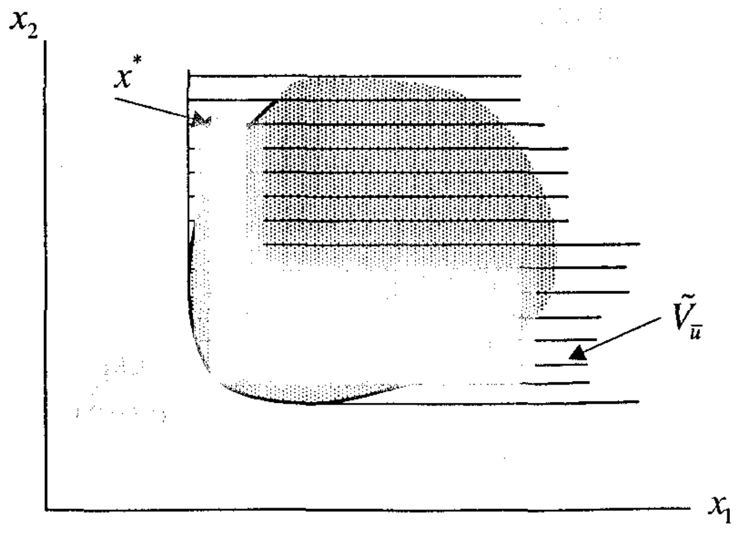


Рис. 5.3. Различие между истинными и восстановленными предпочтениями при немонотонности предпочтений

Итак, мы показали, что по функции расходов мы можем восстановить множество $\tilde{V}_{\bar{u}}$. Если предпочтения выпуклы и слабо монотонны, то восстановленное множество в точности совпадет с истинным, а значит, мы восстановим предпочтения потребителя. Но даже в том случае, когда в силу невыпуклости и (или) немонотонности предпочтений нам не удается в точности восстановить исходное множество $V_{\bar{u}}$, с точки зрения экономического выбора возникающие расхождения не имеют значения, поскольку выбор потребителя ни при каких ценах не может находиться в невосстановленных областях. В этом нас убеждает тот факт, что восстановленные предпочтения порождают ту же функцию расходов, что и истинные предпочтения потребителя.

Наконец, исследуем такой вопрос. Рассмотрим произвольную функцию, удовлетворяющую всем свойствам функции расходов. Можно ли утверждать, что эта функция действительно будет являться функцией расходов какого-то потребителя? Рассмотрим предпочтения, представимые восстановленным по данной функции множеством $\tilde{V}_u$, и покажем, что эта функция будет давать минимальные расходы на этом множестве.

Утверждение 5.2. Восстановление предпочтений по функции расходов.

Пусть $e(p, u)$ — непрерывная функция, возрастающая по u, однородная первой степени, вогнутая и дифференцируемая по p, тогда $e(p, u)$ является функцией расходов для предпочтений, описываемых множествами $\tilde{V}_u$, т.е.

$$e(p, u) = \min_{x \in \tilde{V}_u} px, \text{ где } \tilde{V}_u = \{x \in R_+^N : px \geq e(p, u) \ \forall \ p >> 0\}.$$

Доказательство

Не будем приводить доказательство, поскольку позже докажем аналогичное утверждение в теории производства.

Лекция 6

Измерение изменений в благосостоянии потребителя. Агрегирование в теории потребителя

Измерение изменений в благосостоянии потребителя

При анализе экономической политики часто требуется оценить, как та или иная мера отразится на благосостоянии потребителей. В курсах микроэкономики промежуточного уровня в качестве меры благосостояния использовалась концепция потребительского излишка. Однако, как будет показано ниже, эта концепция является точной мерой благосостояния только для случая квазилинейных предпочтений. Как же измерить изменение в благосостоянии потребителя для произвольных предпочтений? Как мы помним, функция полезности была введена как функция, позволяющая нам упорядочить потребительские наборы. Само же изменение уровня полезности указывает лишь на то, выиграл или проиграл потребитель от проводимой политики, но не позволяет оценить размер выигрыша или потерь.

Тем не менее можно разными способами измерить изменения в благосостоянии на основе специальных (измеренных в деньгах) функций полезности. Это измерение удобно охарактеризовать в терминах описанной в предыдущих лекциях теории двойственности. Поскольку нас интересует денежный измеритель полезности, то попытаемся для построения соответствующей оценки использовать известное нам соотношение двойственности, которое связывает косвенную функцию полезности и функцию расходов. Для каждого уровня полезности мы можем определить минимальные расходы, которые необходимы для достижения данного уровня полезности при некоторых ценах, и далее вместо сопоставления уровней полезности мы сможем сопоставлять соответствующие минимальные расходы, определенные при одних и тех же ценах.

Например, рассмотрим экономическую политику, в результате которой вектор цен изменился от p^0 до p^1, а доход потребителя остался прежним. Мы можем оценить соответствующее изменение благосостояния потребителя в неких постоянных ценах, которые обозначим через $\bar{p}$, как разницу расходов: $e\left(\bar{p},\, v(p^1,\, I)\right) - e\left(\bar{p},\, v(p^0,\, I)\right)$. Полученная мера несвободна от недостатков. Очевидно, что в общем случае, беря в качестве цен сопоставления $\bar{p}$ разные вектора цен, мы будем получать разные оценки изменения благосостояния. Принято в качестве цен сопоставления выбирать либо исходный вектор цен p^0, либо финальный вектор цен p^1.

В зависимости от того, какой именно из двух рассмотренных выше векторов цен будет использоваться в качестве цен сопоставления, мы получим две меры благосостояния, которые носят названия *эквивалентной* и *компенсирующей* вариации.

Итак, выбирая в качестве сопоставимых цен исходные цены p^0, мы ищем ответ на следующий вопрос: какое изменение в доходе будет для потребителя эквивалентно данному изменению цен, т.е. изменит благосостояние потребителя так же, как оно изменилось в силу изменения цен. Ответом на этот вопрос является изменение в доходе, называемое *эквивалентной вариацией* (сокращенно *EV* — от английского *equivalent variation*):

$$EV(p^0,\, p^1,\, I) = e\left(p^0,\, v(p^1,\, I)\right) - e\left(p^0,\, v(p^0,\, I)\right) = e\left(p^0,\, v(p^1,\, I)\right) - I.$$

Используя в качестве сопоставимых цен новые цены p^1, мы отвечаем на вопрос, какое изменение в доходе вернет потребителя к первоначальному уровню благосостояния при новых ценах. Ответом на этот вопрос является изменение в доходе, называемое *компенсирующей вариацией* (сокращенно *CV* — от английского *compensating variation)*:

$$CV(p^0,\, p^1,\, I) = e\left(p^1,\, v(p^1,\, I)\right) - e\left(p^1,\, v(p^0,\, I)\right) = I - e\left(p^1,\, v(p^0,\, I)\right).$$

Проиллюстрируем приведенные определения компенсирующей и эквивалентной вариаций дохода графически для случая двух товаров. Итак, пусть цена второго товара фиксирована, а цена первого товара падает: $p_1^1 < p_1^0$. В результате, как показано на рис. 6.1, благосостояние потребителя улучшается: потребитель перемещается с кривой безразличия u^0 на кривую $u^1 > u^0$. Для того чтобы найти эквивалентную вариацию, проведем касательную к новой кривой безразличия при старых ценах. Вертикальное расстояние между первоначальным бюджетным ограничением и построенной касательной даст нам эквивалентную вариацию в терминах второго товара. Теперь построим касательную к старой кривой безразличия при новых ценах. Вертикальное расстояние между бюджетным ограничением после изменения цены и построенной касательной даст нам компенсирующую вариацию в терминах второго товара.

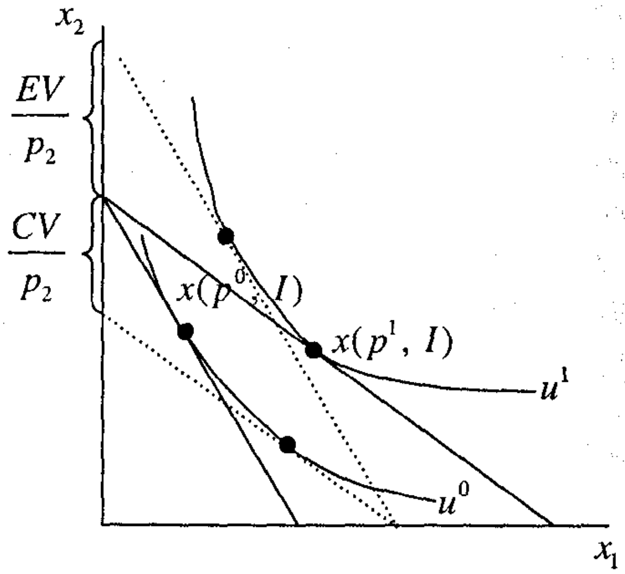


Рис. 6.1. Эквивалентная и компенсирующая вариации как меры изменения благосостояния потребителя, вызванного снижением цены первого товара

Рассмотренные выше оценки изменения благосостояния потребителя можно изобразить и на другом графике в случае, когда изменяется цена лишь одного из товаров. Воспользовавшись леммой Шепарда, можно представить CV и EV как площади под соответствующими кривыми компенсированного спроса. Действительно, рассмотрим случай N товаров и предположим, что изменяется цена лишь одного товара, скажем i-го, а цены остальных остаются прежними: $p_i^1 \neq p_i^0$, $p_j^1 = p_j^0$ для всех $j \neq i$. Обозначив величину $v(p^0, I)$ через u^0, запишем лемму Шепарда для i-го товара:

$$\frac{\partial e(p, u^0)}{\partial p_i} = h_i(p, u^0).$$

Проинтегрировав по цене i-го товара от p_i^1 до p_i^0, найдем

$$\int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p,\ u^0)dp_i = \int_{p_i^1}^{p_i^0} \frac{\partial e(p,\ u^0)}{\partial p_i}dp_i = e(p^0,\ u^0) - e(p^1,\ u^0) = CV.$$

Компенсирующую вариацию можно представить как площадь под кривой компенсированного спроса, соответствующей исходному уровню полезности, лежащую между новой и исходной ценой i-го товара. Аналогично, записав лемму Шепарда для нового уровня полезности $u^1 = v(p^1,\ I)$ и проинтегрировав, получим выражение для эквивалентной вариации:

$$\int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p,\ u^1)dp_i = \int_{p_i^1}^{p_i^0} \frac{\partial e(p,\ u^1)}{\partial p_i}dp_i = e(p^0,\ u^1) - e(p^1,\ u^1) = EV.$$

Таким образом, мы можем представить эти вариации графически. Пусть цена товара i падает (причем этот товар потребляется в положительном количестве), тогда $u^1 > u^0$. Соответствующие эквивалентная и компенсирующая вариации представлены на рис. 6.2.

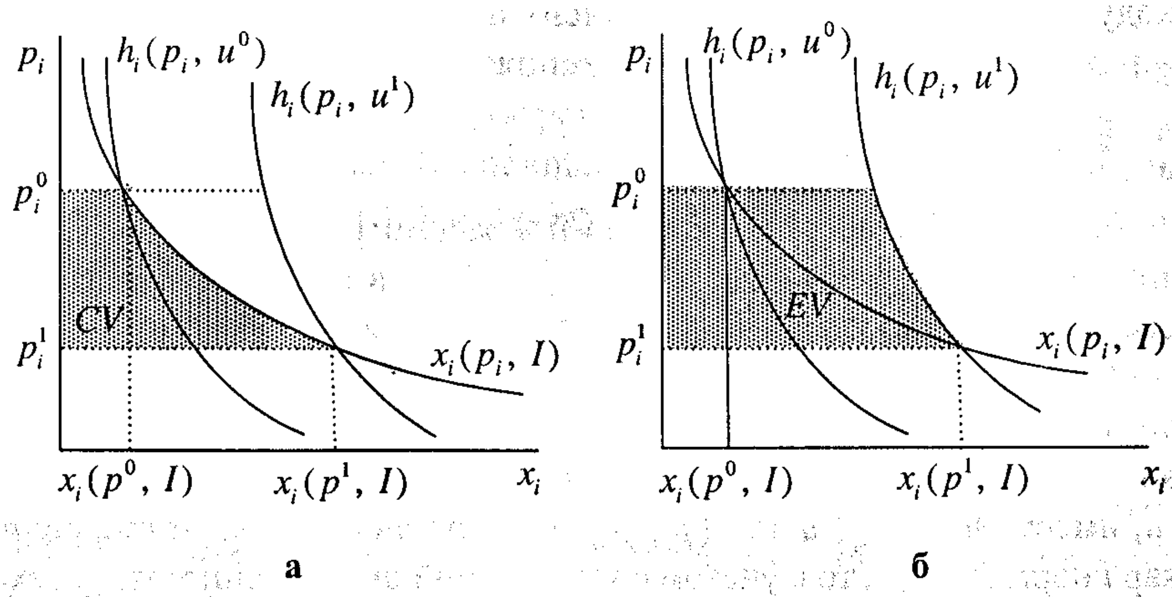


Рис. 6.2. **Компенсирующая (а) и эквивалентная (б) вариации как меры изменения благосостояния потребителя, вызванного снижением цены i-го товара при $p_j^1 = p_j^0,\ j \neq i$**

Сопоставляя рисунки 6.2а и 6.2б, мы видим, что эквивалентная вариация для рассматриваемого случая оказалась больше компенсирующей вариации. Всегда ли это так? Попытаемся сопоставить эквивалентную и компенсирующую вариации в общем случае. В основе данного сопоставления будет лежать теория двойственности.

Утверждение 6.1. Соотношение между эквивалентной и компенсирующей вариациями.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная строго квазивогнутая функция полезности, представляющая локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R^N_+$. Пусть цены всех товаров кроме i-го фиксированы ($p_{-i} = \bar{p}_{-i}$), а цена i-го товара изменяется от p_i^0 до $p_i^1 < p_i^0$, причем $x_i(p_i^0, \bar{p}_{-i}) > 0$ и $x_i(p_i^1, \bar{p}_{-i}) > 0$. Тогда:

1) $CV(p^0, p^1, I) < EV(p^0, p^1, I)$, если товар i — нормальный при $p_i \in [p_i^1, p_i^0]$, $\bar{p}_{-i}$ и доходе I;

2) $CV(p^0, p^1, I) > EV(p^0, p^1, I)$, если товар i — инфериорный при $p_i \in [p_i^1, p_i^0]$, $\bar{p}_{-i}$ и доходе I;

3) $CV(p^0, p^1, I) = EV(p^0, p^1, I)$, если товар i — нейтральный к доходу (т.е. спрос на товар не зависит от дохода) при $p_i \in [p_i^1, p_i^0]$, $\bar{p}_{-i}$ и доходе I.

Доказательство

Зафиксируем все цены кроме i-й и рассмотрим изменение (снижение) цены i-го товара от p_i^0 до p_i^1. Тогда, в силу невозрастания косвенной функции полезности по ценам имеем $u^1 =$ $= v(p_i^1, \bar{p}_{-i}, I) \geq v(p_i^0, \bar{p}_{-i}, I) = u^0$, причем неравенство будет строгим, если потребление i-го товара было отлично от нуля, а предпочтения локально ненасыщаемы. Учитывая, что функция расходов возрастает по u, имеем $e(p_i, \bar{p}_{-i}, u^1) > e(p_i, \bar{p}_{-i}, u^0)$ для любого p_i. Тогда, если товар i нормальный, то с учетом соотношений двойственности имеем

$$h_i(p_i, \bar{p}_{-i}, u^1) = x_i\left(p_i, \bar{p}_{-i}, e(p_i, \bar{p}_{-i}, u^1)\right) > x_i\left(p_i, \bar{p}_{-i}, e(p_i, \bar{p}_{-i}, u^0)\right) =$$
$$= h_i(p_i, \bar{p}_{-i}, u^0).$$

Проинтегрировав это неравенство от p_i^1 до $p_i^0 > p_i^1$, найдем соотношения между CV и EV:

$$CV = \int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p_i, \overline{p}_{-i}, u^0)dp_i < \int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p_i, \overline{p}_{-i}, u^1)dp_i = EV.$$

Итак, при снижении цены нормального товара компенсирующая вариация меньше эквивалентной. Поскольку эти неравенства были выведены на основе реакции маршалловского спроса на изменение дохода, то для случая инфериорного товара мы получим обратные соотношения для мер благосостояния: $CV > EV$. Если же эффект дохода отсутствует, то маршалловский спрос на данный товар при разных уровнях дохода будет одинаков и в результате компенсирующая вариация совпадет с эквивалентной. Такая ситуация будет иметь место в случае квазилинейных предпочтений при достаточно большом доходе в отношении всех благ, кроме товара-измерителя, входящего линейно в функцию полезности. ■

Агрегирование в теории потребителя

Рассмотрев в предыдущих лекциях поведение индивидуального спроса, мы подошли к вопросу об агрегировании спроса отдельных потребителей в совокупный (рыночный) спрос. Определим совокупный спрос на каждый товар как сумму индивидуальных величин спроса всех потребителей:

$$x(p, I^1, I^2, \ldots, I^M) = \sum_{k=1}^{M} x^k(p, I^k),$$

где k — индекс потребителя.

После построения агрегированного спроса нас будет интересовать, унаследует ли совокупный спрос свойства индивидуального спроса. В частности выделим следующие три вопроса, которые будут лежать в центре нашего дальнейшего анализа.

1. При каких условиях совокупный спрос может быть представлен как функция цен и суммарного дохода потребителей:

$x(p, \sum_{k=1}^{M} I^k) \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{M} x^k(p, I^k)$? Этот вопрос интересен с точки зрения эконометрических исследований, поскольку дизагрегированные данные по доходам и соответствующему им спросу зачастую отсутствуют. Поэтому необходимо понять, можно ли использовать агрегированные данные при построении функций спроса.

2. При каких условиях совокупный спрос будет удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений, т.е. унаследует ли совокупный спрос это свойство индивидуального спроса?

3. При каких условиях совокупный спрос является спросом некоего фиктивного потребителя, которого мы будем называть *репрезентативным* потребителем. И кроме того, если такой репрезентативный потребитель существует, то можно ли использовать его предпочтения для анализа изменений в благосостоянии (последствий изменений цен)? Это вопрос важен потому, что современная макроэкономика фактически целиком построена на предпосылке о существовании репрезентативного потребителя. Необходимо определить, насколько ограничителен подобный подход.

1. Агрегированный спрос как функция от совокупного дохода

Для того чтобы совокупный спрос был представим как функция от суммарного дохода потребителей $x(p, \sum_{k=1}^{M} I^k) = \sum_{k=1}^{M} x^k(p, I^k)$ необходимо, чтобы перераспределение доходов между потребителями не влияло на совокупный спрос. На первый взгляд может показаться, что, если бы потребители имели одинаковые предпочтения, то это было бы так. Следующий пример для случая двух потребителей показывает, что даже при одинаковых предпочтениях перераспределение доходов не обязано быть нейтральным по отношению к совокупному спросу.

Итак, рассмотрим экономику с двумя товарами и двумя потребителями. При некоторых ценах изобразим кривую «доход — потребление» (см. рис. 6.3). Каждая точка на этой кривой соответствует оптимальному потребительскому набору при заданных ценах и некотором уровне дохода. Поскольку потребители имеют одинаковые предпочтения и различаются лишь доходами, то они находятся в разных точках этой кривой. Пусть выбор первого потребителя представлен точкой A, а второго — точкой B. Рассмотрим некое перераспределение доходов между этими участниками: пусть доход первого потребителя растет, а доход второго потребителя сокращается ровно на такую же величину. Как мы видим, с ростом дохода первый потребитель начинает приобретать больше второго товара и практически не изменяет потребление первого. Второй потребитель, напротив, резко сокращает потребление первого товара, практически не меняя при этом потребление второго. Это приводит к тому, что совокупный спрос на первый товар падает, а на второй растет. Таким образом, даже при одинаковых предпочтениях перераспределение доходов повлияло на совокупный спрос.

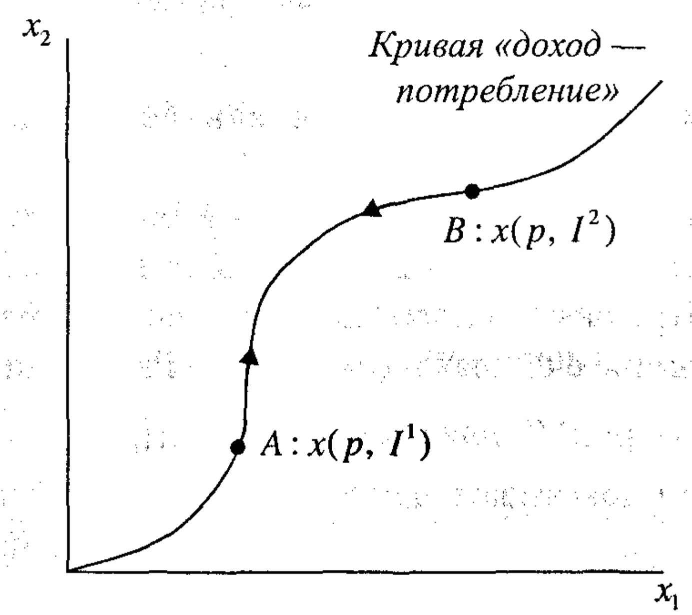


Рис. 6.3. Перераспределение доходов не является нейтральным по отношению к совокупному спросу даже при одинаковых предпочтениях потребителей

Какие условия могли бы гарантировать нейтральность совокупного спроса к перераспределению доходов? Для ответа на этот вопрос рассмотрим изменение совокупного спроса на i-й товар, вызванное (дифференциально) малым перераспределением доходов:

$$dx_i(p, I^1, I^2, \ldots, I^M) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial x_i^k(p, I^k)}{\partial I^k} dI^k, \text{ где } \sum_{k=1}^{M} dI^k = 0.$$

Заметим, что в случае одинаковой для всех потребителей чувствительности спроса к доходу мы действительно получили бы желаемый результат: если $\frac{\partial x_i^k(p, I^k)}{\partial I^k} = \alpha_i$ для всех $k = 1, 2, \ldots, M$, то

$$dx_i(p, I^1, I^2, \ldots, I^M) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial x_i^k(p, I^k)}{\partial I^k} dI^k = \alpha_i \sum_{k=1}^{M} dI^k = 0.$$

Графически условие $\frac{\partial x_i^k(p, I^k)}{\partial I^k} = \alpha_i$ для всех $k = 1, 2, \ldots, M$ означает, что имеет место параллельность кривых «доход — потребление» для всех потребителей.

Утверждение 6.2. Условие параллельности кривых «доход — потребление».

Кривые «доход — потребление» для разных потребителей параллельны при любых ценах и доходах тогда и только тогда, когда предпочтения потребителей порождают косвенную функцию полезности формы Гормана с одинаковыми коэффициентами при доходах: $v^k(p, I^k) = \alpha^k(p) + \beta(p) I^k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, M$.

Мы не будем доказывать данное утверждение. Укажем только, что достаточность данного свойства устанавливается на основе тождества Роя.

Таким образом, гарантировать зависимость совокупного спроса от совокупного дохода можно лишь при очень сильном ограничении на предпочтения потребителей. При проведении эконометрических исследований зачастую доступны данные не только об агрегированном (среднем) доходе, но и о некоторых дополнительных характеристиках распределения доходов, например о дисперсии. В этом случае можно скорректировать сам подход, т.е. рассмотреть условия, при которых совокупный спрос будет функцией не только от среднего, но и от дисперсии доходов. Наличие дополнительной информации о распределении доходов, возможно, позволило бы расширить класс предпочтений за рамки представленного выше.

Вместе с тем рассмотрение механизма формирования доходов в явном виде часто позволяет достаточно сильно ограничить допустимые варианты перераспределения доходов, относительно которых нам хотелось бы получить нейтральность совокупного спроса. Например, в моделях общего равновесия каждый потребитель владеет некоторым первоначальным запасом и долей в прибыли фирм. В результате его доход оказывается некой функцией от цен, что ограничивает возможные варианты перераспределения доходов.

2. Агрегированный спрос и слабая аксиома выявленных предпочтений

Как известно, слабая аксиома выявленных предпочтений позволяет нам говорить о рациональности поведения потребителя, т.е. о согласованности его выбора в разных ситуациях. Будет ли совокупный спрос удовлетворять слабой аксиоме, если он порожден индивидуальными функциями спроса, которые удовлетворяют этой аксиоме?

Напомним формулировку слабой аксиомы.

Определение

Функция совокупного спроса $x(p, I)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, если $px(p', I') \leq I$ и $x(p, I) \neq x(p', I')$ означает, что $p'x(p, I) > I'$ для любых (p, I) и (p', I'). □

Построим простой пример с двумя потребителями и двумя товарами, демонстрирующий, что для произвольных предпочтений слабая аксиома при агрегировании не наследуется автоматически. Итак, рассмотрим двух потребителей (A и B) с одинаковыми доходами, но разными предпочтениями. Изобразим на рис. 6.4 выбор каждого потребителя в двух ситуациях: при ценах p и доходе I и при ценах p' и доходе I'. Выбор потребителя A изображен квадратиками, выбор потребителя B — кружочками. Как мы видим, индивидуальный спрос каждого участника удовлетворяет слабой аксиоме. На этом же рисунке крестиками изображен совокупный спрос как средний потребительский набор двух участников в каждой ситуации. При сопоставлении этих усредненных потребительских наборов мы видим, что первый был доступен, когда выбирался второй, и наоборот. Таким образом, в данном примере слабая аксиома не выполняется для усредненного совокупного спроса, а значит, не выполняется и для совокупного спроса.

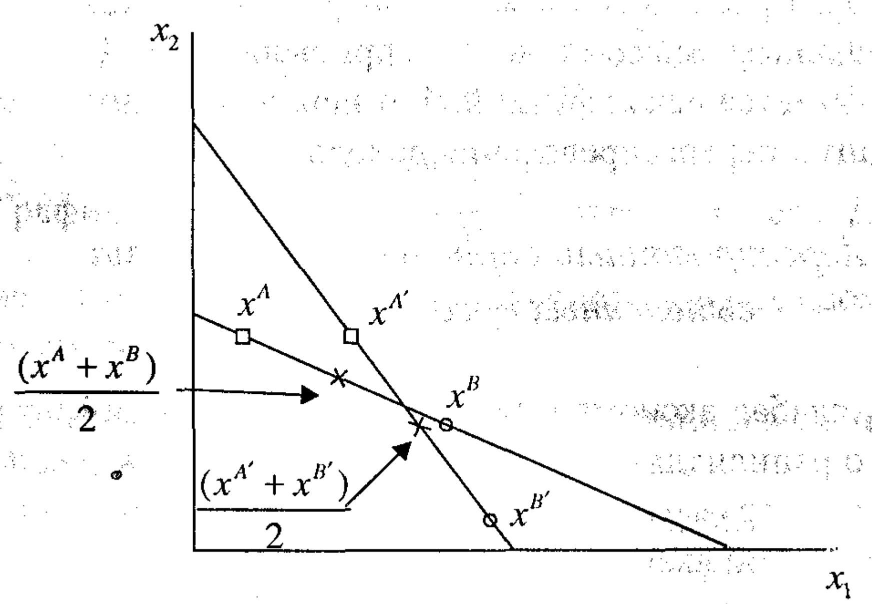


Рис. 6.4. Нарушение слабой аксиомы для совокупного спроса

Почему же аксиома выявленных предпочтений, вообще говоря, не наследуется при агрегировании спроса? Попробуем проанализировать изменение спроса, разбив его на эффект дохода и эффект замещения. На рис. 6.5 видно, что эффекты замещения (*SE*) сдвигают совокупный спрос в нужную сторону, а эффекты дохода разнонаправлены, что в итоге и приводит к нарушению слабой аксиомы. Рассмотрим ситуацию с «упорядоченными» эффектами дохода.

Изобразим графически случай гомотетичных предпочтений (см. рис. 6.6). Используя тот факт, что при гомотетичных предпочтениях кривые «доход — потребление» — это прямые, выходящие из начала координат, мы можем по точкам первоначального выбора $x^A(p, I)$ и $x^B(p, I)$ схематично изобразить выбор при новых ценах и доходах

$x^A(p', I')$ и $x^B(p', I')$. Для этого достаточно изобразить эффекты замещения по Слуцкому, а затем получить эффекты дохода (IE), сдвигаясь вдоль соответствующего луча. Заметим, что даже в отсутствии эффектов замещения эффекты дохода сдвигали бы совокупный спрос в нужном направлении. В результате такой упорядоченности эффектов дохода совокупный спрос удовлетворяет слабой аксиоме.

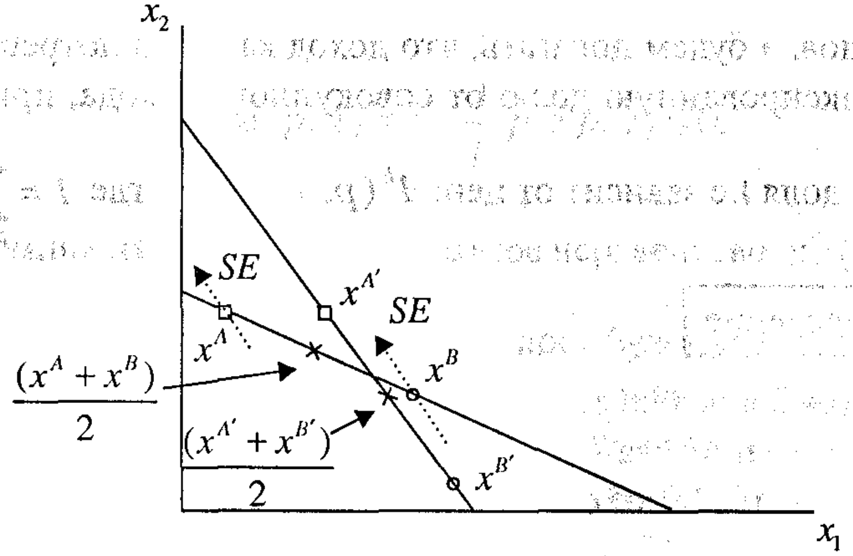


Рис. 6.5. Причина нарушения слабой аксиомы для совокупного спроса в хаотичном поведении эффектов дохода

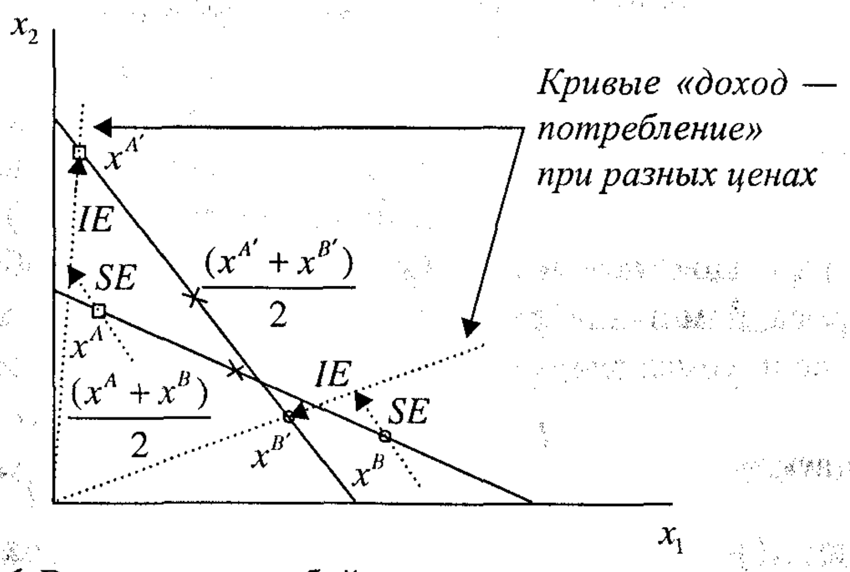


Рис. 6.6. Выполнение слабой аксиомы для совокупного спроса при гомотетичных предпочтениях

Итак, графический анализ навел нас на мысль, что корень проблемы в том, что эффекты дохода могут действовать в направлении, противоположном эффектам замещения. Наложим некоторые ограничения на поведение эффектов дохода, а именно: рассмотрим, будет ли выполняться слабая аксиома в случае, когда совокупный спрос удовлетворяет закону спроса.

В дальнейшем будем рассматривать не произвольные распределения доходов, а будем полагать, что доход каждого потребителя составляет фиксированную долю от совокупного дохода, причем считая, что эта доля не зависит от цен: $I^k(p, I) = \alpha^k I$, где $I = \sum_{k=1}^{M} I^k$.

Определение

Функция спроса $x(p, I)$ удовлетворяет закону спроса, если для любых цен p, p' и дохода I имеет место $(p' - p)\big(x(p', I) - x(p, I)\big) \le 0$, причем неравенство будет строгим, если $x(p, I) \ne x(p', I)$. □

Утверждение 6.3. Условие наследования слабой аксиомы при агрегировании.

Если функции агрегированного спроса удовлетворяют закону спроса, то агрегированный спрос удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

Доказательство

Рассмотрим (p, I) и (p', I') такие, что $x(p, I) \ne x(p', I')$ и $px(p', I') \le I$. Покажем, что $p'x(p, I) > I'$. Для того чтобы применить закон спроса, нам нужно рассматривать неизменный доход.

Воспользуемся тем, что спрос однородный нулевой степени, и рассмотрим вектор цен $\tilde{p} = \frac{I}{I'} p'$, тогда $x(\tilde{p}, I) = x(\frac{I'}{I}\tilde{p}, \frac{I'}{I} I) = x(p', I')$.

Поскольку $x(p, I) \ne x(\tilde{p}, I)$, то из закона спроса получаем $(\tilde{p} - p)\big(x(\tilde{p}, I) - x(p, I)\big) < 0$. Преобразуем левую часть неравенства:

$$(\tilde{p} - p)\big(x(\tilde{p}, I) - x(p, I)\big) = \tilde{p}x(\tilde{p}, I) - px(\tilde{p}, I) - \tilde{p}x(p, I) + px(p, I).$$

Поскольку $\tilde{p}x(\tilde{p}, I) = I$ и $px(p, I) = I$ и, кроме того, по условию $px(\tilde{p}, I) = px(p', I') \le I$, то имеем

$$0 \ge (\tilde{p} - p)\big(x(\tilde{p}, I) - x(p, I)\big) =$$
$$= I - px(\tilde{p}, I) + I - \tilde{p}x(p, I) \ge I - \tilde{p}x(p, I).$$

С учетом определения $\tilde{p}$ полученное неравенство можно переписать как

$$I - \tilde{p}x(p, I) = I - \frac{I}{I'}p'x(p, I) \le 0,$$

откуда, домножив на $\frac{I'}{I}$, имеем искомое неравенство $p'x(p, I) > I'$. ■

В каких же случаях совокупный спрос будет удовлетворять закону спроса? Во-первых, в отличие от слабой аксиомы, закон спроса наследуется при агрегировании, т.е., если индивидуальный спрос каждого участника удовлетворяет закону спроса, то и совокупный спрос будет удовлетворять закону спроса. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно просто просуммировать соответствующее соотношение (закон спроса) по всем индивидуумам. Однако даже если для каких-то участников закон спроса не выполняется на индивидуальном уровне, это еще не означает, что закон спроса не выполняется для совокупного спроса, поскольку он может появиться в результате агрегирования.

Заметим, что полученный нами результат опирался на предположение о независимости распределения доходов от цен. В действительности это не обязательно так. Например, в моделях общего равновесия распределение доходов является функцией цен. В этих случаях совокупный спрос может не удовлетворять слабой аксиоме, даже если имеет место закон спроса на индивидуальном уровне.

3. Агрегированный спрос и анализ благосостояния

Последний вопрос, на котором мы остановимся в связи с агрегированием спроса, связан с существованием репрезентативного потребителя. Итак, предположим, что функции агрегированного спроса удовлетворяют слабой аксиоме. Можно ли в этом случае гарантировать, что этот спрос является решением задачи для некоторого фиктивного потребителя, которого принято называть (позитивным) репрезентативным потребителем? Этот вопрос схож с проблемой восстановления предпочтений на основе функции маршалловского спроса, которую мы обсуждали в лекции 5. Как мы знаем, при некоторых технических ограничениях на функции спроса ответ на данный вопрос положителен. Стоит правда отметить, что слабой аксиомы для этого недостаточно. Необходимо, чтобы совокупный спрос удовлетворял сильной аксиоме выявленных предпочтений.

Предположим, что нам удалось найти предпочтения, порождающие совокупный спрос. Можем ли мы использовать эти предпочтения для анализа благосостояния, т.е. будет ли позитивный репрезентативный потребитель являться нормативным репрезентативным потребителем? Очевидно, что вопрос о нормативном репрезентативном потребителе тесно связан с функцией общественного благосостояния, которая позволяет нам оценивать благосостояние общества в целом. В силу того что мы можем рассматривать различные функции общественного благосостояния W, предпочтения позитивного потребителя при одной функции W могут соотносить различные экономические политики в точности так, как это делает данная функция, а при другой функции общественного благосостояния ранжирование ситуаций с точки зрения репрезентативного потребителя может вовсе не соответствовать ранжированию с точки зрения общества. Таким образом, вопрос о существовании нормативного репрезентативного потребителя для каждой конкретной функции общественного благосостояния должен решаться отдельно.

Рекомендуемая литература

Основная

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. N.Y.: Oxford University Press, 1995. Ch. 3, 4.

Varian H. Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 7—10.

Дополнительная

Chipman J., Moore J. Compensating Variation, Consumer's Surplus and Welfare // American Economic Review. 1980. 70. P. 933—948.

Deaton A., Muellbauer J. Economics and Consumer Behavior. Cambridge University Press, 1980. Ch. 1—7.

Hausman J. Exact Consumer Surplus and Deadweight Loss // American Economic Review. 1981. 71. P. 662—676.

Jehle G., Reny Ph. Advanced Microeconomic Theory. 2nd ed. Addison-Wesley, 2000. Ch. 1, 2.

Vives X. Small Income Effects: A Marshallian Theory of Consumer Surplus and Downward Sloping Demand // Review of Economic Studies. 1987. 54. P. 87—103.

II

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ ФИРМЫ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Лекция 7

Описание технологий

Изучив поведение потребителя, обратимся к задаче, которую решает производитель. Для анализа поведения производителя необходимо описать множество доступных технологических процессов. В курсе микроэкономики промежуточного уровня предполагалось, что технология фирмы представима производственной функцией. Однако такое описание технологий означает, что все товары с точки зрения фирмы должны быть жестко разделены на выпускаемую продукцию и затрачиваемые факторы производства. Подобное разделение не всегда удобно, поскольку один и тот же товар при одном технологическом процессе может затрачиваться, а при другом — выпускаться. Кроме того, фирма может производить несколько товаров, что также не укладывается в описание технологии с помощью производственной функции.

Любой технологический процесс договоримся представлять с помощью *вектора чистых выпусков*, который будем обозначать через y. Если мы будем, как и ранее, рассматривать экономику, где имеется N товаров и услуг, то y — N-мерный вектор. Если согласно данной технологии фирма производит i-й продукт, то i-я координата вектора y будет положительна. Если же, напротив, i-й продукт затрачивается, то эта координата будет отрицательна. Если некоторый продукт не затрачивается и не выпускается согласно данной технологии, то соответствующая координата вектора будет равна нулю.

Множество всех технологически доступных для данной фирмы векторов чистых выпусков будем называть *производственным множеством* фирмы и обозначать через Y. Обсудим некоторые свойства производственных множеств.

Свойства производственных множеств

1. Производственное множество Y *непусто*. Это означает, что у фирмы есть хоты бы один доступный технологический процесс.

2. Производственное множество Y *замкнуто* (техническое предположение).

3. *Отсутствие «рога изобилия»* (no free lunch): если $y \geq 0$ и $y \in Y$, то $y = 0$. Это свойство означает, что невозможно произвести что-то, не затратив ничего. На рис. 7.1 изображена технология, для которой нарушается это свойство. Как мы видим, например, вектор y^* имеет только положительные координаты. Итак, для того чтобы свойство отсутствия «рога изобилия» соблюдалось, производственное множество не должно содержать точки из первой четверти.

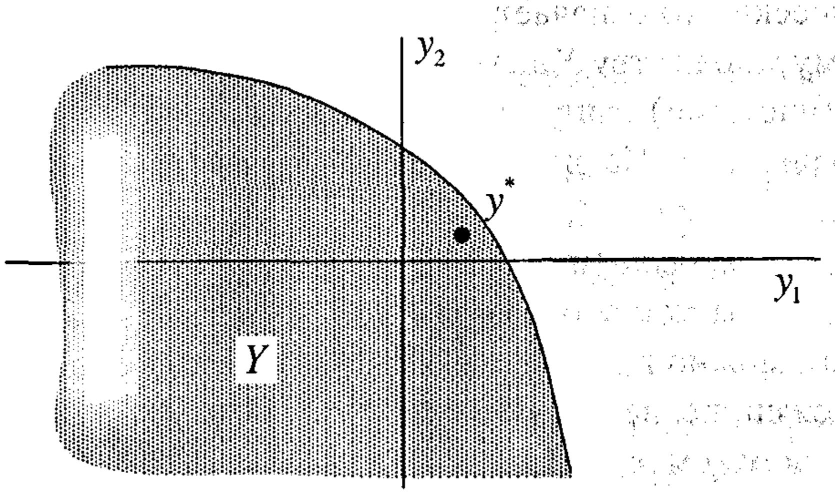


Рис. 7.1. Производственное множество с «рогом изобилия»

4. *Возможность бездействия (ликвидации):* $0 \in Y$. Это не всегда соответствует реальности, поскольку не все сделанные ранее вложения можно вернуть. По подписанным контрактам этого сделать уже нельзя. В этом случае говорят о наличии невозвратных издержек (sunk costs), пример которых изображен на рис. 7.2.

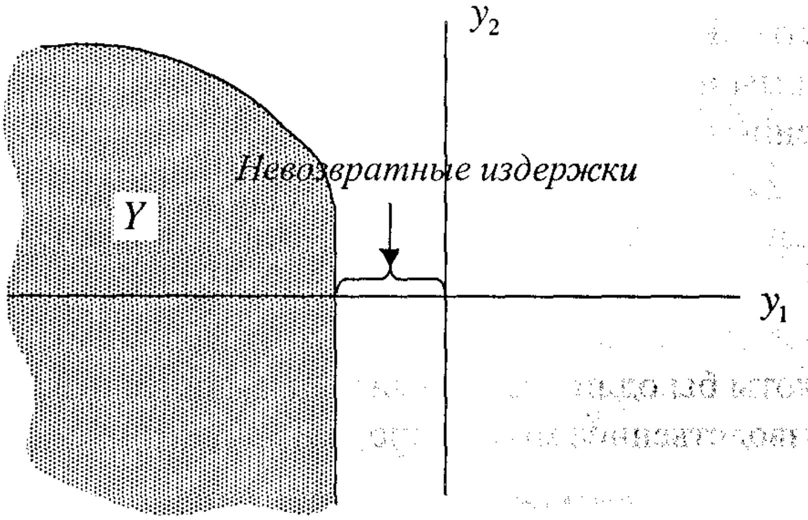
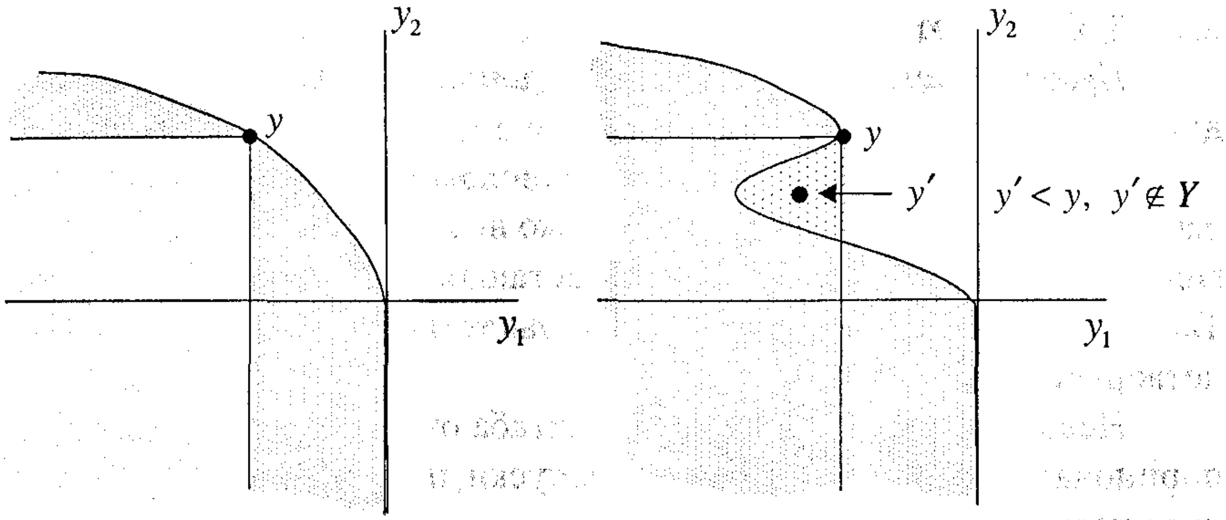


Рис. 7.2. Технология с невозможностью ликвидации

5. *Свобода расходования* (free disposal): если $y \in Y$ и $y' \leq y$, то $y' \in Y$. Это свойство означает, что дополнительное количество ресурсов не сокращает выпуска, т.е. «лишние» ресурсы (или выпуск) можно всегда убрать.

Графически это означает, что вместе с каждой точкой y производственному множеству Y должны принадлежать и все технологии с меньшими (чистыми) выпусками продуктов, т.е. точки $y - R_+^N$, как показано на рис. 7.3а. На рис. 7.3б мы видим нарушение свободы расходования, поскольку $y' \leq y$, но $y' \notin Y$.

6. *Необратимость* (irreversibility): если $y \in Y$ и $y \neq 0$, то $-y \notin Y$. Свойство необратимости означает, что если, скажем, из двух единиц первого блага можно произвести единицу второго, то обратный процесс невозможен, т.е. нельзя из единицы второго блага произвести две единицы первого (см. рис. 7.4).



а б

Рис. 7.3. Свобода расходования выполнена в случае **а** и нарушена в случае **б**

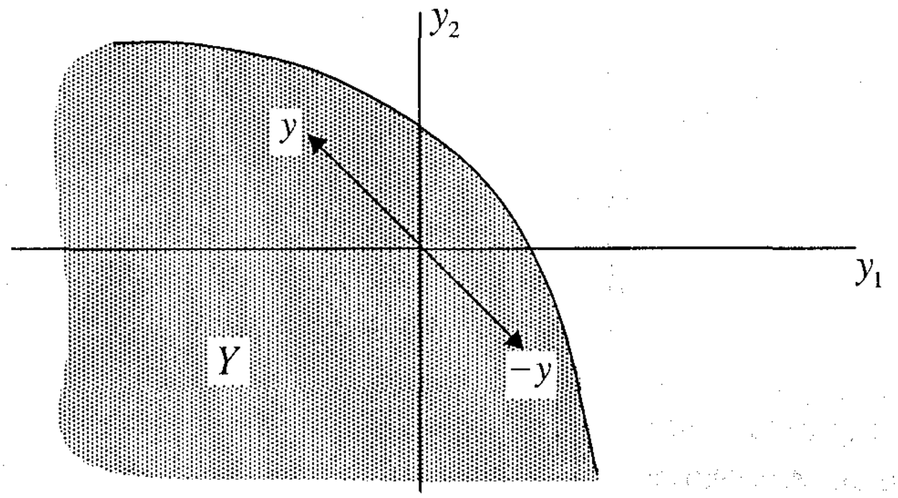


Рис. 7.4. Нарушение необратимости технологического процесса

7. *Выпуклость:* если $y,\ y' \in Y$, то $\alpha y + (1-\alpha)y' \in Y$ для всех $\alpha \in [0,\ 1]$. *Строгая выпуклость:* если $y,\ y' \in Y$ и $y \neq y'$, то $\alpha y + (1-\alpha)y' \in \operatorname{int} Y$ для всех $\alpha \in (0,\ 1)$. Свойство выпуклости позволяет, комбинируя имеющиеся технологии, получать другие доступные технологии.

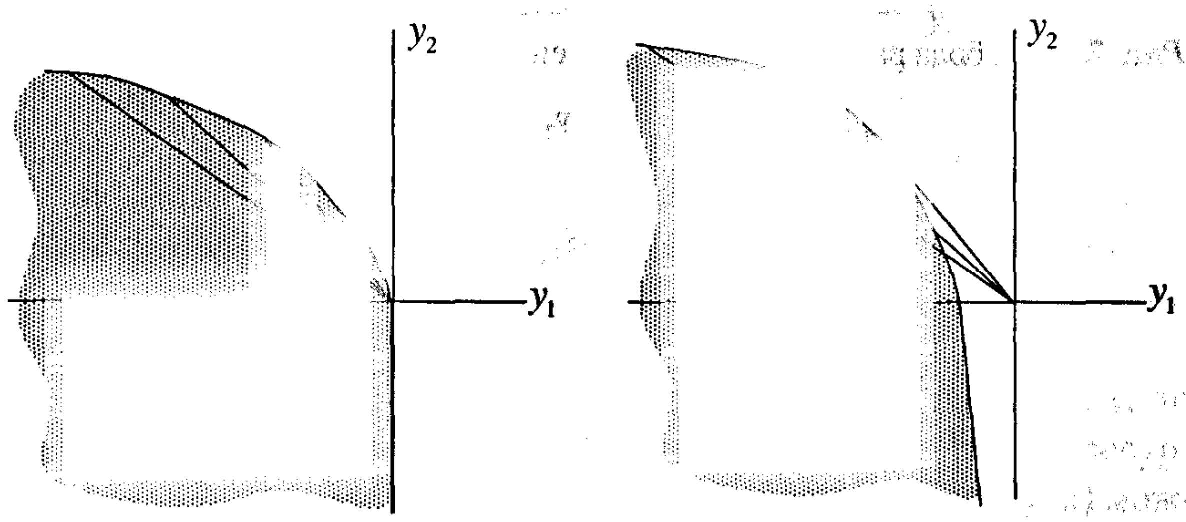
Примеры выпуклых технологий мы видим на рис. 7.2, 7.3а; рис. 7.4 соответствует строго выпуклой технологии; на рис. 7.3б мы видим пример невыпуклой технологии.

8. Отдача от масштаба.

Невозрастающая отдача от масштаба: если $y \in Y$, то $\alpha y \in Y$ для всех $\alpha \in [0,\ 1]$.

На рис. 7.5а приведен пример технологии с невозрастающей отдачей от масштаба. Заметим, что далеко не любая выпуклая технология будет характеризоваться невозрастающей отдачей от масштаба. Так, на рисунке 7.5б изображена выпуклая технология, которая не удовлетворяет этому свойству.

Невозрастающая отдача от масштаба означает, что можно, пропорционально сокращая затраты и выпуски, получить доступный вектор чистых выпусков.



а **б**

Рис. 7.5. Технология на графике **а** характеризуется невозрастающей отдачей от масштаба. Технология на графике **б** не удовлетворяет свойству невозрастающей отдачи от масштаба

Неубывающая отдача от масштаба: если $y \in Y$, то $\alpha y \in Y$ для всех $\alpha \geq 1$. Неубывающая отдача от масштаба позволяет пропорционально увеличивать вектора затрат-выпусков.

Постоянная отдача от масштаба: если $y \in Y$, то $\alpha y \in Y$ для всех $\alpha \geq 0$. Постоянная отдача от масштаба позволяет как пропорционально увеличивать, так и пропорционально сокращать масштабы производства, т.е. производственное множество характеризуется постоянной отдачей от масштаба, если удовлетворяет как свойству неубывающей, так и свойству невозрастающей отдачи от масштаба.

Примеры технологий с неубывающей и постоянной отдачей от масштаба приведены на рис. 7.6.

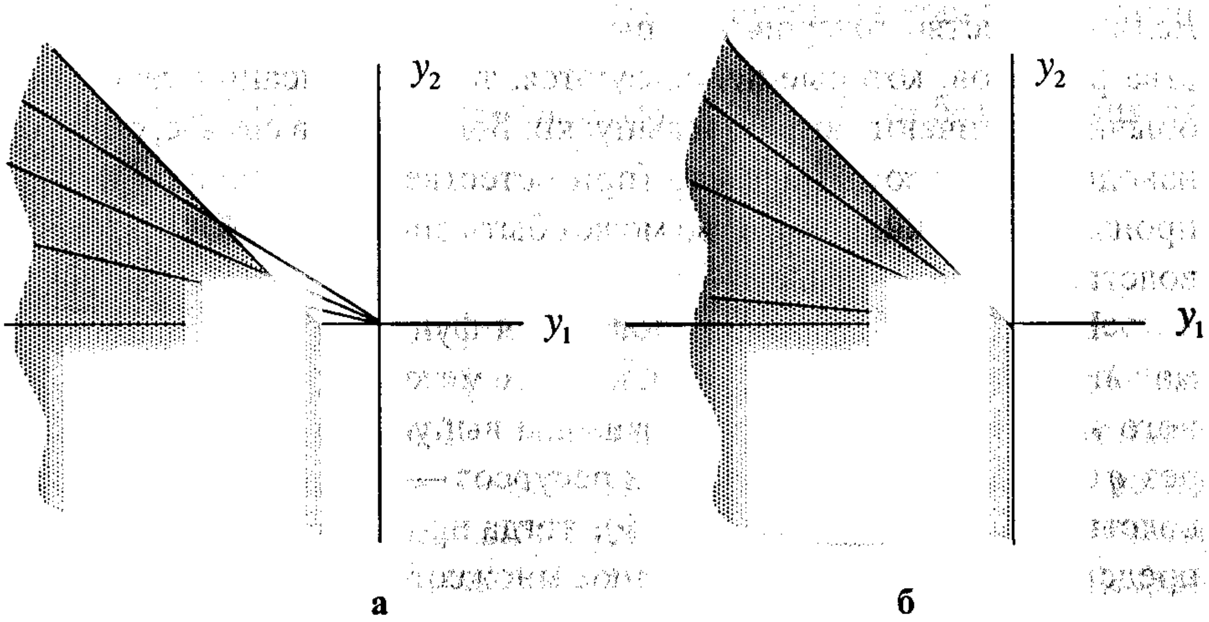


Рис. 7.6. Технология на графике **а** характеризуется неубывающей отдачей от масштаба. Технология на графике **б** демонстрирует постоянную отдачу от масштаба

Следует отметить, что технология не обязана характеризоваться какой-то определенной отдачей от масштаба. Так, к примеру, на рис. 7.5б мы видим производственное множество, которое не подпадает ни под определение невозрастающей, ни под определение неубывающей отдачи от масштаба.

Заметим, что приведенный список свойств производственных множеств в определенном смысле избыточен, т.е. некоторые свойства вытекают из других. Например, из свойств выпуклости и возможности бездействия следует невозрастающая отдача от масштаба. Действительно, в силу возможности бездействия $0 \in Y$, тогда в соответствии с выпуклостью для любого $y \in Y$ имеем $\alpha y = \alpha y + (1-\alpha) \cdot 0 \in Y$ для всех $\alpha \in [0, 1]$.

Связь между свойствами производственных множеств и свойствами производственных функций, представляющих те же технологии

Если множество товаров, которые производятся, отлично от множества ресурсов, которые используются, то при описании технологии обычно различают затраты и выпуски. Более того, в случае, если производится только один товар (при естественных предположениях) производственное множество может быть описано с помощью производственной функции.

Напомним, что производственная функция показывает максимальное количество продукции, которое может быть получено из данного количества ресурсов. Обозначим выпускаемую продукцию через $q \in R$, вектор затрачиваемых ресурсов — через $z \in R_+^{N-1}$, а производственную функцию через $f(\cdot)$, тогда производственная функция, представляющая производственное множество Y, является решением следующей задачи:

$$\max_q \; q$$
$$(-z,\ q) \in Y.$$

Если производственное множество удовлетворяет свойству свободы расходования, то его можно представить в виде

$$Y = \{(-z_1,\ z_2,\ \ldots,\ -z_{N-1},\ q) : q \le f(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{N-1}),\quad z_i \ge 0,\ \forall i\}.$$

Рассмотрим, какие ограничения рассмотренные выше свойства производственных множеств накладывают на соответствующие им производственные функции.

Утверждение 7.1. Свойства производственных множеств и производственных функций.

Пусть производственное множество Y представимо производственной функцией $f(\cdot)$, тогда верно следующее:

1) если Y выпукло, то функция $f(\cdot)$ вогнута;

2) если Y удовлетворяет свойству свободы расходования и $f(\cdot)$ — вогнутая функция, то Y выпукло;

3) если Y выпукло, то функция $f(\cdot)$ непрерывна во внутренних точках области определения;

4) если Y удовлетворяет свойству свободы расходования, то $f(\cdot)$ — неубывающая функция;

5) если Y удовлетворяет свойству отсутствия «рога изобилия», то $f(0) \leq 0$.

6) если Y удовлетворяет свойству возможности бездействия, то $f(0) \geq 0$.

Доказательство

1. Рассмотрим два элемента из производственного множества: $y^1 = \left(-z^1, f(z^1)\right) \in Y$ и $y^2 = \left(-z^2, f(z^2)\right) \in Y$. В силу выпуклости Y вектор $\tilde{y} = \alpha y^1 + (1-\alpha)y^2 \in Y$ для любого $\alpha \in [0, 1]$. Поскольку $\tilde{y} = (-\tilde{z}, \tilde{q})$, где $\tilde{z} = \alpha z^1 + (1-\alpha)z^2$ и $\tilde{q} = \alpha f(z^1) + (1-\alpha)f(z^2)$, то по определению производственной функции $\tilde{q} \leq f(\tilde{z})$, откуда получаем $\alpha f(z^1) + (1-\alpha)f(z^2) \leq f\left(\alpha z^1 + (1-\alpha)z^2\right)$ для любого $\alpha \in [0, 1]$. Это означает, что функция $f(\cdot)$ вогнута.

2. Согласно определению вогнутой функции ее подграфик, т.е. множество $\tilde{Y} = \left\{(z, q) : z \in R_+^{N-1}, q \leq f(z)\right\}$, — выпуклое множество. Поскольку $\tilde{Y}$ с точностью до знака факторов производства совпадает с Y (является его симметричным отображением), то и Y является выпуклым.

3. Поскольку мы доказали, что из выпуклости Y следует вогнутость производственной функции $f(\cdot)$, а вогнутая функция непрерывна во внутренних точках области определения, то $f(\cdot)$ непрерывна.

4. Пусть $(z^1, z^2) \in R_+^{N-1a}$ причем $z^1 \leq z^2$. Поскольку $\left(-z^1, f(z^1)\right) \in Y$, то по свойству свободы расходования, затрачивая больше (или столько же) факторов, мы можем произвести неменьший выпуск, т.е. $\left(-z^2, f(z^1)\right) \in Y$. По определению производственной функции имеем $q^1 = f(z^1) \leq f(z^2)$. Итак, мы доказали, что $f(\cdot)$ не убывает по z.

5. Предположим, что $f(0) > 0$. Поскольку $y = 0, f(0) \in Y$ и, кроме того, $y \geq 0$, то по свойству отсутствия «рога изобилия» $y = 0$, т.е. $f(0) = 0$. Таким образом, мы пришли к противоречию, следовательно, $f(0) \leq 0$.

6. Возможность бездействия означает, что $(-z^* = 0,\ q^* = 0) \in Y$. Поскольку по определению производственной функции $f(z) \geq q$, то $f(z^*) = f(0) \geq q^* = 0$, и мы получили, что $f(0) \geq 0$. ■

Лекция 8

Максимизация прибыли и минимизация издержек

Задача максимизации прибыли

В предыдущей лекции было рассмотрено множество технологически доступных векторов чистого выпуска и обсуждены свойства этого множества. В дальнейшем будем считать, что производственное множество фирмы непусто и замкнуто. Теперь можно сформулировать задачу фирмы. Будем считать, что фирма максимизирует прибыль на данном производственном множестве. Формально задача максимизации прибыли может быть представлена как

$$\max_{y \in Y} py.$$

Заметим, что решение задачи существует не всегда. Например, рассмотрим технологию с постоянной отдачей от масштаба. Если для такой технологии при заданных ценах существует вектор, дающий положительную прибыль, то, умножая этот вектор на число $\alpha > 0$, мы сможем увеличить прибыль в α раз. В этих условиях задача максимизации прибыли не имеет решения.

Обозначим через P_Y множество цен, при которых задача максимизации прибыли фирмы с производственным множеством Y имеет решение.

Рассмотрим случай двух товаров $(N = 2)$ и представим решение задачи максимизации прибыли для некоторых цен из P_Y графически. Для этого изобразим производственное множество Y и линии постоянной прибыли $p_1 y_1 + p_2 y_2 = \overline{\pi}$. Заметим, что линии постоянной прибыли — это прямые с наклоном, равным $-\frac{p_1}{p_2}$. Кроме того, если $y_1 = 0$, то $y_2 = \frac{\overline{\pi}}{p_2}$. Максимизирующий прибыль вектор чистого выпуска для данной технологии y^*, как видно из рис. 8.1, соответствует точке касания линии уровня и границы производственного множества (эту границу называют *трансформационной кривой*).

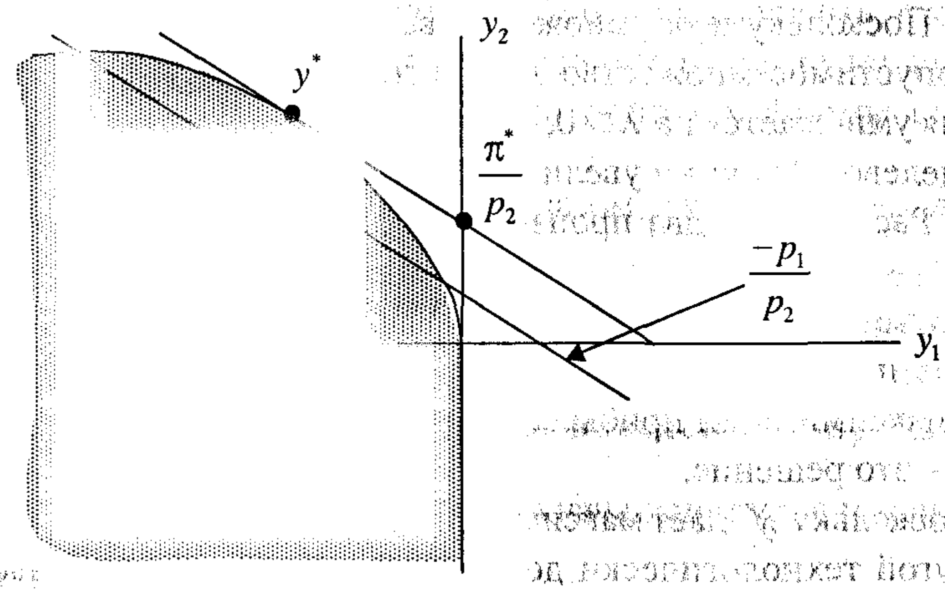


Рис. 8.1. Максимизация прибыли фирмы

Подставляя решения задачи максимизации прибыли в целевую функцию фирмы, мы получим прибыль как функцию от цен $\pi(p)$. Эту функцию в дальнейшем мы будем называть *функцией прибыли.* Исследуем свойства полученной функции.

Утверждение 8.1. Свойства функции прибыли $\pi(p)$.

Пусть $\pi(p)$ — функция прибыли, соответствующая производственному множеству Y и $p \in P_Y$. Тогда $\pi(p)$ обладает следующими свойствами:

1) однородность первой степени относительно цен: $\pi(\lambda p) = \lambda\pi(p)$ для всех $\lambda > 0$;

2) выпуклость по ценам;

3) непрерывность во внутренних точках своей области определения;

4) если функция $\pi(p)$ дифференцируема при $\overline{p} \gg 0$, то имеет место *лемма Хотеллинга* $y_i(\overline{p}) = \dfrac{\partial \pi(\overline{p})}{\partial p_i}$.

Доказательство

1. Поскольку при умножении всех цен на положительное число λ допустимое множество задачи не изменяется, а лишь целевая функция умножается на $\lambda > 0$, то решение задачи не изменится, а значение целевой функции увеличится в λ раз.

2. Рассмотрим два произвольных вектора цен p'' и p'. Пусть y'' и y' — решения задачи максимизации прибыли при ценах p'' и p' соответственно. Обозначим через $\tilde{p}$ линейную комбинацию двух векторов цен $\tilde{p} = \alpha p' + (1-\alpha)p''$, где $\alpha \in [0, 1]$. Предположим, что задача максимизации прибыли имеет решение при ценах $\tilde{p}$, и пусть $\tilde{y} \in Y$ — это решение.

Поскольку y' дает максимальную прибыль при ценах p', то любой другой технологически допустимый вектор чистого выпуска, в том числе и $\tilde{y}$, не может принести большую прибыль:

$$\pi(p') = p'y' \geq p'\tilde{y}.$$

Аналогично находим, что

$$\pi(p'') = p''y'' \geq p''\tilde{y}.$$

Домножив первое неравенство на α, второе — на $(1-\alpha)$ и сложив, получим

$$\alpha\pi(p') + (1-\alpha)\pi(p'') \geq (\alpha p' + (1-\alpha)p'')\tilde{y} = \tilde{p}\tilde{y} = \pi(\tilde{p}).$$

Таким образом, доказана выпуклость функции расходов по ценам:

$$\alpha\pi(p') + (1-\alpha)\pi(p'') \leq \pi\left(\alpha p' + (1-\alpha)p''\right).$$

3. Непрерывность следует из теоремы о максимуме, однако возможно альтернативное обоснование непрерывности. Поскольку вы-

пуклая функция непрерывна во внутренних точках области определения, то из предыдущего пункта следует непрерывность функции прибыли по ценам во всех таких точках.

4. Зафиксируем цены всех товаров кроме i-го: $p_j = \overline{p}_j$, $j \neq i$. Обозначим через $\pi(p_i)$ максимальную прибыль, соответствующую вектору цен $(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_{i-1}, p_i, \overline{p}_{i+1}, \ldots, \overline{p}_N)$. Пусть при ценах $\overline{p} = (\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_{i-1}, \overline{p}_i, \overline{p}_{i+1}, \ldots, \overline{p}_N)$ вектор чистых выпусков $y(\overline{p})$ является решением задачи максимизации прибыли, тогда $\pi(\overline{p}_i) = \overline{p}y(\overline{p})$. Предположим, что цена i-го товара изменилась и стала равна p_i, а все остальные цены остались прежними. Если предположить, что фирма будет пассивно реагировать на изменение цен, т.е. будет выбирать прежний вектор затрат-выпусков, то прибыль фирмы составит $\varphi(p_i) = p_i y_i(\overline{p}) + \sum_{j \neq i} \overline{p}_j y_j(\overline{p})$. Таким образом, функция $\varphi(p_i)$ линейна по цене. Если фирма выберет другой вектор чистых выпусков, используя возможности замещения, то она увеличит прибыль. Это означает, что при каждом значении p_i максимальная прибыль будет не меньше величины прибыли при пассивном поведении: $\pi(p_i) \leq \varphi(p_i) = p_i y_i(\overline{p}) + \sum_{j \neq i} \overline{p}_j y_j(\overline{p})$. Кроме того, при начальном уровне цен оба выражения дадут одинаковую прибыль:

$$\pi(\overline{p}_i) = \varphi(\overline{p}_i) = \overline{p}_i y_i(\overline{p}) + \sum_{j \neq i} \overline{p}_j y_j(\overline{p}).$$

Изобразим графически функцию «наивного поведения» $\varphi(p_i)$ и функцию прибыли $\pi(p_i)$. График функции $\varphi(p_i)$ — прямая с наклоном, равным $y_i(\overline{p})$. График функции $\pi(p_i)$ везде лежит выше прямой $\varphi(p_i)$, и в точке $p_i = \overline{p}_i$ их значения совпадают, как это изображено на рис. 8.2. Поскольку прямая $\varphi(p_i)$ является касательной к функции $\pi(p_i)$ в точке $p_i = \overline{p}_i$, то в этой точке их наклоны совпадают, и мы получаем соотношение

$$\frac{\partial \pi(\overline{p})}{\partial p_i} = \frac{\partial \varphi(\overline{p})}{\partial p_i} = y_i(\overline{p}),$$

доказав тем самым лемму Хотеллинга. ■

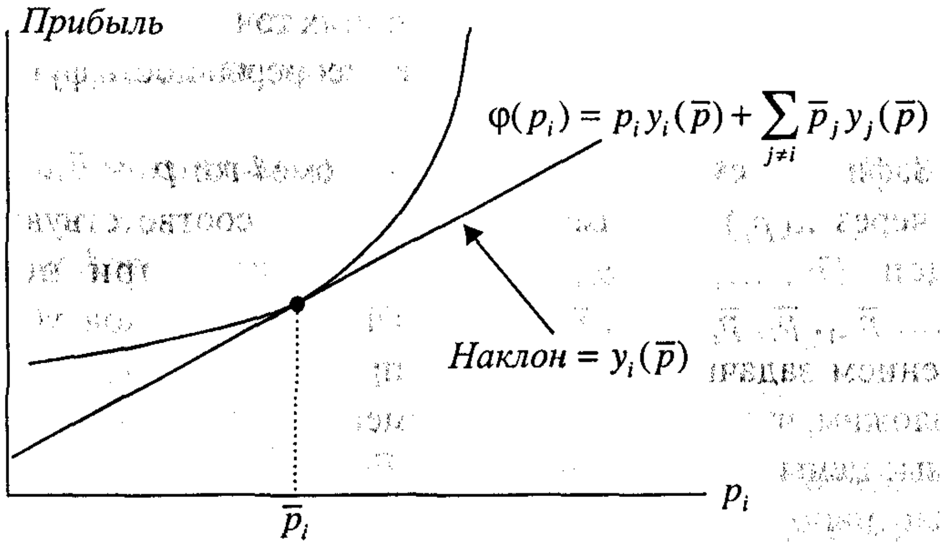


Рис. 8.2. Выпуклость функции прибыли и лемма Хотеллинга

Итак, доказанная лемма говорит, что при повышении цены выпускаемой продукции (случай, когда $y_i > 0$) прибыль растет пропорционально объему выпуска. Если же повышается цена фактора производства продукции (случай, когда $y_i < 0$), прибыль будет падать пропорционально объему использования этого фактора.

Рассмотрев свойства функции прибыли, обратимся к анализу самого решения задачи максимизации прибыли. Договоримся называть соответствие между вектором цен p и решением задачи максимизации прибыли *предложением фирмы*, хотя это и не вполне соответствует привычному значению этого понятия. Лишь положительные координаты вектора затрат-выпусков соответствуют предложению продукции, а отрицательные координаты, напротив, задают спрос на факторы производства.

Утверждение 8.2. Свойства предложения фирмы $y(p)$.

Пусть $y(p)$ — множество решений задачи максимизации прибыли фирмы, технологии которой представимы производственным множеством Y и $p \in P_Y$. Тогда предложение фирмы $y(p)$ обладает следующими свойствами:

1) однородность нулевой степени относительно цен: $y(\lambda p) = y(p)$ для любого $\lambda > 0$;

2) если производственное множество выпукло, то $y(p)$ — выпуклое множество;

3) если производственное множество строго выпукло, то при каждом p решение задачи фирмы единственно, т.е. $y(p)$ является функцией предложения;

4) имеет место закон предложения: если $y(p)$ — функция предложения, то $(p'-p'')\big(y(p')-y(p'')\big)\geq 0$;

5) если функция прибыли дважды непрерывно дифференцируема, то матрица первых производных функции предложения симметричная и положительно полуопределенная.

Доказательство

1. Однородность предложения была доказана выше при анализе однородности функции прибыли.

2. Рассмотрим два вектора затрат-выпусков, являющихся решениями задачи максимизации прибыли: $y,\ y'\in y(p)$. В силу того что оба вектора решают одну и ту же задачу, им должны соответствовать одинаковые значения прибыли: $py=py'$.

Рассмотрим $y''=\alpha y+(1-\alpha)y'$ где $\alpha\in[0,\ 1]$. Заметим, что y'' принадлежит Y в силу предположения о выпуклости производственного множества. Найдем соответствующую прибыль:

$$py''=\alpha py+(1-\alpha)py'=py.$$

Поскольку y'' допустим и приносит максимально возможную прибыль, то y'' также является решением задачи: $y''\in y(p)$, т.е. $y(p)$ — выпуклое множество.

3. Предположим, что задача максимизации прибыли при ценах p имеет два разных решения: $y\neq y'$ и $y,\ y'\in y(p)$. Как было замечено выше, оба вектора должны приносить одинаковую прибыль: $py=py'$. В силу строгой выпуклости производственного множества выпуклая комбинация этих векторов чистых выпусков $y''=\alpha y+(1-\alpha)y'$ (причем $\alpha\in(0,\ 1)$) должна быть внутренней точкой множества Y. Это означает, что существует окрестность точки y'', которая целиком лежит в Y. Выберем из этой окрестности такую точку $\tilde{y}$, что $\tilde{y}\gg y$, тогда эта точка принесет большую прибыль, чем y:

$$p\tilde{y} > py'' = \alpha py + (1-\alpha)py' = py.$$

Полученное неравенство противоречит предположению о том, что y приносит максимальную прибыль при ценах p.

4. Докажем закон предложения. Рассмотрим два произвольных вектора цен p'' и p'. Пусть y'' и y' — решения задачи максимизации прибыли при ценах p'' и p' соответственно. Поскольку y' дает максимальную прибыль при ценах p', то любой другой технологически допустимый вектор чистого выпуска, в том числе и y', нс может принести большую прибыль:

$$\pi(p') = p'y' \geq p'y'' \text{ или } p'y' - p'y'' \geq 0.$$

Аналогично находим, что

$$\pi(p'') = p''y'' \geq p''y' \text{ или } p''y'' - p''y' \geq 0.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$p'(y'-y'') - p''(y'-y'') \geq 0 \text{ или } (p'-p'')(y'-y'') \geq 0.$$

Итак, мы получили закон предложения, из которого можно сделать следующие выводы. Если цены всех товаров, кроме одного, фиксированы, то при повышении цены этого товара его выпуск не упадет (если этот товар является готовой продукцией) и спрос на этот товар не возрастет (если этот товар является фактором производства). Таким образом, в теории производства нет аналога гиффеновского товара.

5. Поскольку функция прибыли дважды непрерывно дифференцируема, то ее перекрестные производные должны быть равны. Учитывая, что в силу леммы Хотеллинга вторые производные функции прибыли равны первым производным функции предложения, мы получаем симметричность матрицы первых производных функции предложения. Более того, в силу выпуклости функции прибыли по ценам матрица вторых производных функции прибыли (соответственно и матрица первых производных функции предложения) является положительно полуопределенной. ■

Задача минимизации издержек

Если технология фирмы позволяет разделить факторы производства (z) и выпускаемую продукцию (q), то задача максимизации прибыли может быть разбита на две задачи: задачу производства заданного выпуска q с минимальными издержками и задачу выбора оптимального выпуска. Для того чтобы описать эти задачи формально, обозначим цены факторов производства через $w\in R_{++}^{N-1}$, а цену готовой продукции — через $p\in R_{+}$. Теперь мы можем записать задачу минимизации издержек:

$$\min_{z\in V_q} wz,$$

где $V_q=\{z\in R_{+}^{N-1}:\ (-z,\ q)\in Y\}$. Множество V_q называют *множеством необходимых ресурсов*. Если технология фирмы представима производственной функцией, то множество необходимых ресурсов представимо как

$$V_q=\{z\in R_{+}^{N-1}:\ q\le f(z)\}.$$

Решая задачу минимизации издержек при любых положительных ценах w, мы находим соответствие $(w,\ q)\to z(w,\ q)$. Это отображение называют *условным спросом* на факторы производства, чтобы отличить его от спроса на факторы, который получается при решении задачи максимизации прибыли. Термин «условный» подчеркивает, что данный спрос получен при условии достижении данного уровня выпуска. Подставив найденный условный спрос в целевую функцию, мы получим *функцию издержек*, зависящую от цен факторов производства и выпуска: $c(w,\ q)$.

Имея функцию издержек, мы можем переписать задачу максимизации прибыли как задачу выбора уровня выпуска готовой продукции при заданных ценах:

$$\max_{q\ge 0}\big(pq-c(w,\ q)\big).$$

Для случая двух факторов производства задачу минимизации издержек можно представить графически (см. рис. 8.3).

На рис. 8.3 мы изобразили множество необходимых ресурсов и линии уровня целевой функции, которые являются прямыми с наклоном, равным по модулю соотношению цен товаров. Затраты сокращаются при приближении к началу координат, и соответственно минимальные затраты на множестве V_q достигаются в точке z^*.

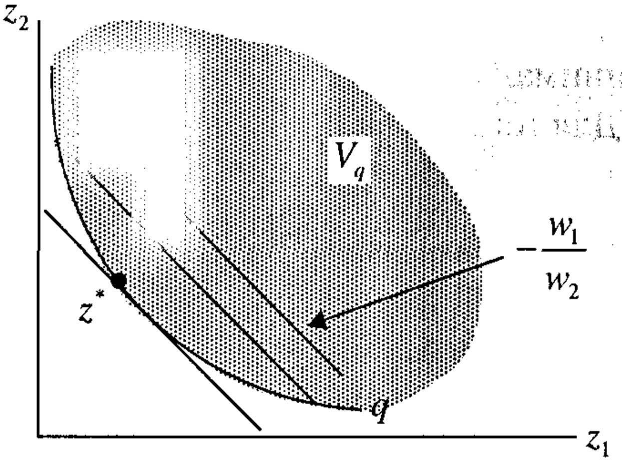


Рис. 8.3. Иллюстрация задачи минимизации издержек

Утверждение 8.3. Свойства условного спроса $z(w, q)$.

Пусть $z(w, q)$ — условный спрос на факторы производства для фирмы, производственное множество которой имеет вид $Y = \{(-z, q): q \le f(z),\ z \in R_+^{N-1}\}$. Тогда условный спрос $z(w, q)$ обладает следующими свойствами:

1) однородность нулевой степени относительно цен: $z(\lambda w, q) = z(w, q)$ для любого $\lambda > 0$;

2) если $f(z)$ непрерывна, то условный спрос принадлежит границе множества V_q;

3) если производственное множество Y выпукло, то $z(w, q)$ — выпуклое множество;

4) если производственное множество Y — строго выпукло, то $z(w, q)$ состоит из одного элемента, т.е. является функцией условного спроса;

5) имеет место закон условного спроса: если $z(w, q)$ — функция условного спроса, то $(w' - w)(z(w', q) - z(w, q)) \le 0$;

6) если функция издержек дважды непрерывно дифференцируема, то матрица первых производных функции условного спроса симметричная и отрицательно полуопределенная.

Поскольку задача минимизации издержек идентична задаче минимизации расходов в теории потребителя, то свойства условного спроса могут быть доказаны так же, как и соответствующие свойства компенсированного спроса.

Если множество необходимых ресурсов представимо с помощью производственной функции и эта функция дифференцируема, то мы можем охарактеризовать решение задачи минимизации издержек с помощью условий Куна — Таккера. Если z^* — решение задачи минимизации издержек при (w, q), то существует множитель $\mu \geq 0$ такой, что для любого фактора производства $i = 1, 2, \ldots, N-1$ выполнены следующие условия:

$$w_i \geq \mu \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_i}; \quad w_i = \mu \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_i}, \text{ если } z_i^* > 0.$$

Соответственно внутреннее решение характеризуется равенством предельной нормы технологического замещения между двумя факторами и их относительными ценами:

$$MRTS_{ij}(z^*) = \frac{\partial f(z^*)/\partial z_i}{\partial f(z^*)/\partial z_j} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Утверждение 8.4. Свойства функции издержек $c(w, q)$.

Функция издержек $c(w, q)$ обладает следующими свойствами:

1) однородность первой степени относительно цен факторов: $c(\lambda w, q) = \lambda c(w, q)$ для всех $\lambda > 0$;

2) возрастает по выпуску;

3) не убывает по ценам факторов;

4) вогнутость по ценам факторов;

5) непрерывность при $w \gg 0$;

6) если функция $c(w, q)$ дифференцируема при $w \gg 0$, то во внутренних точках $(z \gg 0)$ имеет место лемма Шепарда $z_i(w, q) = \dfrac{\partial c(w, q)}{\partial w_i}$.

Доказательство утверждения 8.4 аналогично доказательству свойств функции расходов в теории потребителя (утверждение 3.2).

В теории производства центральное место занимают технологии с постоянной отдачей от масштаба. Этому есть несколько объяснений. Во-первых, с технической точки зрения любая технология с невозрастающей отдачей от масштаба может быть преобразована в технологию с постоянной отдачей от масштаба путем введения одного дополнительного фактора производства (с помощью так называемого трюка Маккензи, который предлагается проделать самостоятельно[4]). Этот «недоучтенный» в исходной технологии фактор обычно относят к предпринимательским способностям. Другое объяснение исходит из эмпирических исследований, согласно которым в экономике преобладают технологии с постоянной отдачей от масштаба. Это можно объяснить тем, что естественный процесс развития фирмы таков, что в начале своей деятельности она демонстрирует возрастающую отдачу, затем постоянную, а при дальнейшем наращивании масштаба производства отдача начинает падать. Таким образом, у предпринимателей имеется стимул к некоему естественному ограничению размеров фирм и созданию новых фирм вместо непрерывного наращивания производства на уже имеющихся фирмах.

Итак, рассмотрим особенности условного спроса и функции издержек для технологии с постоянной отдачей от масштаба.

Утверждение 8.5. Условный спрос и функция издержек для технологии с постоянной отдачей от масштаба.

Условный спрос и функция издержек для технологии с постоянной отдачей от масштаба обладают однородностью первой степени по выпуску: $z(w,\ \alpha q)=\alpha z(w,\ q)$ и $c(w,\ \alpha q)=\alpha c(w,\ q)$ для всех $\alpha>0$.

Доказательство

Пусть z^* является решением задачи $\min\limits_{z\in V_q} wz$. Это означает, что $wz^*\geq wz$ для всех $z\in V_q$.

Рассмотрим задачу минимизации издержек при тех же ценах факторов, но при уровне выпуска, равном αq (причем $\alpha>0$): $\min\limits_{z\in V_{\alpha q}} wz$. Возьмем произвольный вектор $z\in V_{\alpha q}$. В силу постоянной отдачи от масштаба, если $(-z,\ \alpha q)\in Y$, то $(\frac{-z}{\alpha},\ q)\in Y$ для любых $\alpha>0$. Следовательно, $\tilde{z}\in V_q$, где $\tilde{z}=\frac{z}{\alpha}$.

[4] См.: *Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic Theory. N.Y.: Oxford University Press, 1995.

Поскольку z^* является решением задачи минимизации издержек при выпуске q, то $wz^* \le wz$ для всех $z \in V_q$. Это означает, что $wz^* \le w\tilde{z} = \dfrac{wz}{\alpha}$ для любого $z \in V_{\alpha q}$. Умножая на α, находим, что $w(\alpha z^*) \le wz$ для любого $z \in V_{\alpha q}$. Это означает, что αz^* является решением задачи $\min\limits_{z \in V_{\alpha q}} wz$ для любого $\alpha > 0$, т.е. как условный спрос, так и функция издержек однородные первой степени относительно выпуска. ■

Лекция 9

Двойственность и агрегирование в теории производства

Двойственность в теории производства

Известно, как по производственной функции получить функцию издержек и функцию прибыли. Можно ли решить обратные задачи, т.е. можно ли на основании функции издержек или функции прибыли сделать вывод о том, какая технология их породила? Аналогичная задача решалась ранее в теории потребителя при восстановлении предпочтений на основе функции расходов. Итак, покажем, что как функция прибыли, так и функция издержек несут в себе информацию о производственном множестве фирмы.

1. Восстановление производственного множества на основе функции прибыли

Построим следующее множество $Y_\pi = \{y : py \le \pi(p) \forall p \in P_Y\}$. Процесс построения такого множества для случая двух товаров проиллюстрирован на рис. 9.1. Рассмотрим некий вектор цен $p^1 = (p_1^1, p_2^1)$ и найдем соответствующую прибыль $\pi(p^1)$. Решение неравенства $p_1^1 y_1 + p_2^1 y_2 \le \pi(p^1)$ изображено на рисунке горизонтальной штриховкой. Теперь рассмотрим другой вектор цен $p^2 = (p_1^2, p_2^2)$ и соответствующую прибыль $\pi(p^2)$. Решение неравенства $p_1^2 y_1 + p_2^2 y_2 \le \pi(p^2)$ изображено вертикальной штриховкой. Снова изменим вектор цен и получим третье неравенство и т.д. В итоге нужно взять только те точки, которые удовлетворяют решению всех неравенств, перебрав при этом все возможные неотрицательные векторы цен. Как видно из рис. 9.1, с каждой последующей итерацией граница множества становится все более сглаженной.

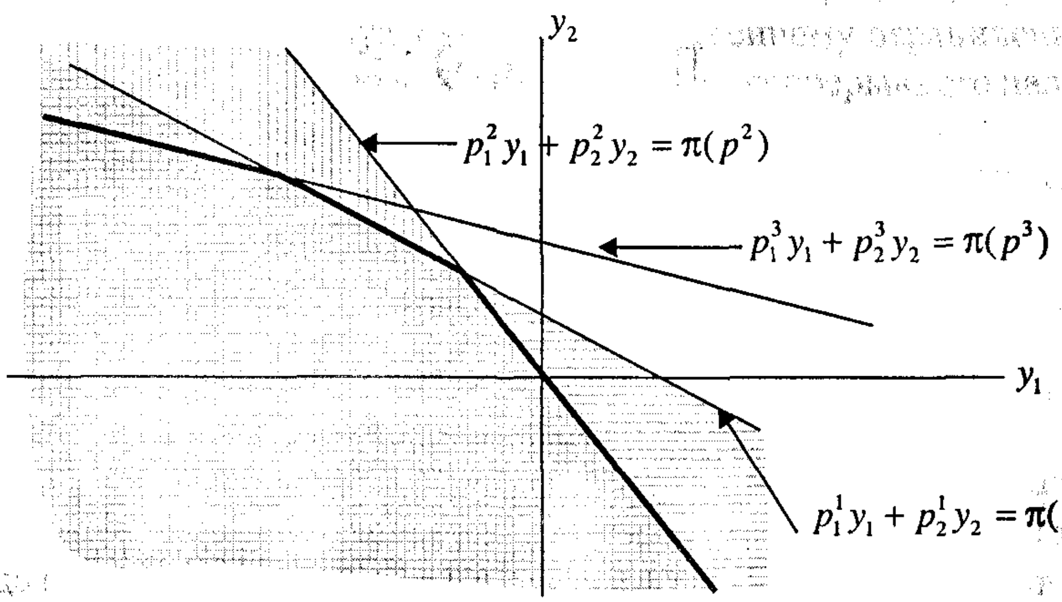


Рис. 9.1. Восстановление производственного множества по функции прибыли

Итак, следуя описанной выше процедуре, можно построить множество Y_π. Рассмотрим далее, будет ли восстановленное производственное множество порождать ту же функцию прибыли, что и исходное, и будет ли восстановленное множество в точности совпадать с исходным.

Согласно предложенной схеме восстановления множество Y_π получается как пересечение выпуклых множеств, а потому и само является выпуклым. Это означает, что если исходное множество не являлось выпуклым, то восстановленное множество не будет совпадать с исходным. Кроме того, несовпадение может иметь место и в том случае, если исходное множество не удовлетворяло свободе расходования. Соответствующие примеры изображены на рис. 9.2. Горизонтально заштрихованные области принадлежат восстановленным производственным множествам, но не принадлежат исходным.

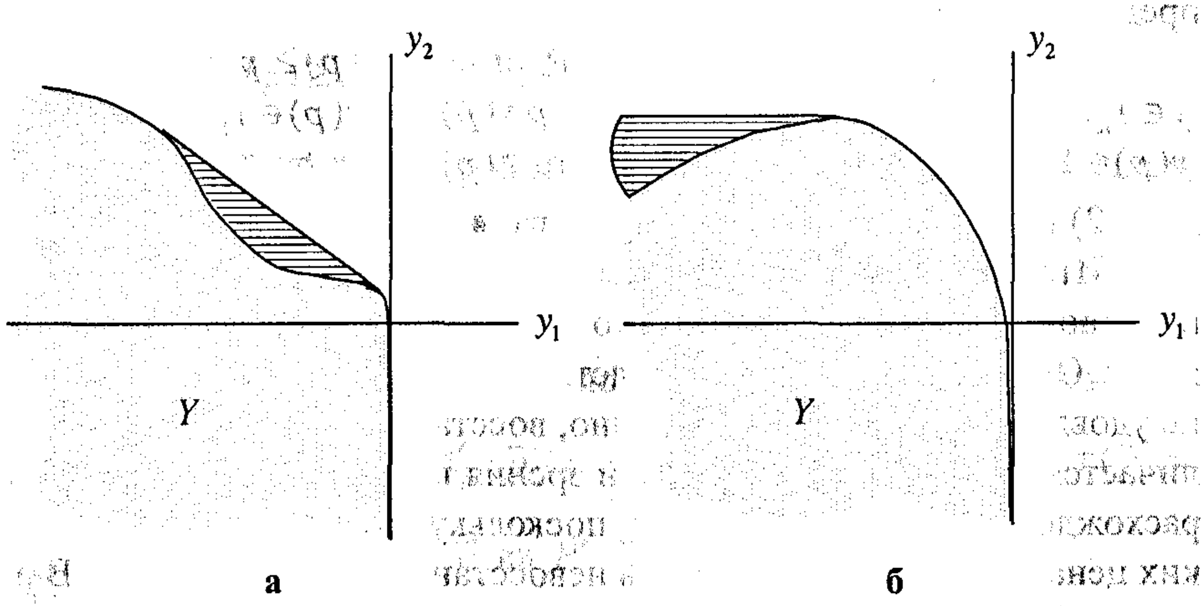


Рис. 9.2. Различие между исходным и восстановленным производственными множествами в случае невыпуклости множества Y (а) и в силу нарушения свободы расходования (б)

Утверждение 9.1. Связь исходного и восстановленного производственных множеств.

1. Пусть $\pi(p)$ — функция прибыли, соответствующая производственному множеству Y и определенная для всех $p \in P_Y$. Если Y_π — производственное множество, восстановленное по данной функции прибыли, то имеем $\pi(p) = \max\limits_{y \in Y_\pi} py$ для всех $p \in P_Y$.

2. Если производственное множество выпукло, замкнуто и удовлетворяет свободе расходования, то восстановленное производственное множество совпадает с исходным $Y_\pi = Y$.

Доказательство

1. Рассмотрим произвольный элемент y из Y и покажем, что он будет принадлежать восстановленному множеству Y_π. Для любого

элемента y из Y имеем $\pi(p) \geq py$, следовательно, $y \in Y_\pi$. Таким образом, мы показали, что $Y \subset Y_\pi$.

Предположим, что существует вектор цен $p^* \in P_Y$ такой, что $\pi(p^*) < p^* y^*$ для некоторого $y^* \in Y_\pi$. Поскольку $y^* \in Y_\pi$, то по определению Y_π имеем $\pi(p^*) \geq p^* y^*$, но это противоречит сделанному выше предположению о том, что $\pi(p^*) < p^* y^*$.

Таким образом, для всех $p \in P_Y$ имеем $\pi(p) \geq p\, y$ для любого $y \in Y_\pi$. С другой стороны, $\pi(p) = p\, y(p)$ и $y(p) \in Y_\pi$, поскольку $y(p) \in Y \subset Y_\pi$. Отсюда заключаем, что $\pi(p) = \max\limits_{y \in Y_\pi} py$ для всех $p \in P_Y$.

2) Принимаем без доказательства. ■

Итак, по функции прибыли можно восстановить производственное множество, если оно выпукло и удовлетворяет свободе расходования. Однако даже если производственное множество этим свойствам не удовлетворяет и, соответственно, восстановленное множество отличается от исходного, то с точки зрения выбора производителя эти расхождения не имеют значения, поскольку выбор фирмы ни при каких ценах не может находиться в невосстановленных областях. В результате восстановленное множество порождает ту же функцию прибыли, что и исходное.

Рассмотрим еще один вопрос, связанный с функцией прибыли. Как было показано выше, функция прибыли фирмы должна обладать рядом свойств (однородность, выпуклость и т.д.). Пусть имеется некая произвольная функция, удовлетворяющая всем этим свойствам. Можно ли в этом случае утверждать, что эта функция является функцией прибыли для некоторой технологии?

Утверждение 9.2. Восстановление производственного множества по функции прибыли.

Пусть $\pi(p)$ — функция, определенная для всех $p \in P^\circ$, причем $p \geq 0$. Пусть, кроме того, $\pi(p)$ — непрерывная, однородная первой степени, выпуклая функция. Тогда $\pi(p)$ является функцией прибыли для фирмы, производственное множество которой задается как

$Y_\pi = \{ y : py \leq \pi(p) \;\; \forall \;\; p \in P^\circ \}$, т.е.: $\pi(p) = \max\limits_{y \in Y_\pi} py$.

Доказательство

Приведем доказательство для случая, когда $\pi(p)$ дифференцируема.

В силу выпуклости $\pi(p)$ по p касательная, проведенная к $\pi(p)$ в любой точке $\bar{p}$, будет лежать не выше самой функции:

$$\pi(p) \geq \pi(\bar{p}) + \sum_i \pi'_p(\bar{p})(p_i - \bar{p}_i) \text{ для всех } p.$$

Поскольку $\pi(p)$ однородная первой степени по p, то в соответствии с леммой Эйлера

$$\pi(\bar{p}) = \sum_i \pi'_p(\bar{p})\bar{p}_i.$$

Подставляя это уравнение в полученное выше неравенство, находим $\pi(p) \geq \pi(\bar{p}) + \sum_i \pi'_{p_i}(\bar{p})(p_i - \bar{p}_i) = \pi(\bar{p}) + \sum_i \pi'_{p_i}(\bar{p})p_i - \pi(\bar{p}) =$ $= \sum_i \pi'_{p_i}(\bar{p})p_i$ для всех p и $\bar{p}$ из P°. Таким образом,

$$\pi(p) \geq \pi'_p(\bar{p})p$$

и, следовательно, по определению множества Y_π имеем $\pi'_p(\bar{p}) \in Y_\pi$ для всех $\bar{p} \in P^\circ$.

Итак, в силу леммы Эйлера $\pi(p) = \sum_i \pi'_p(p)p_i$ и, как было показано выше, $\pi'_p(\bar{p}) \in Y_\pi$ для всех $\bar{p} \in P^\circ$, в том числе и для $\bar{p} = p$. Кроме того, согласно определению множества Y_π для любого $y \in Y_\pi$ имеем $\pi(p) \geq py$. Таким образом, заключаем, что $\pi(p) = \max\limits_{y \in Y_\pi} py$ для всех $p \in P^\circ$. ■

2. Восстановление множества необходимых ресурсов на основе функции издержек

Покажем, что информация о производственном множестве содержится не только в функции прибыли, но и в функции издержек (см. рис. 9.3).

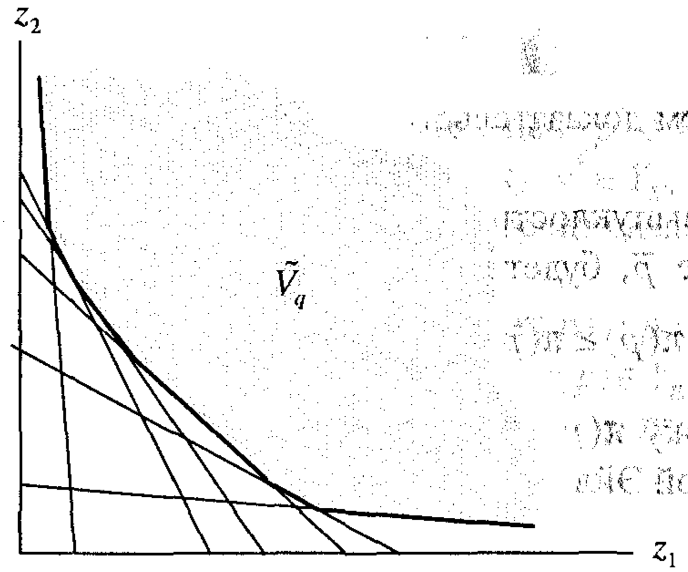


Рис. 9.3. Восстановление множества необходимых ресурсов по функции издержек

В силу того что задача минимизации издержек аналогична задаче минимизации расходов, процедура восстановления производственного множества по функции издержек совпадает с восстановлением предпочтений по функции расходов, а именно для каждого уровня выпуска готовой продукции q определим множество $\tilde{V}_q = \{z \in R_+^{N-1} : wz \geq c(w,\ q)\ \forall\ w >> 0\}$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 9.3. Связь исходного и восстановленного множеств необходимых ресурсов.

1. Пусть $c(w,\ q)$ — функция издержек, соответствующая непустому замкнутому производственному множеству Y. Если $\tilde{V}_q$ — множество, восстановленное на основе этой функции издержек, то для всех $w >> 0$ имеем $c(w,\ q) = \min\limits_{z \in \tilde{V}_q} wz$.

2. Если, кроме того, производственное множество выпукло и удовлетворяет свободе расходования, то восстановленное множество необходимых ресурсов совпадает с исходным: $\tilde{V}_q = V_q$.

Доказательство утверждения 9.3 аналогично доказательству утверждения 5.1.

Итак, по функции расходов можно восстановить множество необходимых ресурсов $\tilde{V}_q$. Однако рассмотрим еще один вопрос, связанный с функцией издержек. Как было показано ранее, функция издержек фирмы должна обладать рядом свойств (однородность, вогнутость, монотонность и т.д.). Предположим, что у нас есть некая функция, удовлетворяющая всем этим свойствам. Можно ли в этом случае утверждать, что эта функция является функцией издержек для некоторой технологии? Ниже покажем, что ответ на этот вопрос положительный, а соответствующая технология задается множествами $\tilde{V}_q$.

Утверждение 9.4. Восстановление множества необходимых ресурсов по функции издержек.

Пусть $c(w, q)$ — непрерывная функция, возрастающая по q, однородная первой степени, вогнутая и дифференцируемая по w. Тогда $c(w, q)$ является функцией издержек для технологии, представленной множеством необходимых ресурсов $\tilde{V}_q$, т.е.

$$c(w, q) = \min_{z \in \tilde{V}_q} wz, \text{ где } \tilde{V}_q = \{z \in R_+^{N-1} : wz \geq c(w, q) \;\; \forall \;\; w >> 0\}.$$

Доказательство

Покажем, что найдется $\tilde{z}(w, q) \in \tilde{V}_q$ такое, что $c(w, q) = w\tilde{z}(w, q)$. Это означает, что решение задачи $\min_{z \in \tilde{V}_q} wz$ существует и ее значение равно $c(w, q)$.

Покажем, что в качестве $\tilde{z}(w, q)$ можно взять вектор частных производных функции $c(w, q)$ по w. Сначала убедимся в том, что $c'_w(w, q) \in \tilde{V}_q$.

Действительно, в силу вогнутости $c(w, q)$ по w касательная, проведенная к $c(w, q)$ в любой точке $\bar{w}$, будет лежать не ниже самой функции:

$$c(w, q) \leq c(\bar{w}, q) + \sum_i c'_{w_i}(\bar{w}, q)(w_i - \bar{w}_i) \text{ для всех } w \geq 0.$$

Поскольку $c(w, q)$ однородная первой степени по w, то по лемме Эйлера

$$c(\bar{w}, q) = \sum_i c'_{w_i}(\bar{w}, q)\bar{w}_i.$$

Подставляя это соотношение в полученное выше неравенство, находим: $c(w,\ q) \le c(\bar{w},\ q) + \sum_i c'_{w_i}(\bar{w},\ q)(w_i - \bar{w}_i) = c(\bar{w},\ q) +$ $+ \sum_i c'_{w_i}(\bar{w},\ q)w_i - c(\bar{w},\ q) = \sum_i c'_{w_i}(\bar{w},\ q)w_i$ для всех w и $\bar{w}$.

Поскольку $c(w,\ q)$ не убывает по w, то $c'_w(\bar{w},\ q) \ge 0$ и, как мы показали, $c'_w(\bar{w},\ q)w \ge c(w,\ q)$, следовательно, по определению множества $\tilde{V}_q$ имеем $c'_w(\bar{w},\ q) \in \tilde{V}_q$ для всех $\bar{w}$.

Покажем теперь, что $c'_w(w,\ q)$ является решением задачи минимизации расходов на множестве $\tilde{V}_q$. Для любого элемента из $\tilde{V}_q$, в том числе и для $c'_w(\bar{w},\ q) \in \tilde{V}_q$, издержки не могут быть меньше величины $c(\bar{w},\ q)$:

$$\bar{w}z \ge c(\bar{w},\ q) \text{ для всех } z \in \tilde{V}_q.$$

С другой стороны, с учетом леммы Эйлера, имеем

$$\bar{w}c'_w(\bar{w},\ q) = c(\bar{w},\ q).$$

Таким образом, $\bar{w}c'_w(\bar{w},\ q) = c(\bar{w},\ q) \le \bar{w}z$ для всех $z \in \tilde{V}_q$, откуда следует, что

$$\min_{z \in \tilde{V}_q} \bar{w}z = c(\bar{w},\ q). \ \blacksquare$$

Агрегирование в теории производства

Изучая теорию потребления, мы столкнулись с целым рядом проблем, возникающих при агрегировании индивидуального спроса. Теперь обратимся к агрегированию в теории производства и посмотрим, будут ли аналогичные проблемы иметь место. Напомним, что основная проблема агрегирования в теории потребления была связана с противоречивым поведением эффектов дохода. Как мы видели, в теории производства подобной проблемы нет, и функции предложения каждого товара всегда не убывают по своей цене. Это различие связано с тем, что в теории производства у фирмы нет «собственных» ресурсов и она не связана никакими ограничениями, кроме технологических (у фирмы нет бюджетного ограничения) и потому даже при изменении цены ресурсов фирме всегда доступен прежний вектор чистых выпусков.

Итак, в теории производства для каждой фирмы $j=1,\ \ldots,\ J$ имеет место закон предложения:

$$(p'-p'')(y_j'-y_j'')\geq 0,$$

где $y_j'\in y_j(p')$ и $y_j''\in y_j(p'')$.

Обозначим через $y(p)$ совокупное предложение, т.е. $y(p)=\sum\limits_{j=1}^{J}y_j(p)$, и покажем, что закон предложения имеет место и для агрегированного предложения. Закон предложения легко агрегируется, поскольку предложение фирмы зависит только от цен, которые одинаковы для всех фирм. Действительно, суммируя по всем фирмам, имеем

$$\sum_{j=1}^{J}(p'-p'')\big(y_j(p')-y_j(p'')\big)=(p'-p'')\big(y(p')-y(p'')\big)\geq 0.$$

В теории производителя не только нет проблем, связанных с агрегированием индивидуального предложения по всем фирмам, но и имеется возможность заменить все существующие фирмы одной репрезентативной фирмой, т.е. всегда существует *репрезентативный производитель*.

Построим производственное множество репрезентативной фирмы как сумму производственных множеств всех фирм, действующих в экономике:

$$Y^{aggr}=\{y\in R^N : y=\sum_{j=1}^{J}y_j,\ y_j\in Y_j \text{ для любого } j=1,\ \ldots,\ J\}.$$

Определим множество $P_{YA}=\bigcap\limits_j P_{Y_j}$. Тогда мы можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 9.5. Существование репрезентативного производителя.

Пусть Y^{aggr} — агрегированное производственное множество, $y^{aggr}(p)$ и $\pi^{aggr}(p)$ предложение и функция прибыли, соответствующие производственному множеству Y^{aggr} и определенные при любых $p\in P_{YA}$. Тогда:

1) $\pi^{aggr}(p)=\sum_{j=1}^{J}\pi_j(p)$;

2) $y^{aggr}(p)=\sum_{j=1}^{J}y_j(p)$.

Доказательство

1. Пусть y_j^* — решение задачи максимизации прибыли для j-й фирмы при ценах p. Тогда $py_j^*=\pi_j(p)$. Так как $y_j^*\in Y_j$, то $\sum_{i=1}^{J}y_j^*\in Y^{aggr}$ согласно определению Y^{aggr}.

Поскольку $\pi^{aggr}(p)$ — максимальная прибыль агрегированной фирмы при ценах p, то $\pi^{aggr}(p)\geq py$ для любых $y\in Y^{aggr}$, в том числе и для $\sum_{i=1}^{J}y_j^*$. Таким образом, имеем

$$\pi^{aggr}(p)\geq p\sum_{j=1}^{J}y_j^*=\sum_{j=1}^{J}py_j^*=\sum_{j=1}^{J}\pi_j(p).$$

Покажем, что верно и обратное неравенство и, значит, в действительности имеет место равенство. Пусть y^* является решением задачи агрегированной фирмы при ценах p, тогда $\pi^{aggr}(p)=py^*$. Поскольку $y^*\in Y^{aggr}$, то y^* можно представить как сумму векторов чистых выпусков всех фирм, т.е. $y^*=\sum_{j=1}^{J}\tilde{y}_j$, причем для любого $j=1,\ \ldots,\ J$ $\tilde{y}_j\in Y_j$. С учетом этого представления имеем

$$\pi^{aggr}(p)=py^*=p\sum_{j=1}^{J}\tilde{y}_j=\sum_{j=1}^{J}p\tilde{y}_j\leq\sum_{j=1}^{J}\pi_j(p),$$

причем последнее неравенство следует из того, что вектор $\tilde{y}_j$ не может принести фирме j прибыль большую, чем максимально возможное ее значение при данных ценах. Итак, мы показали, что $\pi^{aggr}(p)=\sum_{j=1}^{J}\pi_j(p)$.

2. Пусть y_j^* — решение задачи максимизации прибыли j-й фирмы при ценах p, т.е. $y_j^* \in y_j(p)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{J} \pi_j(p) = \sum_{j=1}^{J} p y_j^* = p \sum_{j=1}^{J} y_j^*.$$

С учетом доказанного выше утверждения имеем

$$p \sum_{j=1}^{J} y_j^* = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p) = \pi^{aggr}(p).$$

Таким образом, вектор $\sum_{j=1}^{J} y_j^*$ приносит максимальную прибыль агрегированной фирме при рассматриваемых ценах, т.е.

$$\sum_{j=1}^{J} y_j(p) \subset y^{aggr}(p).$$

Покажем, что имеет место и обратное включение. Рассмотрим $y^* \in y^{aggr}(p)$. По определению производственного множества агрегированной фирмы любой элемент этого множества является суммой каких-то элементов производственных множеств всех фирм, т.е. $y^* = \sum_{j=1}^{J} \tilde{y}_j$, причем для любого $j = 1, \ldots, J$ $\tilde{y}_j \in Y_j$. Кроме того, для каждой фирмы $p\tilde{y}_j \le \pi_j(p)$.

Покажем, что ни одно из этих неравенств не может выполняться как строгое. Действительно, если хотя бы для одной фирмы неравенство было бы строгим, то, суммируя по всем фирмам, мы в итоге тоже получили бы строгое неравенство:

$$\pi^{aggr}(p) = p y^* = \sum_{j=1}^{J} p\tilde{y}_j < \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p),$$

но это противоречит доказанному ранее утверждению о равенстве прибыли агрегированной фирмы сумме прибылей индивидуальных фирм. Следовательно, мы имеем равенства $p\tilde{y}_j = \pi_j(p)$ для всех $j = 1, \ldots, J$. Таким образом, $\tilde{y}_j$ является решением задачи j-й фирмы при ценах p, т.е.

$\tilde{y}_j \in y_j(p)$ для всех $j = 1, \ldots, J$ или $y^{aggr}(p) \subset \sum_{j=1}^{J} y_j(p)$. С учетом доказанного выше это означает, что $y^{aggr}(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p)$. ■

Рекомендуемая литература

Основная

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. N.Y.: Oxford University Press, 1995. Ch. 5.

Varian H. Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton & Company. Ch. 2—6.

Дополнительная

Jehle G., Reny Ph. Advanced Microeconomic Theory. 2nd ed. Adfdison-Wesley, 2000. Ch. 3.

Varian H. The Nonparametric Approach to Production Analysis // Econometrica. 1982. 52. P. 579—597.

III

ВЫБОР В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Лекция 10

Теория ожидаемой полезности

Предположим, что выбор агента может привести к одному из целого ряда возможных исходов. При этом невозможно определить заранее (в момент выбора), к какому именно исходу он приведет. Множество всех возможных исходов обозначим через C. Исходы могут представлять собой наборы товаров (и тогда $C = X$); они могут принимать форму денежных выплат. Предположим, что множество исходов конечно. Будем считать, что вероятности любого исхода также известны. Для описания альтернативы, связанной с принятием решения в условиях риска, будем использовать концепцию *лотереи*.

Определение

Простой лотереей будем называть набор вероятностей $L = (p_1, \ldots, p_S)$, где p_s — вероятность исхода s, $p_s \in [0, 1]$ и $\sum_s p_s = 1$.

Под *сложной лотереей* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_R, L_1, \ldots, L_R)$ будем понимать такую лотерею, исходами которой являются простые лотереи, и каждая простая лотерея L_k имеет место с вероятностью α_k. Договоримся записывать образованную таким образом сложную лотерею как $\sum \alpha_k L_k$. Заметим, что знаки сложения и умножения в этой записи условны и не соответствуют арифметическим операциям, а лишь отражают способ формирования сложной лотереи. □

Предположим, что индивиду важны лишь итоговые вероятности любого исхода, а не то, как они получены. Таким образом, для потребителя любая сложная лотерея эквивалентна простой лотерее с таким же набором исходов, если каждый исход в сложной лотерее имеет такую же итоговую вероятность, как и в простой.

Предпочтения индивида определяются на пространстве $\mathfrak{J}$, где $\mathfrak{J}$ — совокупность всех простых лотерей для данного набора исходов.

Будем, как и раньше, считать, что предпочтения рациональны. Понятие непрерывности отношения предпочтения в данном случае удобно сформулировать в следующем виде.

Определение

Отношение предпочтения, определенное на $\mathfrak{J}$, является *непрерывным*, если для любых лотерей L, L', $L'' \in \mathfrak{J}$ множества

$$\{\alpha \in [0,\ 1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succsim L''\} \text{ и } \{\alpha \in [0,\ 1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \precsim L''\}$$

являются замкнутыми. □

Предположение непрерывности означает, что небольшие изменения вероятностей не изменят порядка предпочтений между двумя лотереями (если, например, $L \succ L''$, то и $\alpha L + (1-\alpha)L' \succ L''$ при α, близком к единице).

Как следует из анализа выбора в условиях определенности, если предпочтения рациональны и непрерывны, то они представимы с помощью функции полезности, т.е. существует функция U, отображающая $\mathfrak{J}$ в множество действительных чисел такая, что $L \succsim L'$ равносильно $U(L) \geq U(L')$.

Введем дополнительную аксиому, называемую *аксиомой независимости*.

Определение

Отношение предпочтения, определенное на $\Im$, удовлетворяет *аксиоме независимости*, если при любых L, L', $L'' \in \Im$ и любых $\alpha \in (0, 1]$ $L \succsim L'$ тогда и только тогда, когда $\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$. □

Это означает, что если каждую из двух данных лотерей смешать с третьей, то порядок предпочтения этих смешанных лотерей будет таким же, как и для исходных лотерей.

Аксиома независимости занимает центральное место в теории выбора в условиях неопределенности, поскольку позволяет отобразить предпочтения с помощью функции полезности, которая линейна по вероятностям. Такую функцию называют *функцией ожидаемой полезности*.

Определение

Функция полезности U: $\Im \to R$ имеет *форму ожидаемой полезности*, если каждому возможному исходу x_i можно присвоить число u_i таким образом, что любой простой лотерее $L = (p_1, \ \ldots, \ p_S)$ соответствует $U(L) = \sum_s p_s u_s$. □

Функция U, обладающая этим свойством, называется *функцией ожидаемой полезности* или *функцией полезности фон Неймана — Моргенштерна*.

Термин «ожидаемая полезность» отражает следующий момент: полезность лотереи $U(L)$ можно рассматривать как ожидаемую величину полезностей исходов, т.е. как математическое ожидание значений u_i.

Нам необходимо показать, что функция ожидаемой полезности существует, если предпочтения удовлетворяют введенным выше аксиомам. При доказательстве теоремы существования нам понадобится вспомогательный результат, представленный как утверждение 10.1.

Утверждение 10.1. Следствие аксиомы независимости.

Если предпочтения, определенные на $\Im$, удовлетворяют аксиоме независимости и лотереи L, $L' \in \Im$ таковы, что $L \succsim L'$, α, $\beta \in (0, 1)$, то:

$$\alpha L+(1-\alpha)L' \succsim \beta L+(1-\beta)L' \text{ тогда и только тогда, когда } \alpha \geq \beta,$$

и

$$\alpha L+(1-\alpha)L' \succ \beta L+(1-\beta)L' \text{ тогда и только тогда, когда } \alpha > \beta.$$

Доказательство основано на применении аксиомы независимости. Его предлагается провести самостоятельно.

Утверждение 10.2. Существование функции ожидаемой полезности.

Пусть рациональные предпочтения, определяемые на пространстве лотерей $\Im$, удовлетворяют аксиомам непрерывности и независимости. Тогда эти предпочтения могут быть представлены функцией полезности, имеющей форму ожидаемой полезности, т.е. каждому исходу s ($s=1, \ldots, S$) можно присвоить число u_s таким образом, что для любых двух лотерей $L=(p_1, \ldots, p_S)$ и $L'=(p_1', \ldots, p_S')$: $L \succsim L'$ равносильно $\sum_{s=1}^{S} u_s p_s \geq \sum_{s=1}^{S} u_s p_s'$.

Доказательство

Можно показать, что в силу конечности множества исходов и аксиомы непрерывности существуют наилучшая $\bar{L}$ и наихудшая $\underline{L}$ лотереи и, таким образом, для любой лотереи $L \in \Im$ имеем $\bar{L} \succsim L \succsim \underline{L}$. Доказательство данного факта предлагается провести самостоятельно. Будем считать, что $\bar{L} \succ \underline{L}$, иначе все лотереи эквивалентны и утверждение тривиально.

Определим $U(\underline{L})=0$ и $U(\bar{L})=1$. Каждому элементу $L \in \Im$ поставим в соответствие число α_L такое, что $L \sim \alpha_L \underline{L}+(1-\alpha_L)\bar{L}$. Вопрос состоит в том, можно ли найти такой эквивалент для любой лотереи $L \in \Im$, и единствен ли этот эквивалент.

Покажем, что α_L существует аналогично тому, как мы делали в случае с обычной функцией полезности. Рассмотрим множества

$$B=\left\{\alpha \in [0,\ 1] : \alpha\bar{L}+(1-\alpha)\underline{L} \succsim L\right\}$$

и

$$W=\left\{\alpha \in [0,\ 1] : \alpha\bar{L}+(1-\alpha)\underline{L} \precsim L\right\}.$$

Поскольку предпочтения по условию являются непрерывными, то оба множества замкнуты. Кроме того, эти множества непустые. Множество B содержит $\alpha = 1$, поскольку $\overline{L} \succsim L$ для любой лотереи $L \in \mathfrak{I}$, а множество W содержит $\alpha = 0$, так как $L \succsim \underline{L}$ для любой лотереи $L \in \mathfrak{I}$. В силу полноты предпочтений любое $\alpha \in [0, 1]$ лежит либо в одном, либо в другом множествах (либо в обоих) и потому объединение множеств дает отрезок $[0, 1]$ — связное множество.

Итак, B и W — непустые, замкнутые множества, а их объединение является связным множеством, следовательно, пересечение B и W непусто. Это означает, что для любой лотереи $L \in \mathfrak{I}$ существует $\alpha_L \in [0, 1]$ такое, что $\alpha_L \in B$ и $\alpha_L \in W$, т.е. $\alpha_L \overline{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L} \sim L$.

Покажем, что построенное отображение является однозначным, т.е. α_L единственно. Предположим, что существуют $\alpha_L^1 \neq \alpha_L^2$ такие, что:

$$\alpha_L^1 \overline{L} + (1 - \alpha_L^1)\underline{L} \sim L \text{ и } \alpha_L^2 \overline{L} + (1 - \alpha_L^2)\underline{L} \sim L.$$

Для определенности будем считать, что $\alpha_L^1 > \alpha_L^2$. Это означает, что α_L^1 дает большую вероятность $\overline{L}$ (лучшего исхода), чем α_L^2 и потому согласно утверждению 10.1 имеем

$$\alpha_L^1 \overline{L} + (1 - \alpha_L^1)\underline{L} \succ \alpha_L^2 \overline{L} + (1 - \alpha_L^2)\underline{L},$$

что в силу транзитивности предпочтений означает, что $L \succ L$. Полученное противоречие доказывает единственность α_L.

Покажем, что построенная таким образом функция $U(L) = \alpha_L$ является функцией полезности, представляющей исходные предпочтения. По построению $L \succsim L'$ равносильно тому, что $\alpha_L \overline{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L} \succsim \alpha'_L \overline{L} + (1 - \alpha'_L)\underline{L}$, а это, в свою очередь, в силу утверждения 10.1 эквивалентно $\alpha_L \geq \alpha'_L$.

Наконец, покажем, что построенная функция полезности $U(L) = \alpha_L$ имеет форму ожидаемой полезности, т.е. для любых $L, L' \in \mathfrak{I}$ и $p \in [0, 1]$ имеет место

$$U\left(pL + (1-p)L'\right) = pU(L) + (1-p)U(L'),$$

где $U(L) = \alpha_L$, а $U(L') = \alpha'_L$.

По построению функции полезности $L \sim \alpha_L \overline{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L}$. Рассмотрим комбинацию лотереи L и лотереи L' с весами p и $(1-p)$. Поскольку $p \in [0, 1]$, то в силу аксиомы независимости эквивалентность должна сохраниться и для образованных таким образом сложных лотерей, т.е.

$$pL+(1-p)L' \sim p\left(\alpha_L \overline{L}+(1-\alpha_L)\underline{L}\right)+(1-p)L'.$$

Аналогично для лотереи L' имеем $L' \sim \alpha'_L \overline{L}+(1-\alpha'_L)\underline{L}$. Рассмотрим комбинацию лотереи L' и лотереи $\alpha_L \overline{L}+(1-\alpha_L)\underline{L}$ с весами $(1-p)$ и p. Тогда по аксиоме независимости получим

$$(1-p)L'+p\left(\alpha_L \overline{L}+(1-\alpha_L)\underline{L}\right)\sim$$
$$\sim(1-p)\left(\alpha'_L \overline{L}+(1-\alpha'_L)\underline{L}\right)+p\left(\alpha_L \overline{L}+(1-\alpha_L)\underline{L}\right).$$

Поскольку, как было условлено, для агента важны лишь финальные вероятности каждого исхода, а не то, каким образом они получены, то стоящая справа лотерея эквивалентна следующей:

$$(1-p)\left(\alpha'_L \overline{L}+(1-\alpha'_L)\underline{L}\right)+\left((\alpha_L \overline{L}+(1-\alpha_L)\underline{L}\right)\sim$$
$$\sim\left((1-p)\alpha'_L+p\alpha_L\right)\overline{L}+\left((1-p)(1-\alpha'_L)+p(1-\alpha_L)\right)\underline{L}.$$

Итак, полученная цепочка эквивалентностей означает, что

$$pL+(1-p)L' \sim \left((1-p)\alpha'_L+p\alpha_L\right)\overline{L}+\left((1-p)\left(1-\alpha'_L+p(1-\alpha_L)\right)\right)\underline{L}.$$

Таким образом, согласно описанной выше процедуре построения функции полезности,

$$U\left(pL+(1-p)L'\right)=p\alpha_L+(1-p)\alpha'_L,$$

т.е. построенная функция линейна по вероятностям и, следовательно, имеет форму ожидаемой полезности. ■

Как мы знаем, обычная функция полезности является ординальной и потому допускает любые положительные монотонные преобразования. В случае функции ожидаемой полезности далеко не все такие преобразования допустимы. Сохраняющими порядок будут лишь аффинные преобразования, и потому мы можем говорить о единственности функции ожидаемой полезности с точности до аффинных преобразований.

Утверждение 10.3. Единственность функции ожидаемой полезности.

Если функция u: $\Im \to R$ — функция ожидаемой полезности фон Неймана — Моргенштерна, представляющая предпочтения, определенные на $\Im$, то $\tilde{u}$ — другая функция полезности фон Неймана — Моргенштерна, отражающая те же предпочтения на $\Im$ тогда и только тогда, когда существуют числа $\beta > 0$ и γ такие, что $\tilde{u}(L) = \beta u(L) + \gamma$ для любой $L \in \Im$.

Доказательство

Если $u(L)$ — функция ожидаемой полезности фон Неймана — Моргенштерна и $\tilde{u}(L) = \beta u(L) + \gamma$, то

$$\tilde{u}(L) = \beta u(L) + \gamma = \beta \sum_s u_s p_s + \gamma = \sum_s p_s (\beta u_s + \gamma) = \sum_s p_s \tilde{u}_s,$$

т.е. $\tilde{u}$ — функция ожидаемой полезности фон Неймана — Моргенштерна.

Докажем обратное. Если $u(\cdot)$ и $\tilde{u}(\cdot)$ имеют форму ожидаемой полезности и представляют одни и те же предпочтения, определенные на множестве $\Im$, то существуют такие числа $\beta > 0$ и γ, что $\tilde{u}(L) = \beta u(L) + \gamma$ для всех $L \in \Im$.

Пусть $\overline{L}$ — наилучшая и $\underline{L}$ — наихудшая лотерея и, таким образом, для любой лотереи $L \in \Im$ имеем $\overline{L} \succsim L \succsim \underline{L}$, что означает, что $u(\underline{L}) \le u(L) \le u(\overline{L})$. Будем считать, что $\overline{L} \succ \underline{L}$, иначе все лотереи эквивалентны и утверждение очевидно.

Рассмотрим полезность, соответствующую произвольной лотерее $L \in \Im$, тогда $u(\underline{L}) \le u(L) \le u(\overline{L})$. Соответственно можно найти число $\delta_L \in [0,\ 1]$ такое, что $u(L) = \delta_L u(\overline{L}) + (1 - \delta_L) u(\underline{L})$. Таким образом,

$$\delta_L = \frac{u(L) - u(\underline{L})}{u(\overline{L}) - u(\underline{L})}.$$

Поскольку $u(L) = \delta_L u(\overline{L}) + (1 - \delta_L) u(\underline{L})$, то $L \sim \delta_L \overline{L} + (1 - \delta_L) \underline{L}$. Так как $\tilde{u}$ представляет те же предпочтения и имеет форму ожидаемой полезности, то

$$\tilde{u}(L) = \tilde{u}\left(\delta_L + (1 - \delta_L)\underline{L}\right) = \delta_L \tilde{u}(\overline{L}) + (1 - \delta_L)\tilde{u}(\overline{L}) = \tilde{u}(\underline{L}) + \delta_L \left(\tilde{u}(\overline{L}) - \tilde{u}(\underline{L})\right).$$

Подставляя найденное выше выражение для δ_L, получаем, что

$$\tilde{u}(L)=\tilde{u}(\underline{L})+\delta_L\left(\tilde{u}(\overline{L})-\tilde{u}(\underline{L})\right)=\tilde{u}(\underline{L})+\frac{u(L)-u(\underline{L})}{u(\overline{L})-u(\underline{L})}[\tilde{u}(\overline{L})-\tilde{u}(\underline{L})]=$$

$$=u(L)\cdot\frac{\tilde{u}(\overline{L})-\tilde{u}(\underline{L})}{u(\overline{L})-u(\underline{L})}+\tilde{u}(\underline{L})\cdot\left(1-\frac{\tilde{u}(\overline{L})-\tilde{u}(\underline{L})}{u(\overline{L})-u(\underline{L})}\right)$$

или

$$\tilde{u}(L)=\beta u(L)+\gamma,$$

где $\beta=\dfrac{\tilde{u}(\overline{L})-\tilde{u}(\underline{L})}{u(\overline{L})-u(\underline{L})}>0$ и $\gamma=\tilde{u}(\underline{L})\cdot\left(1-\dfrac{\tilde{u}(\overline{L})-\tilde{u}(\underline{L})}{u(\overline{L})-u(\underline{L})}\right)$. ■

Выбор агента и теория ожидаемой полезности: проблемы несостыковки

Как было показано выше, определение функции ожидаемой полезности с теоретической точки зрения корректно, т.е. при дополнении стандартного списка предположений аксиомой независимости такая функция существует. Сама аксиома независимости также на первый взгляд вполне согласуется с интуитивными представлениями о потребительском выборе, но в действительности выбор потребителей далеко не всегда укладывается в рамки, описанные теорией. Рассмотрим классические примеры, демонстрирующие расхождения между теоретическими результатами и реальным выбором потребителей.

Пример 10.1. Парадокс Алле.

В эксперименте, описанном Алле, рассматривается выбор между двумя простыми лотереями, исходами которых являются денежные призы. Следуя Алле, представим ситуацию с тремя исходами, которым соответствуют денежным выплаты в размере 2,5 млн долл., 0,5 млн долл. и 0 долл. Потребителю сначала предлагалось сделать выбор между следующими двумя лотереями. Согласно первой лотерее он получает 0,5 млн долл. гарантированно, т.е. мы можем описать эту лотерею, как $L_1=(0,\ 1,\ 0)$. Вторая лотерея с вероятностью 0,1 принесет 2,5 млн долл., с вероятностью 0,89 выигрыш составит 0,5 млн долл. и с вероятностью 0,01 выигрыш будет равен нулю или $L_2 = (0{,}1,\ 0{,}89,\ 0{,}01)$. Обычно потребитель отдавал предпочтение первой лотерее, т.е. $L_1 \succ L_2$.

Далее тому же потребителю предлагали выбрать наилучшую из двух других лотерей $L_3 = (0,\ 0{,}11,\ 0{,}89)$ и $L_4 = (0{,}1,\ 0,\ 0{,}9)$. В этой ситуации потребитель отдавал предпочтение последней лотерее, т.е. $L_4 \succ L_3$.

Покажем, что подобный выбор противоречит теории ожидаемой полезности. Поскольку $L_1 \succ L_2$, то это означает, что

$$u(L_1) = u(0{,}5) > u(L_2) = 0{,}1u(2{,}5) + 0{,}89u(0{,}5) + 0{,}01u(0).$$

Приведя подобные слагаемые, найдем

$$0{,}11u(0{,}5) > 0{,}1u(2{,}5) + 0{,}01u(0).$$

С другой стороны, $L_4 \succ L_3$, что равносильно тому, что

$$u(L_4) = 0{,}1u(2{,}5) + 0{,}9u(0) > u(L_3) = 0{,}11u(0{,}5) + 0{,}89u(0)$$

или

$$0{,}1u(2{,}5) + 0{,}01u(0) > 0{,}11u(0{,}5).$$

Мы пришли к неравенству с обратным знаком.

Таким образом, как мы видим, выбор потребителя не всегда соответствует теории ожидаемой полезности. Данный парадокс впоследствии получил объяснение с точки зрения теории сожаления, согласно которой человек может сожалеть о том, что он упустил то, что мог бы получить гарантированно. С точки зрения теории сожаления выбор между первыми двумя лотереями в пользу L_1 продиктован тем, что эта лотерея сулит выигрыш с вероятностью, равной единице, а вторая сопряжена с риском остаться вообще без выигрыша. При выборе между двумя другими лотереями ни одна из них не гарантирует выигрыша с определенностью, поскольку óбе лотереи с некоторой вероятностью дают нулевой выигрыш. Таким образом, при выборе между L_3 и L_4 мотив сожаления не оказывает влияния на выбор индивида.

Пример 10.2. Парадокс Машина.

В данном эксперименте индивидам предлагались лотереи, исходами которых являются не денежные суммы, а определенные товары и услуги. Рассмотрим ситуацию с тремя возможными исходами, соответствующими вариантам проведения досуга: первый исход соответствует поездке в Венецию, второй — посещению кинотеатра и просмотру фильма о Венеции и третий — проведению досуга дома. Изначально индивиды ранжировали эти исходы следующим образом: самым желанным исходом они считали поездку в Венецию, затем — фильм о Венеции и наименее предпочтительным был досуг, проведенный дома. Далее этим же индивидам было предложено выбрать между следующими лотереями. Лотерея L_A сулила поездку в Венецию с вероятностью 0,999 и фильм о Венеции с вероятностью 0,1, а лотерея L_B — фильм о Венеции с вероятностью 0,999 и досуг, проведенный дома, — с вероятностью 0,1.

Можно показать, что индивид, предпочтения которого рациональны и удовлетворяют аксиоме независимости, должен был бы предпочесть лотерею L_A лотерее L_B: $L_A = (0{,}999,\ 0{,}001,\ 0) \succ L_B = (0,\ 0{,}999,\ 0{,}001)$. Однако в экспериментах индивиды иногда имели обратные предпочтения, выбирая лотерею L_B. Эти люди объясняли свой выбор тем, что в случае если они не поедут в Венецию, их предпочтения относительно двух других альтернатив поменяются, поскольку они будут настолько расстроены несостоявшейся поездкой, что фильм о Венеции лишь усугубит их состояние. Таким образом, на принятие решений может оказывать влияние и мотив *разочарования*.

Решение данных парадоксов может быть найдено в некотором ослаблении аксиомы независимости.

Несмотря на отмеченные нами противоречия между выбором потребителей и теорией ожидаемой полезности, в дальнейшем анализе мы все же будем предполагать, что аксиома независимости выполняется и соответственно предпочтения представимы с помощью функции ожидаемой полезности.

Лекция 11

Денежные лотереи и отношение к риску

Рассмотрим лотереи, исходами которых являются не потребительские наборы, а некие денежные суммы. Такие лотереи называют денежными лотереями. Сумму денег удобно рассматривать как непрерывную переменную, характеризуя ее посредством функции распределения. Мы будем считать, что теорема о существовании функции ожидаемой полезности, которая была доказана нами для конечного числа исходов, имеет место и при континууме исходов.

Итак, лотерея — случайная величина $\tilde{x}$, принимающая значения $x \in R$. Тогда мы можем описать лотерею посредством функции распределения $F(x) = \text{Prob}(\tilde{x} \leq x)$, т.е. вероятности того, что случайная величина $\tilde{x}$ примет значение, меньшее или равное x. Функция ожидаемой полезности примет вид $U(F) = \int u(x)dF(x)$. Функцию $U(\cdot)$, определяемую на лотереях, мы называем функцией полезности фон Неймана — Моргенштерна, а функцию $u(x)$, зависящую от суммы денег (богатства), принято называть *элементарной функцией полезности* или *функцией полезности Бернулли*. Далее будем считать, что $u(x)$ — непрерывная, возрастающая функция.

Определение

Будем говорить, что индивид *несклонен к риску*, если любая лотерея $F \in \Im$ для него не лучше ожидаемого выигрыша этой лотереи, $\int xdF(x)$, полученного с определенностью.

Если индивид строго предпочитает ожидаемый выигрыш самой лотерее, то говорят, что он *строго несклонен к риску* или что он является *рискофобом*.

Будем говорить, что индивид *нейтрален к риску*, если он всегда безразличен между лотереей и ее ожидаемым выигрышем, полученным с определенностью.

Будем говорить, что индивид *склонен к риску*, если он предпочитает любую лотерею $F \in \Im$ ее ожидаемому выигрышу, полученному с определенностью.

Если индивид строго предпочитает лотерею ее ожидаемой величине, то говорят, что он *строго склонен к риску* или что он является *рискофилом*. □

Если предпочтения экономического агента представимы с помощью функции ожидаемой полезности, то несклонность к риску означает, что для любой функции распределения $F(\cdot)$ выполняется соотношение

$$U(F) = \int u(x)dF(x) \le u\left(\int xdF(x)\right).$$

Это так называемое неравенство Йенсена, которое служит определением вогнутой функции, т.е. несклонность к риску эквивалентна вогнутости элементарной функции полезности $u(x)$. Для рискофоба соответственно $u(x)$ строго вогнута.

Аналогичное неравенство для склонного к риску агента будет иметь обратный знак:

$$U(F) = \int u(x)dF(x) \ge u\left(\int xdF(x)\right)$$

для любой функции распределения $F(\cdot)$. Таким образом, склонность к риску эквивалентна выпуклости элементарной функции полезности $u(x)$, а для рискофила эта функция строго выпукла.

Нейтральность к риску означает равенство ожидаемой полезности и полезности от ожидаемого выигрыша

$$U(F) = \int u(x)dF(x) = u\left(\int xdF(x)\right)$$

для любой $F(\cdot)$, что соответствует линейности $u(x)$.

Весь последующий анализ будет в основном сконцентрирован на изучении поведения агента, несклонного к риску. Для анализа поведения этого агента удобно использовать следующую концепцию *денежного эквивалента лотереи*.

Определение

Денежным эквивалентом лотереи $F(\cdot)$ будем называть сумму денег $c(F)$ (полученную с определенностью), которая приносит индивиду такую же полезность, как и данная лотерея: $u(c(F)) = \int u(x)dF(x)$. □

На рис. 11.1 изображен денежный эквивалент для лотереи с двумя исходами. Для того чтобы определить денежный эквивалент, сначала находим ожидаемую полезность лотереи $pu(x_1)+(1-p)u(x_2)$, а затем — сумму денег, приносящую такую же полезность:

$$u(c(F)) = pu(x_1)+(1-p)u(x_2).$$

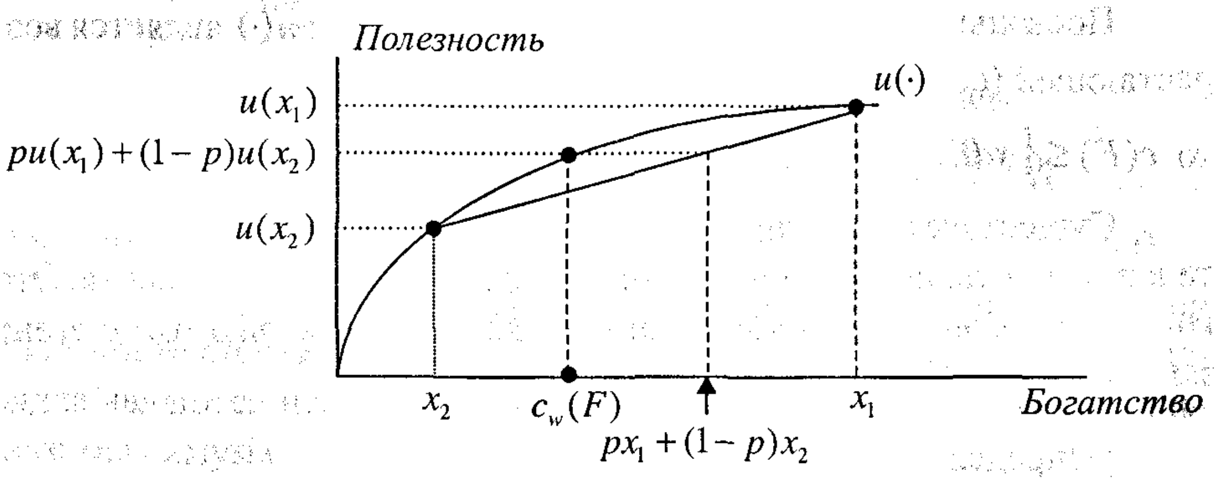


Рис. 11.1. Денежный эквивалент лотереи

Как видно из рисунка, денежный эквивалент оказался меньше ожидаемого богатства: $c(F) < px_1 + (1-p)x_2$. Можно показать, что это соотношение не случайно: для агента, несклонного к риску, денежный эквивалент лотереи никогда не превышает величины ожидаемого богатства.

Утверждение 11.1. Характеристика несклонности к риску. Для индивида, несклонного к риску, денежный эквивалент лотереи не превышает ожидаемой величины этой лотереи: $c(F) \le \int xdF(x)$ для любой $F(\cdot)$.

Доказательство

Согласно определению денежного эквивалента имеем $u(c(F)) = \int u(x)dF(x)$. Для несклонного к риску индивида ожидаемая полезность от лотереи не больше полезности от ожидаемой величины выигрыша по этой лотерее $\int u(x)dF(x) \le u\left(\int xdF(x)\right)$, что дает следующую цепочку:

$$u(c(F)) = \int u(x)dF(x) \le u\left(\int xdF(x)\right).$$

Поскольку элементарная функция полезности $u(\cdot)$ является возрастающей (согласно сделанному в начале лекции предположению), то $c(F) \le \int xdF(x)$. ∎

Существует еще одна концепция, отражающая отношение агента к риску и тесно связанная с понятием денежного эквивалента. Это концепция *премии за риск*, которая показывает, сколько готов агент заплатить за избавление от риска.

Определение

Премией за риск $\rho(F)$ для индивида, обладающего лотереей $F(\cdot)$, будем называть разницу между ожидаемым выигрышем лотереи и ее денежным эквивалентом:

$$\rho(F) = \int xdF(x) - c(F). \quad \square$$

На основе нескольких примеров покажем, как используется концепция ожидаемой полезности.

Пример 11.1. Спрос на страховку.

Рассмотрим индивида-рискофоба, предпочтения которого описываются ожидаемой функцией полезности. Пусть богатство данного агента равно w, однако существует возможность потери части этого богатства в силу наводнения. Если наводнение произойдет, то этот индивид понесет потери, равные L, $0 < L < w$. Вероятность наводнения равна p, где $p \in (0,\ 1)$. Страховая компания предлагает страховку от наводнения: единица страховки стоит γ за каждую единицу покрытия (т.е. в случае наводнения индивиду гарантируется выплата в размере 1). Пусть z единиц — это количество страховки, покупаемой индивидом. Сколько страховки купит индивид, т.е. каков спрос на страховку?

Если индивид купит z единиц страховки, то его богатство в случае наводнения составит $w - L + z - \gamma z$, а при отсутствии наводнения — $w - \gamma z$. Выбирая величину z, индивид максимизирует функцию ожидаемой полезности:

$$\max_{z \geq 0} pu(w - L - \gamma z + z) + (1 - p)u(w - \gamma z).$$

В оптимальной точке z^* будут выполняться условия:

$$pu'(w - L - \gamma z^* + z^*)(1 - \gamma) + (1 - p)u'(w - \gamma z^*)(-\gamma) \leq 0;$$

$$pu'(w - L - \gamma z^* + z^*)(1 - \gamma) + (1 - p)u'(w - \gamma z^*)(-\gamma) = 0, \text{ если } z^* > 0.$$

Заметим, что в силу строгой вогнутости функции ожидаемой полезности агента-рискофоба выписанные выше условия первого порядка являются необходимыми и достаточными условиями глобального максимума.

Будет ли решение агента внутренним или угловым, т.е. будет ли он покупать страховку или откажется от ее покупки? Ответ на этот вопрос зависит от соотношения вероятности наступления страхового случая (т.е. вероятности наводнения) и цены страховки, предлагаемой страховой компанией, а также от его отношения к риску.

Рассмотрим, например, случай актуарно справедливой страховки, т.е. такой случай, когда вероятность наступления страхового случая равна стоимости единицы страховки, $\gamma = p$. Почему такая страховка называется актуарно справедливой? Предположим, что у страховой компании нет операционных издержек и единственные издержки связаны с выплатой по полису страхования. Тогда ожидаемая прибыль фирмы равна $\gamma z - pz$ (страховая компания получает от индивида γz в качестве платы за полис и с вероятностью p выплачивает страховку z). При $\gamma = p$ ожидаемая прибыль оказывается нулевой независимо от того, сколько страховки куплено (здесь легко провести аналогию с конкурентным рынком). Заметим, что наши рассуждения верны только тогда, когда фирма точно знает вероятность наступления страхового случая, т.е., в частности, при отсутствии асимметрии информации.

Таким образом, в случае актуарно справедливой страховки условия первого порядка задачи максимизации ожидаемой полезности можно переписать в следующем виде:

$$u'\left(w-L+z^*(1-\gamma)\right)-u'(w-\gamma z^*)\le 0;$$

$$u'\left(w-L+z^*(1-\gamma)\right)-u'(w-\gamma z^*)=0, \text{ если } z^*>0.$$

Заметим, что условие первого порядка не может выполняться как строгое неравенство, т.е. z^* не может равняться нулю. Действительно, пусть для некоторого индивида $z^*=0$ (в нашей задаче индивид определен довольно «общо», поскольку нам известно только, что он несклонен к риску, но конкретный вид его функции полезности нам неизвестен). Тогда согласно условию первого порядка $u'(w-L)\le u'(w)$. С другой стороны, $w-L<w$, что с учетом убывания предельной полезности (в силу строгой вогнутости) дает противоположное по знаку неравенство: $u'(w-L)>u'(w)$. Полученное противоречие означает, что $z^*>0$.

Поскольку $z^*>0$, то условие первого порядка задачи максимизации ожидаемой полезности будет выполняться как равенство:

$$u'(w-L-\gamma z^*+z^*)=u'(w-\gamma z^*).$$

Так как функция полезности $u(\cdot)$ является возрастающей и строго вогнутой, последнее условие будет выполняться тогда и только тогда, когда аргументы функции в левой и правой части выражения равны, т.е.

$$w-L-\gamma z^*+z^*=w-\gamma z^*$$

или

$$z^*=L.$$

Итак, агент-рискофоб будет предъявлять положительный спрос на страховку и купит полную страховку, если условия страхования актуарно справедливы.

Задачу поиска оптимального уровня страховки, как будет показано далее, можно представить в терминах стандартной задачи максимизации функции полезности на бюджетном множестве, изменив понятия цен, дохода и товаров.

Пример 11.2. Спрос на рисковый актив.

Предположим, что агенту доступны лишь два актива, между которыми он может распределить свое богатство, равное w. Первый актив — безрисковый: вложив единицу в этот актив, агент получит единицу обратно, т.е. чистая доходность по данному активу равна нулю. Второй актив — рисковый, и валовая доходность этого актива является случайной величиной $\tilde{z}$, имеющей функцию распределения $F(z)$. Будем считать, что ожидаемая валовая отдача на рисковый актив превышает валовую доходность по безрисковому активу $\int z dF(z) > 1$. Обозначим через α вложения в рисковый актив. Тогда вложения в безрисковый составят $w - \alpha$. Таким образом, портфель $(\alpha,\ w - \alpha)$ имеет валовую доходность, равную $\alpha\tilde{z} + (w - \alpha)$. Будем считать, что агент имеет возможность эмитировать безрисковый актив, но не может эмитировать рисковый актив, т.е. мы не будем требовать неотрицательности спроса для безрискового актива. Вопрос в том, как агент, предпочтения которого представимы функцией ожидаемой полезности, распределит богатство между этими двумя активами.

Запишем задачу максимизации ожидаемой полезности:

$$\max_{\alpha \geq 0} \int u(\alpha(z-1) + w) dF(z).$$

Условие первого порядка для оптимального уровня вложений в рисковый актив α^* имеет вид

$$\varphi(\alpha^*) = \int (z-1) u'\big(w + \alpha^*(z-1)\big) dF(z) \leq 0,$$

и если $\alpha^* > 0$, то $u(\alpha^*) = \int (z-1) u'\big(w + \alpha^*(z-1)\big) dF(z) = 0$.

Покажем, что α^* не может быть равным нулю (т.е. агент предъявляет положительный спрос на рисковый актив). Действительно, в точке $\alpha^* = 0$ имеем

$$\varphi(\alpha^* = 0) = u'(w)\int (z-1)dF(z) = u'(w)\left(\int zdF(z) - \int dF(z)\right) > 0.$$

Поскольку $u'(w) > 0$, ожидаемая отдача на рисковый актив превышает отдачу по безрисковому активу $\left(\int zdF(z) > 1\right)$ и по определению функции распределения $\int dF(z) = 1$. Но согласно условию первого порядка должно выполняться соотношение $\varphi(\alpha^* = 0) \le 0$. Таким образом, мы пришли к противоречию, и, следовательно, $\alpha^* > 0$, т.е. несклонный к риску агент будет инвестировать в рисковый актив.

Общий принцип, проиллюстрированный примером 11.2, таков: если риск благоприятный (т.е. приносит компенсацию), то несклонный к риску индивид возьмет на себя часть риска, т.е. предпочтет диверсифицировать свой портфель.

Модель с обусловленными (контингентными) товарами и функция полезности, зависящая от состояния

Построим модель, позволяющую представить выбор в условиях неопределенности с помощью понятий, используемых в теории выбора при определенности. Так, например, перепишем задачу потребителя в традиционной постановке, как выбор наилучшего набора из бюджетного множества. Для этого нам придется модифицировать понятие товара, введя концепцию *обусловленного (контингентного) блага*.

Пусть возможно S состояний мира (или состояний природы), определяемых экзогенными факторами. Будем нумеровать эти состояния с помощью индекса $s = 1, ..., S$. Пусть объективная вероятность наступления s-го состояния равна p_s, $\sum_{s=1}^{S} p_s = 1$.

Определение

Назовем *контингентным благом* x_{is} право (контракт) на получение i-го физического блага в количестве x_{is} в случае реализации состояния мира s. □

В дальнейшем в данной лекции для простоты будем рассматривать экономику, где есть только один физический товар — деньги (мы можем трактовать этот товар как агрегированное физическое благо). В результате можно опустить индекс физического блага и записывать контингентное благо как x_s. Тогда набор $(x_1, \ldots, x_S)$ — это набор контингентных благ. Заметим, что первоначальные запасы также могут зависеть от состояния мира и потому также представляют собой набор контингентных благ $(\omega_1, \ldots, \omega_S)$.

Осталось определить предпочтения на наборах контингентных благ. Предпочтения потребителей также могут зависеть от состояния мира (например, удовольствие от отдыха на природе может зависеть от погоды). Будем считать, что предпочтения, определенные на множестве контингентных благ, представимы с помощью обобщенной функции ожидаемой полезности, где функция Бернулли зависит от состояния мира.

Определение

Рассмотрим два набора контингентных благ $x = (x_1, \ldots, x_S)$ и $x' = (x'_1, \ldots, x'_S)$. Будем говорить, что набор x не хуже набора x', $x \succsim x'$ тогда и только тогда, когда для любого $s \in S$ существует функция $u_s : R_+ \to R$:

$$\sum_s p_s u_s(x_s) \geq \sum_s p_s u_s(x'_s). \quad \square$$

Пример 11.3. Продолжение примера 11.1.

Используем модель с обусловленными товарами для описания задачи спроса на страховку, рассмотренной в примере 11.1. В рассматриваемом примере есть два состояния мира: первое — наводнение, которое приводит к потерям; обозначим это состояние индексом L (от англ. *loss* — потери) и второе состояние соответствует случаю отсутствия наводнения; обозначим его индексом NL (от англ. *no loss*). Соответственно рассмотрим два обусловленных блага: x_L — потребление в случае потерь (в результате наводнения) и x_{NL} — потребление в случае отсутствия потерь. Первоначальные запасы представляют собой следующий набор обусловленных благ $(\omega_L, \omega_{NL}) = (w - L, w)$.

Найдем потребление агента в каждом состоянии, обозначив через z величину приобретаемой страховки:

$$x_L = w - L - \gamma z + z;$$

$$x_{NL} = w - \gamma z.$$

Выразив z из второго выражения и подставив в первое, получим следующее соотношение:

$$x_L + \frac{1-\gamma}{\gamma} x_{NL} = w - L + \frac{1-\gamma}{\gamma} w.$$

Это равенство описывает доступные потребителю наборы контингентных благ и, таким образом, представляет бюджетное ограничения потребителя, где цена товара x_L равна единице, а цена товара x_{NL} равна $\frac{1-\gamma}{\gamma}$. Легко проверить, что вектор первоначальных запасов принадлежит бюджетному ограничению. Наклон бюджетного ограничения равен $\frac{dx_{NL}}{dx_L} = -\frac{\gamma}{1-\gamma}$. Таким образом, мы можем изобразить это ограничение графически как прямую с наклоном, равным $\frac{dx_{NL}}{dx_L} = -\frac{\gamma}{1-\gamma}$, проходящую через точку первоначальных запасов, как показано на рис. 11.2.

Как изобразить кривые безразличия в пространстве обусловленных товаров для агента, несклонного к риску? Поскольку его функция полезности является возрастающей и вогнутой, то множество лучших наборов будет выпуклым, т.е. кривые безразличия будут выпуклы к началу координат. Найдем наклон кривых безразличия. Если функция полезности не зависит от состояния $\left(U = pu(x_L) + (1-p)u(x_{NL})\right)$, наклон кривых безразличия равен

$$MRS\big|_{u_s = u,\ \forall s} = -\frac{dx_{NL}}{dx_L} = \frac{pu'(x_{NL})}{(1-p)u'(x_L)},$$

причем

$$MRS(x_L = x_{NL}) = \frac{p}{1-p}.$$

То есть, если на любой кривой безразличия взять точку, лежащую на линии определенности (луче, выходящем из начала координат под углом 45°), то наклон всех кривых безразличия вдоль линии определенности будет одинаков и равен соотношению вероятностей (см. рис.11.2).

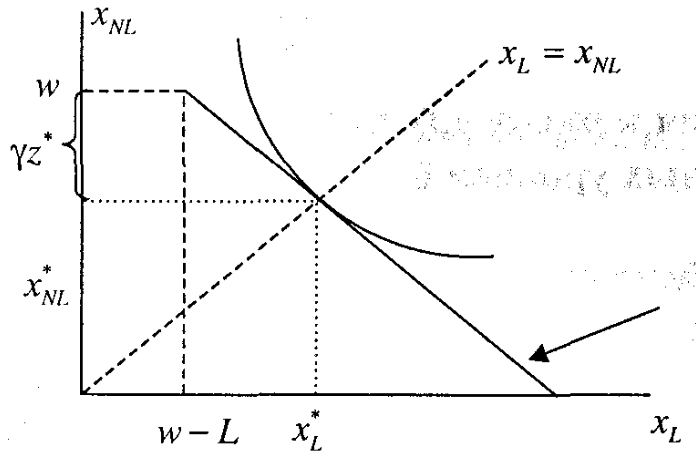


Рис. 11.2. Графическое представление задачи выбора оптимальной страховки (случай актуарно справедливой страховки)

Таким образом, если страховка актуарно справедлива $(\gamma = p)$, кривая безразличия потребителя будет касаться бюджетной линии в точке $x_L = x_{NL}$, т.е. потребитель будет страховаться полностью.

Лекция 12

Сравнительная статика инвестиционного поведения: инструменты анализа

Мы представили теорию ожидаемой полезности и продемонстрировали ее использование на нескольких примерах. Темой дальнейшего изложения является анализ сравнительной статики построенных моделей. Так, если вернуться к примеру формирования оптимального портфеля, то хотелось бы уметь прогнозировать изменение оптимального портфеля инвестора при изменении характеристик входящих в него активов и при изменении его богатства. Кроме того, интересно проанализировать, как соотносятся оптимальные портфели для агентов с разными предпочтениями. Для ответов на эти и другие вопросы нам понадобится дополнительный инструментарий, изучению которого и посвящена данная лекция.

Сравнение отношения к риску для разных индивидов и для разных уровней богатства

Первый вопрос, который будет рассмотрен, связан с отношением к риску. Если обратиться к группе агентов, которые, скажем, несклонны к риску, то внутри этой группы предпочтения агентов вовсе не обязаны совпадать. Некоторые будут относиться к риску более лояльно (их предпочтения ближе к нейтральности по отношению к риску), а другие окажутся более нетерпимыми к риску. Возникает вопрос: как измерить отношение к риску, например степень несклонности к риску? Известно, что несклонный к риску экономический агент имеет вогнутую функцию полезности, а нейтральный к риску — линейную. Поэтому интуитивно понятно, что чем более вогнута функция полезности (т.е. чем дальше она от линейности), тем выше степень несклонности к риску. Но если в качестве меры несклонности к риску использовать только $-u''(\cdot)$ (знак минус поставлен для того, чтобы получить положительную величину), то возникает проблема неустойчивости к линейным преобразованиям: эта величина для агента с одним и тем же отношением к риску будет принимать разные значения в зависимости от выбора функции полезности, представляющей эти предпочтения. Поэтому для того, чтобы мера несклонности к риску была устойчива к линейному преобразованию, мы ее пронормируем, поделив на $u'(x)$.

Определение

Коэффициентом абсолютной несклонности к риску Эрроу — Пратта $r^A(x)$ называется $r^A(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$. □

Концепция абсолютной несклонности к риску иногда дополняется другой близкой концепцией относительной несклонности к риску.

Определение

Коэффициентом относительной несклонности к риску называется $r^R(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)}x$. □

Пример 12.1. Функция полезности, обладающая свойством постоянной абсолютной несклонности к риску.

Рассмотрим функцию полезности вида $u(x) = -e^{-ax}$. Рассчитав для нее коэффициент абсолютной несклонности к риску Эрроу — Пратта, найдем, что значение этого коэффициента одинаково во всех точках:

$$r^A(x) = -\frac{-a^2e^{-ax}}{ae^{-ax}} = a.$$

Следовательно, такие функции полезности обладают **постоянным** коэффициентом абсолютной несклонности к риску.

Определение

Мы будем говорить, что агент с функцией полезности $u_2(x)$ обладает большей несклонностью к риску, чем агент с функцией полезности $u_1(x)$, если $r_1^A(x) < r_2^A(x)$, для любого x. □

Таким образом, мы можем сравнивать отношение к риску, сопоставляя значения коэффициентов Эрроу — Пратта. Однако возможны и альтернативные подходы. Напомним, что в основе построения коэффициента Эрроу — Пратта лежала идея о степени вогнутости элементарной функции полезности. Таким образом, можно напрямую сравнивать, является ли одна функция полезности более вогнутой, чем другая (т.е. оказывается ее вогнутой трансформацией). Кроме того, для сравнения отношения к риску можно использовать концепцию премии за риск (эта концепция, по сути, представляет разницу между богатством индивида и денежным эквивалентом лотереи). Ниже мы покажем, что все три предложенных подхода эквивалентны.

Утверждение 12.1. Теорема Эрроу — Пратта.

Пусть предпочтения двух агентов представимы функциями ожидаемой полезности с возрастающими, строго вогнутыми дважды непрерывно дифференцируемыми элементарными функциями полезности. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $r_1^A(x) < r_2^A(x)$ для всех x;

2) $u_2(\cdot)$ — вогнутая трансформация $u_1(\cdot)$: $u_2(x) = \varphi(u_1(x))$, где $\varphi(\cdot)$ — возрастающая, строго вогнутая функция;

3) $c_2(F) < c_1(F)$ для любой лотереи $F(\cdot)$.

Доказательство

Докажем эквивалентность первого (12.1.1) и второго (12.1.2) утверждений.

Пусть $u_2(x) = \varphi(u_1(x))$. Продифференцировав дважды левую и правую часть этого соотношения, находим

$$u_2'(x) = \varphi_u'(u_1(x))u_1'(x);$$

$$u_2''(x) = \varphi_u''(u_1(x))(u_1'(x))^2 + \varphi_u'(u_1(x))u_1''(x).$$

Поделив вторую производную на первую, получаем, что коэффициент Эрроу — Пратта для второго участника равен

$$r_2^A(x) = -\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)} = \frac{\varphi_u''(u_1(x))u_1'(x)}{\varphi_u'(u_1(x))} + r_1^A(x).$$

Тогда

$$r_2^A(x) - r_1^A(x) = -\frac{\varphi_u''(u_1(x))u_1'(x)}{\varphi_u'(u_1(x))} > 0,$$

поскольку $\varphi''_u < 0$, $\varphi'_u > 0$ и $u'_1(x) > 0$. Таким образом, мы показали, что $r_2^A(x) > r_1^A(x)$ для любого x.

Покажем, что из утверждения 12.1.2 следует 12.1.1. Построим функцию $\varphi(\cdot)$ следующим образом: $\varphi(\cdot) = u_2\left(u_1^{-1}(x)\right)$. Заметим, что обратная функция существует, поскольку $u_1(\cdot)$ по предположению является возрастающей. Тогда $\varphi(u_1(x)) = u_2\left(u_1^{-1}(u_1(x))\right) = u_2(x)$. Надо доказать, что функция $\varphi(\cdot)$ является возрастающей и строго вогнутой.

Продифференцируем функцию $\varphi(\cdot)$: $\varphi'(x)u'_1(x) = u'_2(x)$. Поскольку по условию $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ — возрастающие функции, т.е. $u'_1(\cdot) > 0$, $u'_2(\cdot) > 0$, то функция $\varphi(\cdot)$ также является возрастающей.

Далее, найдя вторую производную функции $u_2(\cdot)$ и рассмотрев отношение второй и первой производных, взятое с обратным знаком, находим, что

$$r_2^A(x) = -\frac{u''_2(x)}{u'_2(x)} = \frac{\varphi''_u(u_1(x))u'_1(x)}{\varphi'_u(u_1(x))} + r_1^A(x)$$

или

$$r_2^A(x) - r_1^A(x) = -\frac{\varphi''(x)u'_1(x)}{\varphi'(x)}.$$

Поскольку по условию $r_1^A(x) < r_2^A(x)$, то $-\dfrac{\varphi''(x)u'_1(x)}{\varphi'(x)} > 0$. Принимая во внимание, что $u'_1(\cdot) > 0$ и, как было показано выше, $\varphi'(\cdot) > 0$, заключаем, что $\varphi''(x) < 0$ для любого x, т.е. функция $\varphi(\cdot)$ строго вогнута.

Докажем эквивалентность второго (12.1(2)) и третьего (12.1(3)) утверждений.

Рассмотрим денежные эквиваленты произвольной лотереи $F(\cdot)$ для первого и второго агентов соответственно:

$$u_1(c_1(F)) = \int u_1(x)dF(x);$$

$$u_2(c_2(F)) = \int u_2(x)dF(x) = \int \varphi(u_1(x))dF(x).$$

Поскольку функция $\varphi(\cdot)$ строго вогнутая, то для нее справедливо неравенство Йенсена:

$$\int \varphi(u_1(x))dF(x) < \varphi\left(\int u_1(x)dF(x)\right).$$

Таким образом, имеем

$$u_2(c_2(F)) = \int \varphi(u_1(x))dF(x) < \varphi\left(\int u_1(x)dF(x)\right) =$$
$$= \varphi(u_1(c_1(F))) = u_2(c_1(F)).$$

Итак, мы показали, что для любой лотереи $F(\cdot)$: $u_2(c_2(F)) < u_2(c_1(F))$, а это в силу возрастания функции $u_2(\cdot)$ означает, что $c_2(F) < c_1(F)$.

Покажем, что из утверждения (12.1.3) следует (12.1.2). Итак, пусть $c_2(F) < c_1(F)$ для любой лотереи $F(\cdot)$. Надо доказать, что существует функция $\varphi(\cdot)$ такая, что $\varphi'(\cdot) > 0$, $\varphi''(\cdot) < 0$ и $u_2(x) = \varphi(u_1(x))$.

По аналогии с предыдущим пунктом построим функцию $\varphi(\cdot)$ следующим образом: $\varphi(\cdot) = u_2\left(u_1^{-1}(x)\right)$. Заметим, что обратная функция существует, поскольку $u_1(\cdot)$ по предположению является возрастающей. Тогда $\varphi(u_1(x)) = u_2\left(u_1^{-1}(u_1(x))\right) = u_2(x)$. Нужно показать, что функция $\varphi(\cdot)$ является возрастающей и строго вогнутой. Ее возрастание следует из возрастания функций $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$. Осталось доказать строгую вогнутость $\varphi(\cdot)$.

Поскольку $c_2(F) < c_1(F)$ для любой лотереи $F(\cdot)$, то это условие должно выполняться и для лотереи $\bar{F}$, которая дает выигрыш $\bar{x}$ с вероятностью α и выигрыш $\underline{x}$ с вероятностью $1-\alpha$. Будем считать, что $\bar{x} \neq \underline{x}$ и $\alpha \in (0, 1)$. Выпишем выражение для денежного эквивалента этой лотереи $\bar{F}$ для участника k:

$$u_k\left(c_k(\bar{F})\right) = \alpha u_k(\bar{x}) + (1-\alpha)u_k(\underline{x}), \quad k = 1, \ 2.$$

По условию $c_2(\bar{F}) < c_1(\bar{F})$, следовательно, в силу возрастания $u_2(\cdot)$ имеем

$$u_2\left(c_1(\bar{F})\right) > u_2\left(c_2(\bar{F})\right) = \alpha u_2(\bar{x}) + (1-\alpha)u_2(\underline{x}).$$

По построению функции $\varphi(\cdot)$ левую часть неравенства можно записать как

$$u_2\left(c_1(\bar{F})\right)=\varphi\left(u_1\left(c_1(F)\right)\right)=\varphi\left(\alpha u_1(\bar{x})+(1-\alpha)u_1(\underline{x})\right).$$

Таким образом, мы приходим к неравенству

$$\varphi\left(\alpha u_1(\bar{x})+(1-\alpha)u_1(\underline{x})\right)>$$
$$>\alpha u_2(\bar{x})+(1-\alpha)u_2(\underline{x})=\alpha\varphi\left(u_1(\bar{x})\right)+(1-\alpha)\varphi\left(u_1(\underline{x})\right)$$

или

$$\varphi\left(\alpha u_1(\bar{x})+(1-\alpha)u_1(\underline{x})\right)>\alpha\varphi\left(u_1(\bar{x})\right)+(1-\alpha)\varphi\left(u_1(\underline{x})\right).$$

Поскольку α — любое число из интервала (0, 1), а $\bar{x}$ и $\underline{x}$ — произвольные неотрицательные числа такие, что $\bar{x}\neq\underline{x}$, то полученное неравенство эквивалентно определению строгой вогнутости функции $\varphi(\cdot)$. ■

Анализ сравнительной статики выбора, в условиях неопределенности в том числе, рассматривает вопрос о том, как изменяется спрос экономических агентов на проекты, связанные с риском, при увеличении их богатства. Ответ на этот вопрос будет зависеть от того, как с ростом богатства изменяется отношение агентов к риску. Теоретически представляются возможными следующие ситуации: несклонность к риску не зависит от богатства (случай функции *CARA*), несклонность к риску возрастает с увеличением богатства и, наконец, ситуация, когда несклонность к риску убывает с ростом богатства.

Эмпирические наблюдения показывают, что с ростом богатства люди готовы брать на себя больше риска. Подобное поведение можно объяснить через соответствующее свойство коэффициента абсолютной несклонности к риску Эрроу — Пратта.

Определение

Будем говорить, что функция $u(\cdot)$ демонстрирует убывание абсолютной несклонности к риску, если $r^A(x)$ является убывающей функцией x. □

Индивиды с функциями полезности, обладающими этим свойством, будут брать на себя больше риска по мере увеличения их богатства, например, будут инвестировать все большую сумму денег в рисковый актив в ситуации, когда портфель формируется лишь из двух активов.

Утверждение 12.2. Изменение степени несклонности к риску.

Пусть предпочтения индивида представимы функцией ожидаемой полезности с возрастающей, строго вогнутой, дважды непрерывно дифференцируемой элементарной функцией полезности. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1. Функция $u(\cdot)$ демонстрирует убывание абсолютной несклонности к риску.

2. При любом $w_2 < w_1$, $u_2(z) \equiv u(w_2 + z)$ является вогнутой трансформацией функции $u_1(z) \equiv u(w_1 + z) : u_2(z) \equiv \varphi(u_1(z))$, где $\varphi(\cdot)$ — возрастающая вогнутая функция.

3. Для любой лотереи F разница между богатством потребителя и денежным эквивалентом $(w - c_w)$ убывает с ростом w, где $c_w(F) = \int u(w+z)dF(z)$.

Доказательство

Сведем доказательство данного утверждения к теореме Эрроу — Пратта, которая была доказана ранее. Для этого на основе исходной элементарной функции полезности $u(\cdot)$ искусственно построим две функции, соответствующие разным уровням первоначального богатства. Итак, рассмотрим два уровня богатства: $w_2 < w_1$. Обозначим изменение богатства (не обязательно увеличение) через z, тогда $u_1(z) \equiv u(w_1 + z)$ и $u_2(z) \equiv u(w_2 + z)$, следовательно, сравнивая $u(w_1 + z)$ и $u(w_2 + z)$, мы сравниваем $u_1(z)$ и $u_2(z)$, поэтому можно использовать все результаты, полученные при сравнении отношения к риску двух разных индивидов с одинаковым богатством (утверждение 12.1). Соответственно доказываемое утверждение с учетом проведенных построений является следствием утверждения о сравнении отношения к риску двух разных индивидов (теоремы Эрроу — Пратта), доказанного выше. ∎

Сравнение распределений в терминах риска и доходности

Итак, выше были рассмотрены инструменты, позволяющие сопоставлять отношение к риску для разных агентов и для разных уровней богатства. Помимо этих характеристик на выбор портфеля агента также влияют и сами характеристики рискового актива, который доступен агенту. Во-первых, можно рассмотреть два рисковых актива, один из которых в любом состоянии имеет более высокую валовую доходность, чем другой. Во-вторых, можно рассмотреть активы с одинаковой ожидаемой доходностью, но разным риском. Эти два принципа изменения характеристик рисковых альтернатив лежат в основе стохастического доминирования первой и второй степени, которое будет рассмотрено ниже.

Итак, будем считать, что все допустимые распределения удовлетворяют следующим условиям: $F(0)=0$ и $F(x)=1$ для некоторого x.

Определение

Будем говорить, что имеет место *стохастическое доминирование первой степени* распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$, если для любой неубывающей функции $u: R_+ \to R$ выполняется следующее:

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x). \quad \square$$

Поскольку в определении фигурирует произвольная функция $u(\cdot)$, то с этим определением сложно работать. Нам нужен простой критерий, позволяющий проверять наличие данного свойства у двух лотерей $G(\cdot)$ и $F(\cdot)$. Такой критерий сформулирован в следующем утверждении.

Утверждение 12.3. Критерий стохастического доминирования первой степени.

Стохастическое доминирование первой степени распределения над распределением $F(\cdot)$ имеет место тогда и только тогда, когда $F(x) \leq G(x)$ для любого x.

Доказательство

Рассмотрим разницу между $F(x)$ и $G(x)$, обозначив ее через $H(x) \equiv F(x) - G(x)$.

Пусть имеет место стохастическое доминирование первой степени распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$. Покажем, что тогда $H(x) \leq 0$ для любого x. Предположим, что это неверно и существует

$\bar{x} : H(\bar{x}) > 0$. Рассмотрим функцию $u(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \bar{x} \\ 1, & x > \bar{x} \end{cases}$. Поскольку функция $u(x)$ является неубывающей, то условие $\int u(x)dF(x) \ge \int u(x)dG(x)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\int u(x)dH(x) \ge 0$. С другой стороны, по определению $u(x)$, $\int u(x)dH(x) = \int dH(x) = -H(\bar{x}) < 0$, и, таким образом, мы пришли к противоречию.

Пусть $H(x) \le 0$ для любого x. Покажем, что для любой неубывающей функции $u(x)$ выполняется условие $\int u(x)dH(x) \ge 0$. Достаточно установить это свойство в предположении, что рассматриваемая функция $u(x)$ дифференцируема. Тогда, применяя интегрирование по частям, получим следующее: $\int u(x)dH(x) = u(x)H(x)\Big|_0^{\infty} - \int H(x)du(x)$. Первое слагаемое равно нулю, поскольку $H(0) = 0$ и $H(x) = 0$ для больших x. Второе слагаемое преобразуем: $\int H(x)du(x) = \int H(x)u'(x)dx$. Таким образом, надо показать, что $\int u(x)dH(x) \ge 0$ тогда и только тогда, когда $\int H(x)u'(x)dx \le 0$. По условию $H(x) \le 0$ для любого x, и поскольку $u(x)$ — неубывающая функция, то $\int H(x)u'(x)dx \le 0$. Таким образом, мы показали, что $\int u(x)dH(x) \ge 0$. ∎

Согласно доказанному выше утверждению доминирование первой степени распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$ означает, что график функции $F(\cdot)$ расположен не выше графика функции $G(\cdot)$ для любого x, как показано на рис. 12.1.

Заметим, что доминирование первой степени не означает, что доходность в любом возможном состоянии будет выше в случае лучшего распределения. Напротив, доходности (набор возможных доходностей) будут одни и те же. Заметим также, что доминирование первой степени распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$, в частности, означает, что средняя доходность при распределении $F(\cdot)$ будет выше: $\int xdF(x) > \int xdG(x)$ (это утверждение легко получить, если взять линейную функцию $u(x) = x$). Однако обратное неверно, т.е. если одно распределение дает бóльшую ожидаемую доходность, это еще не означает, что имеет место стохастическое доминирование первой степени.

Другой подход к сопоставлению распределений состоит в том, чтобы сравнивать распределения с одинаковыми ожидаемыми доходностями (одинаковым средним), но различным риском.

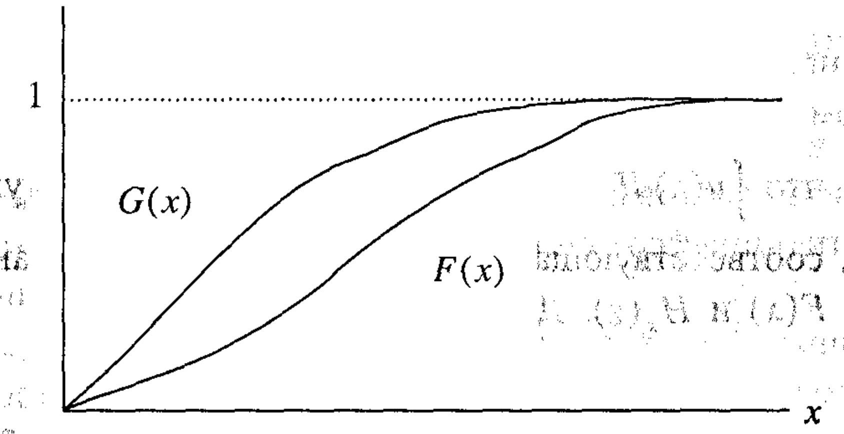


Рис. 12.1. Стохастическое доминирование первой степени распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$

Определение

Для любых двух различных распределений $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ с одинаковым средним $\left(\int xdF(x) = \int xdG(x)\right)$ будем говорить, что имеет место *стохастическое доминирование второй степени* распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$, если для любой неубывающей вогнутой функции $u(x): R_+ \to R$ выполняется следующее:

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x). \ \square$$

Пример 12.2. Увеличение разброса при добавлении риска с нулевой ожидаемой доходностью (mean-preserving spreads).

Пусть изначально есть лотерея $F(x)$. Рассмотрим сложную лотерею, которая образована путем добавления к $F(x)$ дополнительного риска. Это означает, что любой исход x в свою очередь связан с дальнейшей неопределенностью и результирующие платежи описываются случайной величиной $\tilde{x}+\tilde{z}$, причем случайная величина $\tilde{z}$ имеет функцию распределения $H_x(z)$ и характеризуется нулевым математическим ожиданием: $\int z dH_x(z)=0$. В результате матожидание случайной величины $\tilde{x}+\tilde{z}$ равно матожиданию случайной величины $\tilde{x}$, т.е. $\int\left(\int(x+z)dH_x(z)\right)dF(x)=\int xdF(x)$. Покажем, что такое изменение риска, сохраняющее математическое ожидание, дает пример стохастического доминирования второй степени. Для этого нам нужно убедиться в том, что $\int u(x)dF(x)\geq\int u(x)dG(x)$, где $G(\cdot)$ — редуцированная лотерея, соответствующая сложной лотерее, образованной при комбинации $F(x)$ и $H_x(z)$. Действительно, мы имеем

$$\int u(x)dG(x)=\int\left(\int u(x+z)dH_x(z)\right)dF(x)\leq$$
$$\leq\int u\left(\int(x+z)dH_x(z)\right)dF(x)=\int u(x)dF(x).$$

Утверждение 12.4. Критерий стохастического доминирования второй степени.

Пусть распределения $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ характеризуются одинаковым математическим ожиданием. Стохастическое доминирование второй степени распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\int_0^x F(r)dr\leq\int_0^x G(r)dr$ для любого x.

Доказательство данного факта предлагается осуществить самостоятельно.

Лекция 13

Сравнительная статика инвестиционного поведения. Обобщенная задача инвестора

Проанализировав в предыдущей лекции инструменты, используемые при анализе сравнительной статики, приступим непосредственно к их применению. Продемонстрируем использование рассмотренных теоретических концепций для анализа инвестиционного поведения.

Спрос на рисковый актив при разном богатстве

Начнем наше исследование с вопроса: как изменятся вложения в рисковый актив при увеличении богатства инвестора? Покажем, что ответ на этот вопрос зависит от поведения коэффициента абсолютной несклонности к риску $r^A(\cdot)$.

Обратимся к рассмотренной ранее задаче формирования портфеля, состоящего из двух активов: рискового и безрискового (см. пример 11.2). Напомним, что, если валовая доходность по рисковому активу выше, чем по безрисковому, то инвестиции в рисковый актив для агента-рискофоба отличны от нуля. В результате условие первого порядка в задаче инвестора выполняется в виде равенства

$$\int (z-1)u'\big(w+\alpha^*(z-1)\big)dF(z)=0.$$

Тогда по теореме о дифференцировании неявной функции находим изменение спроса на рисковый актив при увеличении богатства:

$$\frac{d\alpha^*}{dw}=-\frac{\int (z-1)u''\big(w+\alpha^*(z-1)\big)dF(z)}{\int (z-1)^2u''\big(w+\alpha^*(z-1)\big)dF(z)}.$$

Поскольку знаменатель полученного выражения в силу строгой вогнутости элементарной функции полезности отрицателен, то нам надо определить только знак числителя, т.е.

$$\operatorname{sign}\left(\frac{d\alpha}{dw}\right)=\operatorname{sign}\left(\int -(z-1)u''\left(w+\alpha^*(z-1)\right)dF(z)\right).$$

Искусственно домножив и поделив на предельную полезность, получим в подынтегральном выражении коэффициент Эрроу — Пратта:

$$\int -(z-1)u''\left(w+\alpha^*(z-1)\right)dF(z) =$$
$$=\int (z-1)r^A\left(w+\alpha^*(z-1)\right)u'\left(w+\alpha^*(z-1)\right)dF(z).$$

Рассмотрим подынтегральное выражение

$$-(z-1)u''\left(w+\alpha^*(z-1)\right)=(z-1)r^A\left(w+\alpha^*(z-1)\right)u'\left(w+\alpha^*(z-1)\right).$$

Пусть $r^A(\cdot)$ является убывающей функцией богатства, т.е. имеет место убывание абсолютной несклонности к риску. Тогда мы имеем следующие соотношения.

1. Пусть $z>1$. Поскольку $w+\alpha^*(z-1)>w$ и функция $r^A(\cdot)$ убывающая, то имеем неравенство $r^A\left(w+\alpha^*(z-1)\right)<r^A(w)$. Или, умножив левую и правую части на $(z-1)>0$, получим

$$(z-1)r^A\left(w+\alpha^*(z-1)\right)<(z-1)r^A(w).$$

2. Пусть $z<1$, тогда $r^A\left(w+\alpha^*(z-1)\right)>r^A(w)$. Заметим, что, умножив левую и правую части на $(z-1)<0$, мы придем к тому же самому неравенству, которое получили в предыдущем пункте:

$$(z-1)r^A\left(w+\alpha^*(z-1)\right)<(z-1)r^A(w).$$

Таким образом, данное неравенство имеет место при любом z, отличном от нуля, а при $z=0$ мы имеем равенство. Заметим, что если мы умножим левую и правую части неравенства на $u'\left(w+\alpha^*(z-1)\right)>0$, то знак неравенства сохранится.

Итак, мы имеем для всех $z\neq 0$

$$(z-1)r^A\left(w+\alpha^*(z-1)\right)u'\left(w+\alpha^*(z-1)\right)>(z-1)r^A(w)u'\left(w+\alpha^*(z-1)\right)$$

и равенство при $z=0$. Заметим, что в силу предположения о том, что $\int zdF(z)>1$, случайная величина z не может принимать только нулевые значения. Проинтегрировав левую и правую части последнего неравенства по z (т.е. взяв математическое ожидание от обеих частей неравенства), найдем, что

$$\int (z-1)r^A\left(w+\alpha^*(z-1)\right)u'\left(w+\alpha^*(z-1)\right)dF(z) >$$
$$> r^A(w)\int (z-1)u'\left(w+\alpha^*(z-1)\right)dF(z) = 0,$$

причем последнее равенство имеет место в силу условия первого порядка. Таким образом, мы нашли, что

$$\int (z-1)r^A\left(w+\alpha^*(z-1)\right)u'\left(w+\alpha^*(z-1)\right)dF(z) > 0.$$

Итак, $\dfrac{d\alpha}{dw} > 0$, если коэффициент несклонности к риску, $r^A(\cdot)$, убывает, и, следовательно, в этом случае рисковый актив является нормальным благом, т.е. с ростом богатства инвестиции в рисковый актив возрастают.

Аналогично можно показать, что инвестиции агента-рискофоба в рисковый актив не меняются с ростом богатства при постоянной абсолютной несклонности к риску и падают при возрастающей абсолютной несклонности к риску.

Спрос на рисковый актив при различии в степени несклонности к риску

Мы сопоставили инвестиции в рисковый актив для разных уровней богатства. Другой не менее интересный вопрос связан с тем, как различаются инвестиции в рисковый актив для двух агентов с одинаковым богатством, но разной степенью несклонности к риску. Этот вопрос мы оставляем для самостоятельного анализа и сформулируем лишь результат: инвестиции в рисковый актив будут выше для агента с меньшей степенью абсолютной несклонности к риску.

Изменение функции распределения

Для изучения влияния функции распределения на инвестиции в рисковый актив удобнее переписать задачу инвестора в терминах чистой доходности: $\tilde{r} = \tilde{z} - 1$. Тогда функцию распределения чистой доходности обозначим через $F(r)$. Условия первого порядка задачи максимизации ожидаемой полезности также можно записать в терминах чистой доходности:

$$\int ru'(w + \alpha^* r)dF(r) = 0.$$

Пример 13.1. Изменение портфеля инвестора при пропорциональном увеличении чистой доходности рискового актива.

Пусть чистая доходность в каждом состоянии изменилась пропорционально: $\tilde{r}_t = \tilde{r}(1+t)$, где $t > 0$. Тогда $F_{\tilde{r}_t}\left((1+t)r\right) = F_{\tilde{r}_t}(r_t) = F_{\tilde{r}}(r)$. В дальнейшем в функции распределения опущено обозначение случайной величины. Условия первого порядка можно переписать следующим образом:

$$\int r_t u'(w + \alpha_t^* r_t)dF(r) = 0$$

или, подставив вместо r_t выражение $r(1+t)$:

$$(1+t)\int ru'\left(w + \alpha_t^* r(1+t)\right)dF(r) = 0.$$

Поделив левую и правую часть последнего выражения на $(1+t)$, получим

$$\int ru'\left(w + \alpha_t^* r(1+t)\right)dF(r) = 0.$$

Легко заметить, что если $\alpha_t^*(1+t) = \alpha^*$, то мы имеем исходное условие первого порядка. Таким образом, мы можем заключить, что $\alpha_t^* = \dfrac{\alpha^*}{1+t}$.

Полученный результат говорит о том, что инвестор-рискофоб приспосабливается к повышению процентной отдачи на рисковый актив, уменьшая расходы на этот актив таким образом, чтобы итоговый чистый доход от этого актива не изменился. Этот результат на первый взгляд выглядит парадоксальным: ведь чистая доходность увеличилась, и в среднем актив стал более привлекательным, а в результате вложения в этот актив сократились. Однако заметим, что, несмотря на рост ожидаемой чистой доходности, в тех состояниях, где имели место потери (т.е. чистая доходность была отрицательна), эти потери возросли в $t+1$ раз. В результате пропорционального изменения чистых доходностей данный актив стал связан с большим риском (изменился разброс), что и привело к вышеописанному падению спроса.

Пример 13.2. Изменение портфеля инвестора при увеличении риска вложений и неизменной ожидаемой доходности.

Рассмотрим, как влияет на вложения в рисковый актив увеличение риска, не влияющее на ожидаемую доходность актива, а именно обратимся к исследованию влияния дополнительного риска с нулевым математическим ожиданием (случай стохастического доминирования второй степени).

Пусть чистая доходность изменяется по следующему правилу:

$$\tilde{r}' = \tilde{r} + t\left(\tilde{r} - E\tilde{r}\right), \quad E\tilde{r} = \int r dF(r), \quad t > 0.$$

Покажем, что данный пример в точности соответствует ситуации примера 12.1, т.е. отражает случай стохастического доминирования второй степени.

Действительно, при данном изменении чистых доходностей математическое ожидание не изменилось:

$$E\tilde{r}' = E\tilde{r} + tE(\tilde{r} - E\tilde{r}) = E\tilde{r} + t(E\tilde{r} - E\tilde{r}) = E\tilde{r},$$

разброс же увеличился, что можно наглядно продемонстрировать, подсчитав вариацию:

$$Var \quad \tilde{r}' = E\left(\tilde{r}' - E\tilde{r}'\right)^2 = E\left(\tilde{r}(1+t) - tE\tilde{r} - E\tilde{r}\right)^2 = E\left((1+t)(\tilde{r} - E\tilde{r})\right)^2 =$$

$$= (1+t)^2 E\left(\tilde{r} - E\tilde{r}\right)^2 = (1+t)^2 Var(\tilde{r}) > Var(\tilde{r}).$$

Как было показано выше, при пропорциональном увеличении чистой доходности $\left(\tilde{r} \to (1+t)\tilde{r}\right)$ вложения в рисковый актив сокращаются в $1+t$ раз. Вычитание постоянной величины $tE\tilde{r}$ из доходности в каждом состоянии эквивалентно сокращению богатства. Как известно, при убывании несклонности к риску падение богатства ведет к падению инвестиций в рисковый актив.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: при убывании абсолютной несклонности к риску рассмотренное повышение риска ведет к сокращению вложений в рисковый актив, причем вложения сокращаются сильнее, чем в первом случае. Заметим также, что при постоянной абсолютной несклонности к риску вложения в рисковый актив изменятся точно так же, как и в предыдущем случае.

Обобщенная задача инвестора

До сих пор, анализируя поведение инвестора, мы рассматривали ситуацию, где инвестору было доступно лишь два актива: один рисковый и один безрисковый. Однако в реальности у инвестора есть значительно большие возможности для диверсификации своих вложений, поскольку он может инвестировать в разные рисковые активы. Рассмотрим экономику, где имеется $N+1$ финансовых активов, в том числе один безрисковый актив (будем называть его нулевым) и N рисковых активов. Пусть i-й актив имеет доходность z_i, а $F(z_1, ..., z_N)$ — соответствующая функция распределения. Обозначим через α_i долю богатства, инвестируемую в i-й актив. Предполагая, как и ранее, что агент может занимать по безрисковой ставке, но не может эмитировать рисковые активы, выпишем задачу инвестора:

$$\max_{\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_N \geq 0, \alpha_0} \int u\left(w(\alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_N z_N)\right) dF(z_1, \ldots, z_N)$$

$$\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 1.$$

Следующая теорема говорит о том, какие из доступных активов войдут в оптимальный портфель инвестора-рискофоба в случае, если доходности по всем активам — независимые случайные величины.

Утверждение 13.1. Теорема Самуэльсона о диверсификации.

Пусть предпочтения инвестора представимы функцией ожидаемой полезности с возрастающей, строго вогнутой, дважды непрерывно дифференцируемой элементарной функцией полезности. Пусть доходности активов независимы и существует возможность заимствований по безрисковой ставке. Тогда любой актив j, ожидаемая доходность которого выше доходности безрискового актива $\left(\int z_j dF_j(z_j) > z_0\right)$, войдет в оптимальный портфель инвестора: $\alpha_j^* > 0$.

Доказательство

Выразим долю безрискового актива α_0 из бюджетного ограничения: $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ и подставим в целевую функцию, перейдя к задаче безусловной оптимизации:

$$\max_{\alpha_1 \geq 0,\ \ldots,\ \alpha_N \geq 0} \int u\left(w\left(z_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (z_i - z_0)\right)\right) dF(z_1,\ \ldots,\ z_N).$$

Тогда условия первого порядка для этой задачи будут иметь вид

$$\int u'\left(w\left(z_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^* (z_i - z_0)\right)\right)(z_j - z_0) dF(z_1, \ldots, z_N) \leq 0$$

$$(= 0, \text{ если } \alpha_j^* > 0).$$

Обозначая оператор математического ожидания через $E(\cdot)$, мы можем переписать условие первого порядка в следующем виде:

$$Eu'\left(w\left(z_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^* (\tilde{z}_i - z_0)\right)\right)(\tilde{z}_j - z_0) \leq 0$$

$$(= 0, \text{ если } \alpha_j^* > 0).$$

Пусть $\int z_j dF_j(z_j) > z_0$. Предположим, что актив j не входит в портфель: $\alpha_j^* = 0$. Тогда случайные величины $\tilde{z}_j$ и $\tilde{x} = w\left(z_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (\tilde{z}_i - z_0)\right)$ независимы, поскольку при $\alpha_j^* = 0$ величина $\tilde{x}$ зависит только от доходностей других активов. Следовательно,

$\tilde{z}_j$ и $u'(\tilde{x})$ также независимы (поскольку функции от независимых случайных величин также независимы). Как известно, для независимых случайных величин математическое ожидание произведения есть произведение математических ожиданий. Тогда

$$E\left(u'(\tilde{x})(\tilde{z}_j - z_0)\right) = Eu'(\tilde{x})E(\tilde{z}_j - z_0) = Eu'(\tilde{x})E\tilde{z}_j - z_0 Eu'(\tilde{x}) > 0,$$

поскольку по условию $u'(\tilde{x}) > 0$, и $E\tilde{z}_j > z_0$. Но полученное соотношение не удовлетворяет условиям первого порядка, следовательно, наше предположение неверно и $\alpha_j^* > 0$. Заметим, что в силу вогнутости элементарной функции полезности условия первого порядка являются необходимыми и достаточными. Таким образом, теорема доказана. ■

Вернемся к условиям первого порядка обобщенной задачи инвестора, но не будем предполагать независимости доходностей активов. Рассмотрим j-й актив, вошедший в портфель $(\alpha_j^* > 0)$. Тогда условие первого порядка: $Eu'(\tilde{x})(\tilde{z}_j - z_0) = 0$ можно переписать в следующем виде:

$$E\left(u'(\tilde{x})\tilde{z}_j\right) = z_0 Eu'(\tilde{x})$$

или

$$E\tilde{z}_j = z_0 - \frac{Cov\left(u'(\tilde{x}), \tilde{z}_i\right)}{Eu'(\tilde{x})}.$$

Заметим, что величина в правой части полученного выражения, характеризующая превышение ожидаемой доходности актива j над доходностью безрискового актива, называется в теории финансов премией за риск (не стоит путать с премией за риск, равной разнице между богатством и денежным эквивалентом).

Таким образом, включение актива в оптимальный портфель определяется не только его доходностью, но и величиной ковариации между предельной полезностью богатства и доходностью актива j. Например, если доходность актива положительно коррелирует с богатством, то в силу убывания предельной полезности это означает отрицательную ковариацию доходности актива с предельной полезностью богатства. И следовательно, такой актив будет включен в оптимальный портфель, только если его ожидаемая доходность превысит доходность безрискового актива, т.е. при положительной премии за риск.

Если же доходность по активу и богатство отрицательно коррелируют, то такой актив может входить в оптимальный портфель даже при отрицательной премии за риск, поскольку этот актив помогает снизить риск по богатству в целом (примером такого актива может служить страховой полис).

Лекция 14

Модель Марковица

До сих пор мы описывали выбор в условиях неопределенности как выбор между лотереями, т.е. наборами $((x_1, ..., x_S), (p_1, ..., p_S))$ — в дискретном случае или $(\tilde{x}, F(x))$ — в непрерывном. В прикладных областях экономической теории, например в теории финансов, широко используется другой подход, согласно которому выбор потребителя определяется лишь двумя характеристиками функции распределения: средним и дисперсией (среднеквадратическим отклонением), а именно, предполагается, что потребители предпочитают альтернативу с большей ожидаемой доходностью и меньшей вариацией доходности. Таким образом, предпочтения могут быть представлены кривыми безразличия, изображенными в пространстве (μ, σ), где через μ обозначено математическое ожидание доходности портфеля активов, а через σ — среднеквадратическое отклонение.

Функция полезности в модели Марковица

Покажем, что этот подход вполне согласуется с рассмотренной ранее теорией ожидаемой полезности. Интуитивно понятно, что (при прочих равных) потребитель предпочитает иметь более высокий уровень ожидаемой доходности. Кроме того, как мы видели, рискофоб не будет участвовать в справедливой игре, т.е. при одинаковой доходности безрисковый актив является предпочтительным. Тем не менее при переходе от распределения к двум его характеристикам часть информации теряется. В связи с этим возникает вопрос: при каких условиях такой подход (хотя бы в приближении) будет корректным, т.е. при каких условиях мы можем заменить функцию ожидаемой полезности на функцию от μ и σ?

Для определения этих условий рассмотрим разложение элементарной функции полезности $u(x)$ в ряд Тейлора в точке $x=\mu$:

$$u(x)=u(\mu)+\frac{u'(\mu)}{1!}(x-\mu)+\frac{u''(\mu)}{2!}(x-\mu)^2+\frac{u'''(\mu)}{3!}(x-\mu)^3+\ldots$$

Вернемся к ожидаемой полезности:

$$E\bar{u}=Eu(\tilde{x})=$$

$$=Eu(\mu)+\frac{u'(\mu)}{1!}E(\tilde{x}-\mu)+\frac{u''(\mu)}{2!}E(\tilde{x}-\mu)^2+\frac{u'''(\mu)}{3!}E(\tilde{x}-\mu)^3+\ldots=$$

$$=u(\mu)+\frac{u''(\mu)}{2}\sigma^2+\frac{u'''(\mu)}{3\ !}E(\tilde{x}-\mu)^3+\ldots,$$

поскольку по определению $E\tilde{x}=\mu$ и $E(\tilde{x}-\mu)^2=\sigma^2$.

Таким образом, мы можем трактовать ожидаемую полезность как функцию от μ и σ в следующих трех случаях.

1. Если элементарная функция полезности квадратичная: $u(x)=a_0+a_1x-a_2x^2$, где $a_1,\ a_2>0$, то $u'''(\cdot)=0$ и функция ожидаемой полезности представима в виде

$$E\bar{u}=u(\mu)+\frac{u''(\mu)}{2}\sigma^2=a_0+a_1\mu-a_2\mu^2-a_2\sigma^2=a_0+a_1\mu-a_2(\mu^2+\sigma^2),$$

поскольку $u'(\mu)=a_1-2a_2\mu$ и $u''(\mu)=-2a_2$.

Зададимся вопросом: как будут выглядеть кривые безразличия, соответствующие такой функции ожидаемой полезности, в пространстве $(\mu,\ \sigma)$? Формально кривые безразличия описываются уравнениями вида

$$E\bar{u} = a_0 + a_1\mu - a_2(\mu^2 + \sigma^2).$$

Все, кроме дисперсии, перенесем в левую часть уравнения:

$$-\sigma^2 = \frac{E\bar{u} - a_0}{a_2} + \mu^2 + \frac{a_1}{a_2}\mu = \left(\mu + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \left(\frac{E\bar{u} - a_0}{a_2} - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2\right).$$

Окончательно получаем

$$\sigma^2 + \left(\mu + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \gamma,$$

где $\gamma = \left(\frac{E\bar{u} - a_0}{a_2} - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2\right)$, т.е. кривые безразличия представляют собой окружности с центром в точке $\left(-\frac{a_1}{2a_2},\ 0\right)$ и радиусом $\sqrt{\gamma}$.

Заметим, что здесь возникает проблема, связанная с тем, что первая производная элементарной функции полезности $u'(\mu) = a_1 - 2a_2\mu$ может быть отрицательной, поэтому в качестве области определения рассматривается такой интервал, при котором $a_1 - 2a_2\mu \geq 0$.

2. Если функция распределения $F(\cdot)$ не произвольная, а соответствует нормальному распределению, то, как известно, такое распределение полностью специфицируется средним (μ) и вариацией (σ^2). Таким образом, в этом случае моменты более высокого порядка в разложении в ряд Тейлора не исчезнут, но будут являться функциями от μ и σ.

3. Как известно, согласно центральной предельной теореме сумма большого числа случайных величин имеет приближенно нормальное распределение независимо от распределения отдельных слагаемых при условии, что слагаемые не коррелируют. Таким образом, если портфель, т.е. богатство, формируется из множества активов, то мы можем считать, что ожидаемая полезность богатства зависит от μ и σ.

Это приближение будет более строгим, если, во-первых, доходности соответствующих активов ближе к нормальному распределению; во-вторых, веса активов равномерны; в-третьих, активы практически не коррелируют между собой. Заметим, что в реальности эти предположения не выполняются, а потому вопрос об обоснованности рассматриваемой спецификации функции ожидаемой полезности с точки зрения центральной предельной теоремы остается дискуссионным.

Множество допустимых портфелей в модели Марковица и задача инвестора

Итак, функция ожидаемой полезности представлена как функция от μ и σ. Опишем в тех же терминах множество допустимых портфелей.

Поскольку предполагается, что инвестор предпочитает среди всех портфелей с одинаковыми ожидаемыми доходностями наименее рисковый, то на самом деле нас интересует не все множество допустимых портфелей, а его граница, соответствующая портфелям с минимальной вариацией при данном ожидаемом доходе. Совокупность таких портфелей называют *множеством эффективных портфелей.*

Рассмотрим рисковый портфель $(v_1, \ldots, v_N)$. Обозначим ожидаемую доходность портфеля через $\bar{z}_R$. Тогда $\bar{z}_R = E\tilde{z} = \sum_{i=1}^{N} v_i E\tilde{z}_i = \sum_{i=1}^{N} v_i \bar{z}_i$,

где $\bar{z}_i$ — средняя доходность i-го актива. Обозначим вариацию портфеля σ_R^2, а ковариацию доходностей двух активов — $\sigma_{ij} = Cov(\tilde{z}_i, \tilde{z}_j)$, тогда вариация богатства равна — $\sigma_x^2 = Var(w\tilde{z}) = w^2 Var(\tilde{z}) = w^2\sigma_R^2$,

где $\sigma_R^2 = E\left(\sum_{i=1}^{N} v_i\tilde{z}_i - \sum_{i=1}^{N} v_i\bar{z}_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{N} v_i(\tilde{z}_i - \bar{z}_i)\right)^2 =$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} v_i v_j(\tilde{z}_i - \bar{z}_i)(\tilde{z}_j - \bar{z}_j)\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} v_i v_j E\big((\tilde{z}_i - \bar{z}_i)(\tilde{z}_j - \bar{z}_j)\big) =$$

$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} v_i v_j \sigma_{ij}$. Однако обычно помимо рисковых активов инвестору доступен и безрисковый. Опишем множество допустимых портфелей при наличии безрискового актива (будем считать, что это нулевой актив). Рассмотрим комбинированный портфель, состоящий из безрискового актива и данного портфеля рисковых активов $(v_1, ..., v_N)$ с долями α_0 и $1-\alpha_0$, т.е. в комбинированном портфеле доля вложений в актив $i \neq 0$ равна $\alpha_i = (1-\alpha_o)v_i$, а доля вложений в безрисковый актив равна α_0. Тогда этот портфель имеет следующие характеристики:

$$\overline{z}_p = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \overline{z}_i;$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}.$$

Покажем, что $\sigma_p = (1-\alpha_0)\sigma_R$ и $\overline{z}_p = \alpha_0 z_0 + (1-\alpha_0)\overline{z}_R$, т.е. что с такими комбинированными портфелями можно обращаться как с активами. Действительно,

$$\overline{z}_p = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \overline{z}_i = \alpha_0 z_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overline{z}_i = \alpha_0 z_0 + (1-\alpha_0)\sum_{i=1}^{N} v_i \overline{z}_i = \alpha_0 z_0 + (1-\alpha_0)\overline{z}_R;$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} = \alpha_0 \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \sigma_{0j} + \alpha_0 \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \sigma_{0i} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} =$$

$$= 0 + 0 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \big((1-\alpha_0)v_i\big)\big((1-\alpha_0)v_j\big)\sigma_{ij} = (1-\alpha_0)^2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} v_i v_j \sigma_{ij} =$$

$$= (1-\alpha_0)^2 \sigma_R^2.$$

Заметим, что функция ожидаемой полезности для рассматриваемой задачи примет вид:

$$E\overline{u} = a_0 + a_1\mu - a_2(\mu^2 + \sigma^2) = a_0 + a_1 w \overline{z}_p - a_2(w^2 \overline{z}_p^2 + w^2 \sigma_p^2).$$

Учитывая, что функция ожидаемой полезности определена с точностью до аффинного преобразования, мы можем представить данные предпочтения эквивалентным образом, вычтя константу a_0 и поделив на $a_1 w > 0$. Введя обозначение $\dfrac{a_2 w}{a_1} \equiv \delta$, запишем задачу инвестора в модели Марковица:

$$\max_{\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_N \geq 0} \left(\overline{z}_p - \delta(\overline{z}_p^2 + \sigma_p^2)\right)$$

$$\overline{z}_p \geq z_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\overline{z}_i - z_0);$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}.$$

Представим решение задачи графически для случая, когда в распоряжении инвестора имеется два рисковых актива. В зависимости от корреляции между рисковыми активами получим разные границы *множества допустимых рисковых портфелей.* На рис. 14.1 изображены случаи отсутствия корреляции $(\rho_{12} = 0)$, абсолютной положительной корреляции $(\rho_{12} = 1)$ и абсолютной отрицательной корреляции $(\rho_{12} = -1)$ двух рисковых активов.

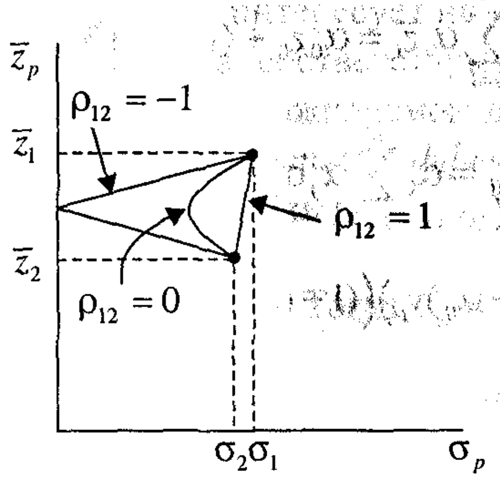


Рис. 14.1. Множество допустимых рисковых портфелей при разной корреляции между образующими его двумя рисковыми активами

В общем случае при наличии множества рисковых активов и различной корреляции между доходностями этих активов будем изображать множество допустимых портфелей как выпуклое множество (см. рис. 14.2). Комбинируя это множество с безрисковым активом, получим линейную границу множества всех допустимых портфелей, которое является выпуклым конусом с вершиной в точке $(0, z_0)$.

Кривые безразличия представляют собой окружности с центром в точке $(-0{,}5\delta,\ 0)$. Для того чтобы иметь дело с положительной предельной полезностью, будем считать, что точка насыщения лежит выше доходностей всех доступных инвестору активов. Оптимальный выбор инвестора, соответствующий касанию кривой безразличия и эффективного луча, изображен на рис. 14.2.

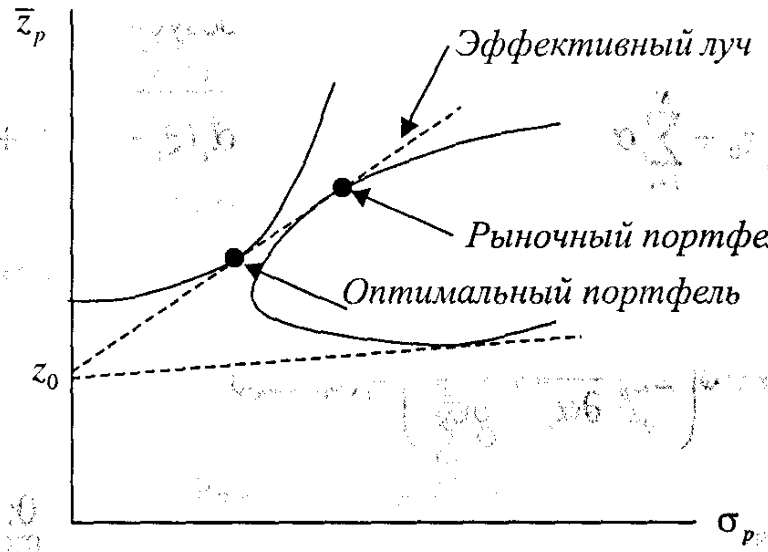


Рис. 14.2. Множество допустимых портфелей при наличии рисковых и безрискового актива

Определение

Портфель, соответствующий точке касания эффективного луча (множества эффективных портфелей) и множества рисковых портфелей, называется *рыночным портфелем.* □

Утверждение 14.1. Теорема о разделении, или Теорема о взаимных фондах.

Если всем инвесторам на рынке доступны одни и те же активы, среди которых один безрисковый актив и N рисковых активов, и функции полезности потребителей имеют вид $u^k = \overline{z}_p - \delta^k (z_p^2 + \sigma_p^2)$, причем разрешено заимствование по безрисковой ставке, но не разрешено эмитирование рисковых активов, то для каждого инвестора рискованная часть оптимального портфеля не зависит от предпочтений инвестора.

Заметим, что при этом соотношение доли безрискового актива и рыночного портфеля в оптимальном портфеле инвесторов будет варьироваться.

Доказательство

Подставляя ограничения из задачи инвестора в целевую функцию модели Марковица, перейдем к задаче с безусловным экстремумом:

$$\max_{\alpha_1 \geq 0,\ \ldots,\ \alpha_N \geq 0} z_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\overline{z}_i - z_0) - \delta\left(\left(z_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\overline{z}_i - z_0)\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}\right).$$

Условия первого порядка примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \overline{z}_p}{\partial \alpha_i} - \delta\left(2\overline{z}_p \frac{\partial \overline{z}_p}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \alpha_i}\right) = (\overline{z}_i - z_0) - \delta\left(2\overline{z}_p(\overline{z}_i - z_0) + 2\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^* \sigma_{ij}\right) =$$

$$= (1 - 2\delta\,\overline{z}_p)(\overline{z}_i - z_0) - 2\delta \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^* \sigma_{ij} \leq 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \alpha_i^* = 0 \text{ для всех } i = 1,\ \ldots,\ N.$$

Поскольку $\frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \alpha_i^* = 0$, то $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \alpha_i^* = 0$, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} (1 - 2\delta\,\overline{z}_p)(\overline{z}_i - z_0)\alpha_i - 2\delta \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sigma_{ij} \alpha_i =$$

$$= (1 - 2\delta\,\overline{z}_p)\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\overline{z}_i - z_0) - 2\delta\sigma_p^2 = (1 - 2\delta\,\overline{z}_p)(\overline{z}_p - z_0) - 2\delta\sigma_p^2 = 0,$$

откуда получим соотношение $1 - 2\delta\,\overline{z}_p = \frac{2\delta\sigma_p^2}{\overline{z}_p - z_0}$. Подставив это выражение в условие первого порядка, находим:

$$2\delta\left(\frac{\sigma_p^2(\overline{z}_i - z_0)}{\overline{z}_p - z_0} - \sum_{j=1}^{N}\alpha_j^*\sigma_{ij}\right) \le 0$$

$$(=0, \text{ если } \alpha_i^* > 0).$$

Заметим, что теперь мы можем поделить на $2\delta > 0$ и, таким образом, условия первого порядка примут вид

$$\frac{\sigma_p^2(\overline{z}_i - z_0)}{\overline{z}_p - z_0} - \sum_{j=1}^{N}\alpha_j^*\sigma_{ij} \le 0$$

$$(=0, \text{ если } \alpha_i^* > 0).$$

Перепишем условия первого порядка в терминах структуры рисковой части портфеля. Поскольку $v_i^* = \dfrac{\alpha_i^*}{\sum_{j=1}^{N}\alpha_i^*} = \dfrac{\alpha_i^*}{1-\alpha_0^*}$, то, обозначив ожидаемую доходность оптимального рискового (т.е. рыночного) портфеля через $\overline{z}_M$ и дисперсию через σ_M^2, имеем:

$$\overline{z}_p = \alpha_0^* z_0 + (1-\alpha_0^*)\overline{z}_M \text{ или } \overline{z}_p - z_0 = (1-\alpha_0^*)(\overline{z}_M - z_0);$$

$$\sigma_p^2 = (1-\alpha_0^*)^2\sigma_M^2.$$

С учетом этих соотношений условия первого порядка можно переписать как

$$\frac{(1-\alpha_0^*)^2\sigma_M^2(\overline{z}_i - z_0)}{(1-\alpha_0^*)(\overline{z}_M - z_0)} - \sum_{j=1}^{N}(1-\alpha_0^*)v_j^*\sigma_{ij} \le 0$$

$$(=0, \text{ если } v_i^* > 0)$$

или

$$\frac{\sigma_M^2(\overline{z}_i - z_0)}{(\overline{z}_M - z_0)} - \sum_{j=1}^{N}v_j^*\sigma_{ij} \le 0$$

$$(=0, \text{ если } v_i^* > 0).$$

В эти условия не входит δ, и это означает, что ни различия в доходах, ни различия в параметрах предпочтений не влияют на выбор рисковой части оптимального портфеля. Таким образом, для всех инвесторов оптимальный рисковый (рыночный) портфель $v^* = (v_1^*,\ v_2^*,\ \ldots,\ v_N^*)$, где v_i^* определяются из вышеприведенных условий первого порядка, будет совпадать.

Однако веса безрискового актива в оптимальных портфелях потребителей будут различны, поскольку они зависят от параметра δ, отражающего предпочтения и доход потребителей. Оптимальные доли безрискового актива и рыночного портфеля определяются из условия

$$1 - 2\delta\bar{z}_p = \frac{2\delta\sigma_p^2}{\bar{z}_p - z_0}.$$

Действительно, поскольку $\bar{z}_p = \alpha_0^* z_0 + (1-\alpha_0^*)\bar{z}_M$ и $\sigma_p^2 = (1-\alpha_0^*)^2\sigma_M^2$, то это условие можно переписать как

$$1 - 2\delta\left(\alpha_0^* z_0 + (1-\alpha_0^*)\bar{z}_M\right) = \frac{2\delta(1-\alpha_0^*)^2\sigma_M^2}{(1-\alpha_0^*)(\bar{z}_M - z_0)}$$

или

$$(\bar{z}_M - z_0) - 2\delta(\bar{z}_M - z_0)\left(\alpha_0^* z_0 + (1-\alpha_0^*)\bar{z}_M\right) = 2\delta(1-\alpha_0^*)\sigma_M^2,$$

откуда находим оптимальный вес безрискового актива:

$$\alpha_0^* = \frac{(\bar{z}_M - z_0)(\bar{z}_M - 0{,}5/\delta) + \sigma_M^2}{\sigma_M^2 + (\bar{z}_M - z_0)^2}. \ ■$$

Таким образом, данная теорема позволяет разделить процесс поиска оптимального портфеля на два этапа. Сначала определяется оптимальный рыночный портфель $(\sigma_M,\ \bar{z}_M)$ и соответственно находится уравнение эффективного луча $\bar{z}_p = z_0 + \dfrac{\sigma_p}{\sigma_M}(\bar{z}_M - z_0)$. Затем на данном луче в зависимости от предпочтений индивида выбирается оптимальное сочетание рыночного портфеля $(\sigma_M, \bar{z}_M)$ с безрисковым активом.

Утверждение 14.2. Аналог теоремы о диверсификации.

Если активы в модели Марковица не коррелированы, то любой актив с ожидаемой доходностью выше гарантированной, т.е. при $\overline{z}_i > z_0$ будет включен в оптимальный портфель инвестора.

Доказательство данного утверждения строится на анализе условий первого порядка задачи инвестора и предоставляется для самостоятельного упражнения.

Рекомендуемая литература

Основная

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. N.Y.: Oxford University Press, 1995. Ch. 6.

Varian H. Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 11.

Дополнительная

Jehle G., Reny Ph. Advanced Microeconomic Theory. 2nd ed. Addison-Wesley, 2000. Ch. 2—4.

Laffont J. The Economics of Uncertainty and Information. MIT Press, 1995. Ch. 1, 2.

Machina M. Choice under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved // The Journal of Economic Perspectives. 1987. 1. P. 121—154.

Pratt J. Risk Aversion in the Small and in the Large // Econometrica. 1964. 32. P. 122—136.

Rothschild M., Stiglitz J. Increasing Risk, I: A Definition // Journal of Economic Theory. 1970. 2. P. 225—243.

IV

ОБЩЕЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ И БЛАГОСОСТОЯНИЕ

Лекция 15

Частичное равновесие и общее равновесие

Модели частичного равновесия определяют цены, производство, прибыли и т.д. при предположении об отсутствии обратных эффектов. Например, анализируя влияние цены какого-то фактора производства, скажем, заработной платы, на равновесие на рынке готовой продукции, мы игнорируем влияние рынка готовой продукции на цены факторов производства, что на самом деле могло бы привести к дальнейшему приспособлению на рынке готовой продукции.

Кроме того, в моделях частичного равновесия не учитывается, как все изменения, происходящие на некотором рынке, повлияют на богатство индивидов, поскольку предполагается, что эффект богатства отсутствует. Это позволяет не только изолировать один рынок, но и судить об изменении благосостояния общества лишь по этому одному рынку, используя в качестве меры благосостояния совокупный излишек. Предпосылка о нулевом эффекте дохода, как мы знаем, имеет место в случае, если предпочтения квазилинейны, однако в реальности эта предпосылка может не выполняться.

Если бы анализ в рамках общего равновесия не изменил качественных прогнозов, полученных на основе моделей частичного равновесия, а лишь давал несколько иные количественные оценки, то его ценность была бы невелика. Однако в действительности выбор методологии зачастую имеет огромное значение и может изменить выводы о последствиях той или иной политики на диаметрально противоположные.

Обратимся к примеру, предложенному в работе Д. Брэдфорда[5], который демонстрирует, что использование частичного равновесия может привести к серьезным заблуждениям.

Рассмотрим экономику, в которой N городов (N — большое число). В каждом городе есть одна конкурентная фирма, производящая один товар, используя лишь один фактор производства — труд. Все эти фирмы не только производят идентичную продукцию, но и обладают одинаковыми технологиями, которые представимы строго вогнутой производственной функцией $f(z)$, причем $f(0) = 0$.

В экономике имеется M единиц ресурса z (труда): предполагается, что в экономике M потребителей, и каждый обладает единицей труда. Функции полезности потребителей зависят только от количества потребленного товара и не зависят от труда (или свободного времени), а потому предложение труда абсолютно неэластично. Работники могут свободно перемещаться из города в город, стремясь максимизировать свою заработную плату.

Будем считать, что цена агрегированного потребительского блага равна 1, а заработную плату в городе i обозначим через w_i.

1. Подход с точки зрения частичного равновесия

Рассмотрим внутреннее равновесие, т.е. будем считать, что в равновесии все фирмы производят ненулевой выпуск. Тогда в силу абсолютной мобильности труда заработные платы во всех городах будут оди-

[5] *Bradford D.* Factor Prices May Be Constant But Factor Returns Are Not // Economic Letters. 1978. P. 199—203.

наковыми (иначе все работники предпочли бы фирму с максимальной заработной платой, а фирмы тех городов, где зарплата ниже, остались бы без рабочих):

$$w_1 = w_2 \ldots = w_N = \overline{w}.$$

Каждая фирма наймет такое количество работников, при котором предельный продукт труда будет равен ставке заработной платы $f'(\overline{z}_i) = \overline{w}$, как изображено на рис. 15.1. В силу того что фирмы обладают идентичными технологиями, при одинаковой оплате труда на каждой фирме будет работать одно и то же количество работников: $\overline{z}_i = \overline{z}$. Учитывая, что всего имеется M единиц труда, на каждую фирму придется по $\frac{M}{N}$ работников, т.е. $\overline{z}_i = \overline{z} = \frac{M}{N}$.

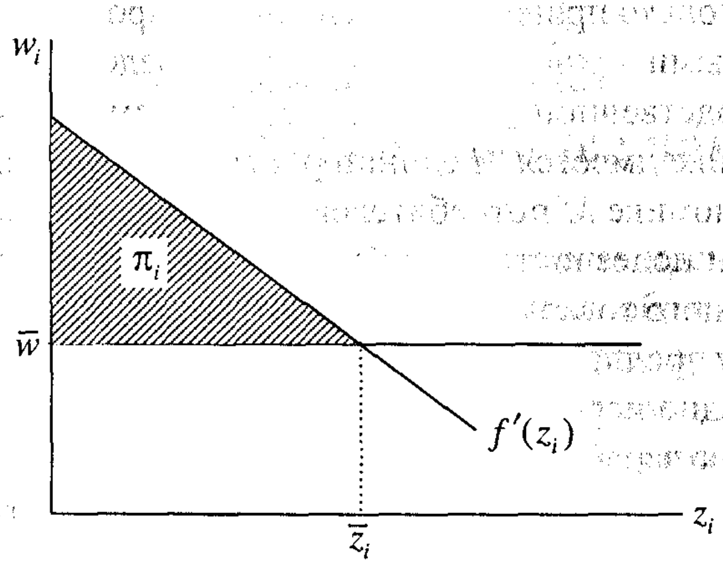


Рис. 15.1. Равновесие на рынке труда в i-м городе

Итак, в равновесии в каждом городе установится зарплата $\overline{w} = f'\left(\frac{M}{N}\right)$, и каждая фирма получит прибыль, равную

$$\pi_i = \overline{\pi} = f\left(\frac{M}{N}\right) - f'\left(\frac{M}{N}\right)\frac{M}{N} > 0.$$

Предположим, что в первом городе вводится налог на труд (который платит фирма). Мы хотим проанализировать, как налог скажется на работниках и собственниках фирм (кто и какое бремя налога будет нести).

Обозначим заработную плату при наличии налога величины t через $w_i(t)$. Тогда для первого города имеем

$$f'\big(z_1(t)\big) = w_1(t) + t.$$

Следуя подходу частичного равновесия и учитывая, что N велико, мы могли бы предположить, что ставка заработной платы $\bar{w}$ в других городах при этом осталась прежней, т.е.

$$w_2 = w_3 = \ldots = w_N = \bar{w} \text{ и } z_2 = z_1 = \ldots = z_N = \frac{M - z_1}{N-1}.$$

В силу абсолютной мобильности труда чистая (без учета налогов) заработная плата в первом городе должна быть равна заработной плате в остальных городах: $w_1 = \bar{w}$. Как мы видим из рис. 15.2, это означает, что занятость в первом городе сократится, поскольку издержки для фирмы возрастут, и спрос на работников в первом городе упадет. Это означает, что часть работников переедет в другие города.

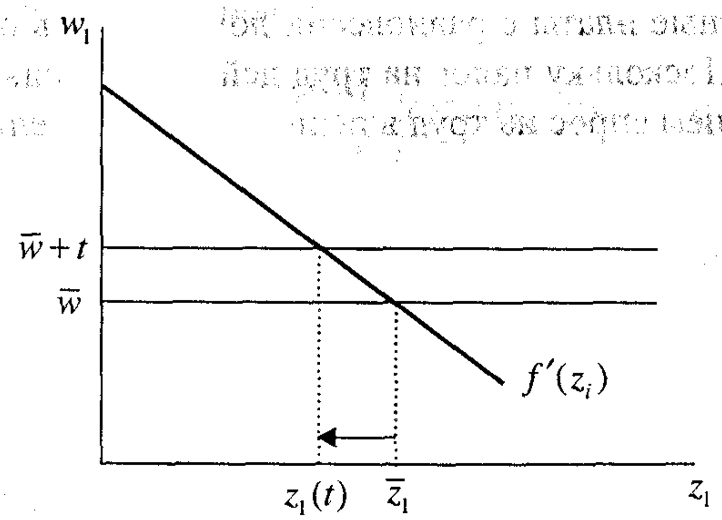


Рис. 15.2. Равновесие на рынке труда в первом городе после введения налога на труд

Итак, предполагая, что зарплата во всех остальных городах не изменилась, мы получили, что и прибыль фирм в этих городах осталась прежней. При этом прибыль первой фирмы сократилась:

$$\pi_1(t) = f\left(z_1(t)\right) - \bar{w}_1 z_1(t) - t z_1(t) < f\left(z_1(t)\right) - \bar{w}_1 z_1(t) <$$
$$< f(\bar{z}_1) - \bar{w}_1 \bar{z}_1 = \pi_1 = \bar{\pi}.$$

Для работников ситуация осталась неизменной, поскольку сохранилась прежняя заработная плата. Таким образом, собственники фирмы в первом городе несут полностью бремя налогов, а работники в силу мобильности труда и большого числа городов не несут никакого бремени. Однако данный подход, игнорируя обратные эффекты, допускает серьезную ошибку и, как будет показано ниже, на самом деле бремя налогов будут нести не владельцы фирм, а работники.

Анализ общего равновесия покажет, что распределение налогового бремени в действительности иное.

2. Подход с точки зрения общего равновесия

Выпишем систему уравнений, определяющую равновесную зарплату и занятость, учитывая, что в силу абсолютной мобильности капитала чистые заработные платы в равновесии должны быть одинаковы по всем городам. Поскольку налог на труд действует лишь в первом городе, мы выпишем спрос на труд в первом городе отдельно.

$$\begin{cases} f'\left(z_1(t)\right) = w(t) + t \\ f'\left(z_i(t)\right) = w(t) \quad \forall i \neq 1. \\ z_1(t) + \sum\limits_{i \neq 1} z_i(t) = M \end{cases}$$

Поскольку технологии и валовые заработные платы во всех городах, кроме первого, одинаковы, спрос на труд в этих городах будет совпадать: $z_i(t) = z(t),\ i \neq 1$. С учетом этого замечания система примет вид

$$\begin{cases} f'\big(z_1(t)\big) = w(t) + t \\ f'\big(z(t)\big) = w(t) \\ z_1(t) + (N-1)z(t) = M \end{cases}.$$

Рассмотрим влияние (дифференциально) малого изменения налога dt на равновесную заработную плату, считая, что первоначально налог отсутствовал $(t = 0)$:

$$\begin{cases} f''\big(z_1(0)\big)z_1'(0) = w'(0) + 1 \\ f''\big(z(0)\big)z'(0) = w'(0) \\ z_1'(0) + (N-1)z'(0) = 0 \end{cases}.$$

Заметим, что в начальной точке $t = 0$ занятость во всех городах одинакова: $z_1(0) = z(0) = \dfrac{M}{N}$.

Найдем изменение равновесной заработной платы при введении налога. Для этого выразим из последнего уравнения системы изменение занятости в первом городе, $z_1'(0) = -(N-1)z'(0)$, и подставим это выражение в первое уравнение:

$$f''\left(\frac{M}{N}\right)z_1'(0) = -f''\left(\frac{M}{N}\right)(N-1)z'(0) = w'(0) + 1.$$

С учетом того, что $f''\left(\dfrac{M}{N}\right)z'(0) = w'(0)$, найденное выражение примет вид

$$-(N-1)w'(0) = w'(0) + 1,$$

откуда имеем $w'(0) = \dfrac{-1}{N}$. Таким образом, заработная плата во всех городах упадет. Правда, с учетом того, что N велико, это падение не будет большим. Если бы это было единственным расхождением с приведенным выше анализом в рамках частичного равновесия, то данный пример не заслуживал бы особого внимания. На самом деле, следствием этого падения заработной платы являются совсем иные, нежели в вышеприведенном анализе, результаты относительно распределения налогового бремени.

Рассмотрим, как изменятся доходы владельцев фирм, т.е. проанализируем влияние налога на совокупную прибыль:

$$\left.\frac{\partial\left(\pi\left(w(t)+t\right)+(N-1)\pi\left(w(t)\right)\right)}{\partial t}\right|_{t=0}=$$

$$=\pi'\left(w(0)\right)\left(w'(0)+1\right)+(N-1)\pi'\left(w(0)\right)w'(0)=$$

$$=\pi'(\overline{w})\left(w'(0)+1+(N-1)w'(0)\right)=$$

$$=\pi'(\overline{w})\left(1-Nw'(0)\right)=\pi'(\overline{w})\left(1-\frac{N}{N}\right)=0.$$

Таким образом, совокупная прибыль не изменилась (правда, произойдет ее перераспределение), и все бремя налогов несут работники.

Заметим, что анализ частичного равновесия дал практически верный результат относительно изменения цен $\left(w'(0)=-\frac{1}{N}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0\right)$, но общий вывод оказался принципиально иным. Почему же так произошло? Как мы знаем, анализ частичного равновесия предполагает, что изменения, происходящие на рассматриваемом рынке, не влияют на остальные рынки. Это верно, если данный рынок мал и, кроме того, эффекты замещения равномерно распределяются по остальным товарам. В рассмотренном выше случае эти предпосылки не работают, поскольку труд абсолютно мобилен, и даже при небольшом отклонении заработной платы в одном из городов происходит огромный отток (приток) рабочей силы.

Модель экономики с частной собственностью

Итак, мы переходим к анализу общего равновесия, т.е. нас будут интересовать цены, при которых на всех рынках устанавливается равновесие. Сначала необходимо описать структуру экономики в целом, а именно: следует охарактеризовать пространство товаров, предпочтения и источники доходов потребителей, технологии производителей и распределение прав собственности в данной экономике. Кроме того, нужно определиться с институциональными характеристиками данной экономики.

Рассмотрим экономику, в которой каждый товар продается на совершенно конкурентном рынке, т.е. как продавцы, так и покупатели воспринимают цены как данные. Будем также предполагать, что нет проблемы асимметричной информированности, т.е. и продавцы, и покупатели обладают полной информацией о каждом товаре. Предполагается также, что при принятии решения потребители руководствуются критерием максимизации их благосостояния, а фирмы — критерием максимизацией прибыли. Все имеющиеся в экономике фирмы принадлежат потребителям и, таким образом, богатство потребителей складывается из стоимости их первоначальных запасов и прибыли принадлежащих им фирм.

Пусть в рассматриваемой экономике M потребителей $(k=1,\ 2,\ ...,\ M)$ и N товаров $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$. Каждая фирма j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ J)$, характеризуется своей технологией, описываемой с помощью производственного множества $Y_j \in R^N$. Будем считать, что производственное множество каждой фирмы Y_j непустое и замкнутое. Напомним, что описание технологии с помощью производственного множества позволяет не делить экзогенно все блага на затрачиваемые факторы производства и выпускаемую продукцию.

Каждый потребитель характеризуется рациональными предпочтениями $\overset{k}{\succsim}$, определенными на потребительском множестве $X^k \subset R^k$; обладает первоначальными запасами $\omega^k \in R^N$; имеет некие доли собственности в фирмах $\theta^k = (\theta_1^k,\ \theta_2^k,\ \ldots,\ \theta_J^k)$, где θ_j^k — доля собственности потребителя k в фирме j. В силу того что θ_j^k — доля, то $\theta_j^k \in [0,\ 1]$. Кроме того, каждая фирма должна кому-то принадлежать, это означает, что $\sum_{j=1}^{J}\theta_j^k = 1$. Все ресурсы в экономике распределены между потребителями. Обозначив запас i-го товара в экономике через $\bar{\omega}_i$, имеем $\bar{\omega}_i = \sum_{k=1}^{M}\omega_i^k$.

Итак, мы описали экономику с частной собственностью. Теперь посмотрим, как эта экономика будет функционировать при рыночной системе. Для этого необходимо сформулировать концепцию равновесия для данной экономики. Затем сравним результат функционирования рыночной экономики с результатом, которого можно было бы добиться при централизованном распределении ресурсов. Для того чтобы описать неулучшаемые распределения, нам необходимо определить, какие распределения возможны, т.е. являются допустимыми. Итак, введем необходимые понятия.

$\boxed{\text{Определение}}$

Распределением (x, y), где $x = (x^1, x^2, \ldots, x^M)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_J)$, будем называть набор, специфицирующий вектор потребления $x^k \in X^k$ для каждого потребителя $k (k = 1, 2, \ldots, M)$ и производственный вектор $y_j \in Y_j$ для каждой фирмы j $(j = 1, 2, \ldots, J)$.

Распределение (x, y) будем называть *допустимым*, если для любого товара $i (i = 1, 2, \ldots, N)$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{M} x_i^k \le \bar{\omega}_i + \sum_{j=1}^{J} y_{ji}.$$

Допустимое распределение (x, y) называется *Парето-оптимальным*, если не существует другого допустимого распределения $(\hat{x}, \hat{y})$, которое доминирует по Парето первоначальное распределение, т.е.: $\hat{x}^k \overset{k}{\succsim} x^k$ для всех k и $\hat{x}^k \overset{k}{\succ} x^k$ хотя бы для одного k. □

Сформулировав понятие Парето-оптимума, мы получаем множество решений, соответствующих централизованному механизму распределения ресурсов. Теперь обратимся к определению решений, соответствующих рыночному механизму, т.е. к определению *общего равновесия*.

Определение

Распределение $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и вектор цен $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_N) \geq 0$ $(\tilde{p} \neq 0)$ образуют *равновесие по Вальрасу* в экономике с частной собственностью, если:

1) для любого j вектор чистых выпусков $\tilde{y}_j \in Y_j$ максимизирует прибыль фирмы j на множестве Y_j, т.е. $\tilde{p}\tilde{y}_j \geq \tilde{p}y_j$ для всех $y_j \in Y_j$;

2) для любого потребителя k набор $\tilde{x}^k$ является наилучшим согласно $\overset{k}{\succsim}$ набором в бюджетном множестве:

$$\{x^k \in X^k : \tilde{p}x^k \leq \tilde{p}\omega^k + \sum_j \theta_j^k \tilde{p}\tilde{y}_j\};$$

3) для любого товара i выполняются соотношения

$$\sum_k \tilde{x}_i^k \leq \overline{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ji} \text{ и } \tilde{p}_i \left(\sum_k \tilde{x}_i^k - \overline{\omega}_i - \sum_j \tilde{y}_{ji} \right) = 0. \ \square$$

Прокомментируем приведенные в определении требования и саму концепцию вальрасовского равновесия. Первые два требования принято называть условиями рациональности потребителей и производителей соответственно. Последнее называют условием уравновешенности рынков.

Идея концепции общего равновесия состоит в том, что рыночные цены приспосабливаются таким образом, чтобы все агенты на рынке смогли при данных ценах реализовать свои желания, т.е. цены должны сбалансировать спрос и предложение на каждом рынке. Однако, как видно из третьего условия, мы требуем равенства спроса и предложения только для тех рынков, где цена товара положительна. Если же цена какого-то товара равна нулю (такой товар называют свободным благом), то достаточно, чтобы на рынке не было избыточного спроса на данный товар, а избыточное предложение в этом случае допустимо: излишек товара не противоречит интересам продавцов, поскольку в случае продажи его по нулевой цене они не получили бы от этого никакой прибыли.

Заметим, что в силу однородности нулевой степени спроса потребителей и предложения фирм равновесный вектор цен определен с точностью до положительного множителя, т.е., если $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$ — равновесие по Вальрасу для некоторой экономики, то и $(\lambda\tilde{p},\ \tilde{x},\ \tilde{y})$ тоже является равновесием по Вальрасу для этой экономики при любом $\lambda > 0$.

Утверждение 15.1. Закон Вальраса.

Если в экономике с частной собственностью все потребители имеют локально ненасыщаемые предпочтения, то для любого вектора цен $p \geq 0$, при котором определен избыточный спрос $z(p)$, совокупная стоимость избыточного спроса равна нулю $\sum_i p_i z_i(p) = 0$, где $z_i(p) = \sum_k x_i^k(p) - \overline{\omega}_i - \sum_j y_{ji}(p)$.

Доказательство

В силу локальной ненасыщаемости спрос каждого участника удовлетворяет бюджетному ограничению как равенству

$$\sum_i p_i x_i^k(p) = \sum_i p_i \omega_i^k + \sum_{j,i} \theta_j^k p_i y_{ji}(p).$$

Перенеся все слагаемые в левую часть и просуммировав по всем потребителям, находим, что

$$\sum_{k,i} p_i x_i^k(p) - \sum_{k,i} p_i \omega_i^k - \sum_k \sum_j \theta_i^k p_i y_{ji}(p) =$$

$$= \sum_{k,i} p_i x_i^k(p) - \sum_i p_i \sum_k \omega_i^k - \sum_{j,i} p_i y_{ji}(p) \sum_k \theta_j^k =$$

$$= \sum_i p_i \left(\sum_k (x_i^k(p) - \overline{\omega}_i - \sum_j y_{ji}(p) \right) = \sum_i p_i z_i(p) = 0. \ \blacksquare$$

Заметим, что в силу закона Вальраса, который верен в том числе и для равновесных векторов цен, если вектор цен уравновешивает $N-1$ рынков, то последний рынок автоматически оказывается в равновесии.

Рассмотрим простейшие примеры экономик с частной собственностью. В курсе микроэкономики промежуточного уровня мы встречались с двумя такими примерами: экономикой обмена и экономикой репрезентативного участника, которую также называют экономикой Робинзона Крузо. Покажем, что обе модели являются частными случаями рассмотренной выше экономики с частной собственностью.

Пример 15.1. Экономика обмена.

В экономике обмена отсутствует производство, а потому для того, чтобы эта экономика являлась частным случаем экономики с частной собственностью, нам необходимо доопределить производственный сектор, причем так, чтобы фирмы находили для себя выгодным ничего не производить. Это можно сделать простейшим способом, считая, что фирмы могут лишь затрачивать ресурсы, но не могут ничего произвести, т.е. для любого j производственное множество состоит из неположительных векторов чистого выпуска: $Y_j = -R_+^N$. При таких технологиях максимальная прибыль каждой фирмы будет равна нулю (фирмы не будут затрачивать ресурсы, поскольку все равно не могут ничего произвести), а значит, доли собственности в данной экономики не имеют значения.

Если в экономике обмена два потребителя и два товара, то равновесие можно представить графически с помощью «ящика» Эджворта. Размеры этого «ящика» определяются запасами товаров в экономике, а любая точка, лежащая в нем, представляет допустимое распределение ресурсов. Если мы имеем информацию о том, как выглядят кривые «цена — потребление», то равновесие можно представить как пересечение этих кривых. Соединив точку первоначальных запасов ω с точкой пересечения кривых «цена — потребление» $\tilde{x}$, мы получим бюджетные ограничения участников, наклон которых даст соответствующие данному распределению равновесные цены $\tilde{p}$, как это изображено на рис. 15.3.

Заметим, что сама точка первоначальных запасов, хотя и соответствует пересечению кривых «цена — потребление», но не является, вообще говоря, равновесием, поскольку (для нее не определен однозначно наклон бюджетной линии) эта точка может максимизировать полезность участников при разных ценах.

Теперь рассмотрим простейшую экономику с производством.

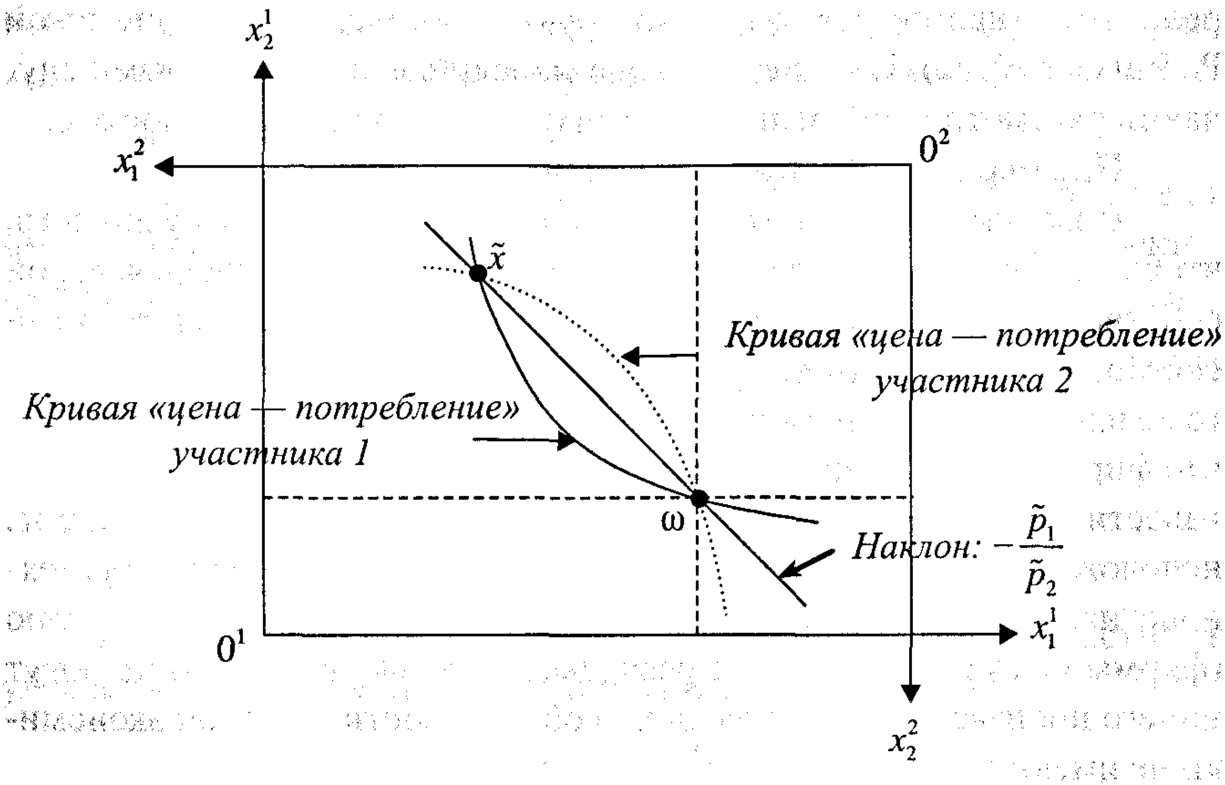


Рис. 15.3. Равновесие в экономике обмена

Пример 15.2. Экономика Робинзона Крузо.

Рассмотрим экономику с одним потребителем $(M=1)$ и двумя товарами $(N=2)$, один из которых используется для производства другого. Итак, в этой экономике товары четко подразделяются на готовую продукцию (q) и фактор производства (z). Пусть производственные возможности данной экономики представлены множеством: $Y=\{(-z,\ q): z\in R_+,\ q\le f(z)\}$, где $f(\cdot)$ — производственная функция. Будем считать, что предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u(x_1,\ x_2)$, зависящей от потребления двух благ, и потребитель имеет некий запас фактора производства $\bar{Z}$, но у него нет запаса потребительского блага, т.е. $\omega=(\bar{Z},\ 0)$. Кроме того, поскольку это единственный потребитель в экономике, то он единолично владеет вышеописанной фирмой.

Обозначим через p цену готовой продукции, а через w — цену фактора производства и выпишем задачу каждого агента, действующего в экономике. Задача производителя примет вид

$$\max_{z\ge 0} pf(z)-wz.$$

Решая эту задачу, мы найдем спрос на фактор производства $z(w, p)$, предложение готовой продукции $q(w, p)$ и функцию прибыли $\pi(w, p)$.

Задача потребителя состоит в максимизации полезности при бюджетном ограничении:

$$\max_{x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0} u(x_1, x_2)$$

$$wx_1 + px_2 \leq w\bar{Z} + \pi(w, p).$$

Решая эту задачу, мы найдем спрос на потребительское благо $x_2(w, p)$ и предложение фактора производства $(\bar{Z} - x_1(w, p))$.

Равновесием по Вальрасу в модели экономики Робинзона Крузо называется вектор цен (w^*, p^*) и распределение (x_1^*, x_2^*, z^*, q^*), которые удовлетворяют следующим условиям:

1) (z^*, q^*) — решение задачи производителя при (w^*, p^*);

2) (x_1^*, x_2^*) — решение задачи потребителя при (w^*, p^*);

3) $z^* \leq \bar{Z} - x_1^*$, $x_2^* \leq q^*$ и $w^*(z^* + x_1^* - \bar{Z}) = 0$, $p^*(x_2^* - q^*) = 0$.

Изобразим решения задач потребителя и фирмы графически (см. рис. 15.4). Зафиксируем цены и покажем при этих ценах решение задачи фирмы. Для этого на рисунке вместе с множеством производственных возможностей фирмы изобразим линии постоянной прибыли, которые описываются следующим уравнением: $q = \dfrac{\bar{\pi}}{p} + \dfrac{w}{p}z$. Как мы видим, величина прибыли для данной линии постоянной прибыли в терминах выпускаемого товара получается при пересечении этой линии с осью ординат, а ее наклон равен отношению цен фактора производства и готовой продукции. Таким образом, сдвигая линию постоянной прибыли вверх, мы увеличиваем прибыль, а потому максимум прибыли при выпуклом производственном множестве достигается в точке касания множества Y и соответствующей линии постоянной прибыли.

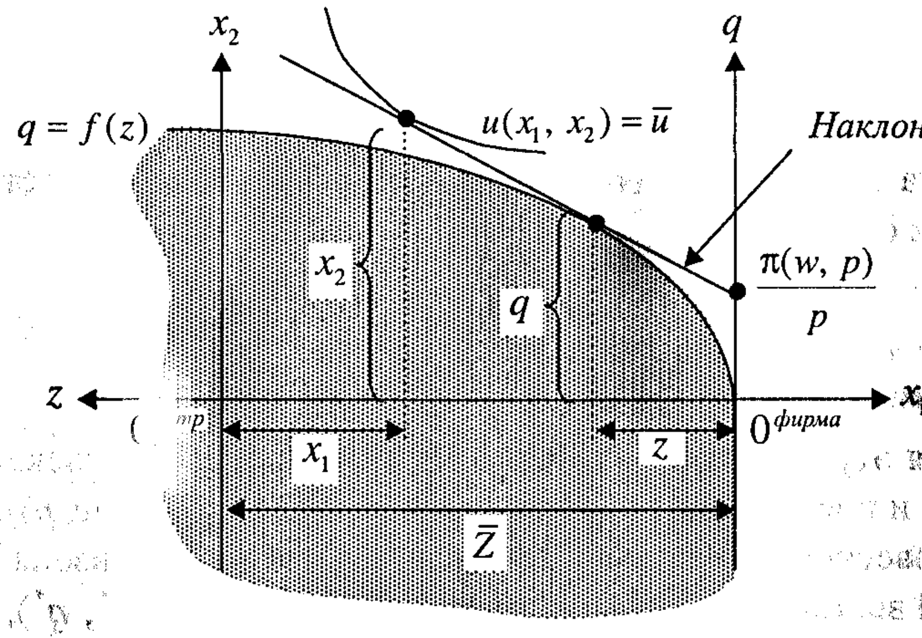


Рис. 15.4. Задача фирмы и задача потребителя в экономике Робинзона Крузо

Для того чтобы на том же рисунке показать решение задачи потребителя, необходимо понять, как будет выглядеть при тех же ценах бюджетное множество. Выразив из бюджетного ограничения x_2, находим $x_2 = \frac{w}{p}(\bar{Z} - x_1) + \frac{\pi(w, p)}{p}$. Таким образом, бюджетное ограничение будет совпадать с линией уровня, соответствующей максимальной прибыли. Осталось изобразить лишь кривые безразличия, и точка касания соответствующей кривой безразличия с бюджетным ограничением будет представлять решение задачи потребителя. Поскольку мы зафиксировали цены произвольно, то трудно было ожидать, что нам сразу удастся уравновесить рынки. Как видим, на рынке второго товара образовался избыточный спрос, поскольку $x_2 > q$, а на рынке первого товара, напротив, имеет место избыточное предложение: $x_1 + z < \bar{Z}$. Для достижения равновесия необходимо изменить цены таким образом, чтобы достичь баланса спроса и предложения (рис. 15.5).

Если выбор потребителя совпал с выбором производителя, как это изображено на рис. 15.5, то данные цены и распределение образуют равновесие в рассматриваемой экономике.

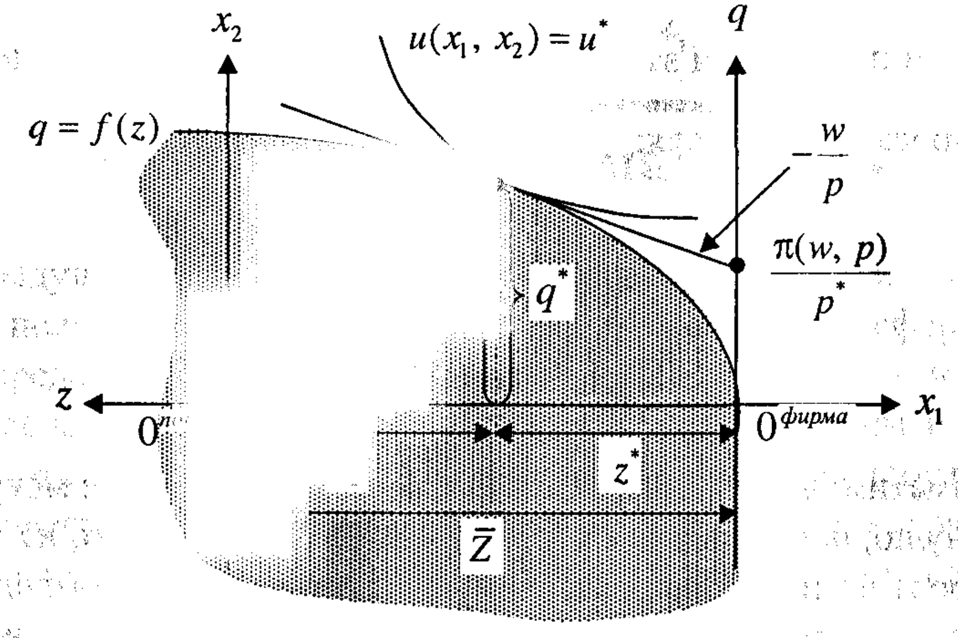


Рис. 15.5. Равновесие в экономике Робинзона Крузо

Пример 15.3. Вычисление равновесия в экономике Робинзона Крузо.

Покажем, как найти равновесие в рассмотренной выше модели аналитически. Пусть $\bar{Z} = 1$; $f(z) = 2\sqrt{z}$; $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$.

Вычислим спрос и прибыль фирмы, решая ее задачу $\max\limits_{z \geq 0}(2\sqrt{z} - wz)$.

Поскольку условие первого порядка $\frac{p}{\sqrt{z}} = w$ является в силу вогнутости функции $f(\cdot)$ необходимым и достаточным условием решения задачи, то спрос на фактор $z(w, p) = \left(\frac{p}{w}\right)^2$ и функция прибыли фирмы имеет вид $\pi(w, p) = \frac{2p^2}{w} - \frac{p^2}{w} = \frac{p^2}{w}$.

Поскольку предпочтения потребителя представимы функцией полезности Кобба — Дугласа, то, воспользовавшись тем, что в данном случае расходы на каждый товар являются фиксированной долей в доходе потребителя и, более того, в силу равенства коэффициентов в функции полезности эти доли одинаковы и равны $\frac{1}{2}$, найдем функции спроса потребителя:

$$x_1(w,\ p) = \frac{I}{2w} = \frac{1}{2}\left[\bar{Z} + \frac{\pi(w,\ p)}{w}\right];$$

$$x_2(w,\ p) = \frac{I}{2p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{w\bar{Z} + \pi(w,\ p)}{p}.$$

Заметим, что в данном случае равновесные цены не могут быть равны нулю, поскольку при нулевой цене хотя бы одного из товаров (факторов) не имеет решения задача потребителя (производителя). Итак, если равновесие существует, то избыточный спрос должен быть равен нулю. Условие равновесия на рынке второго товара примет вид

$$x_2(w,\ p) = 2\sqrt{z(w,\ p)}$$

или

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{w\bar{Z} + \frac{p^2}{w}}{p} = \frac{2p}{w}.$$

Обозначим $\frac{w}{p} = \alpha$ и найдем равновесные цены из решения уравнения

$\alpha\bar{L} + \frac{1}{\alpha} = \frac{4}{\alpha}$. Итак, $\alpha\bar{Z} = \frac{3}{\alpha}$ или $\alpha = \frac{w}{p} = \sqrt{\frac{3}{\bar{Z}}} = \sqrt{3}$. Заметим, что равновесие на другом рынке установится автоматически в силу закона Вальраса. Подставив найденные цены в соответствующие функции спроса (предложения), найдем равновесное распределение $\left(x_2 = 2\sqrt{z} = \frac{2p}{w} = \frac{2}{\sqrt{3}},\ z = \left(\frac{p}{w}\right)^2 = \frac{1}{3}\right)$. Итак, равновесие имеет вид:

$\frac{w}{p} = \sqrt{3}, x = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), y = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$

Лекция 16

Равновесие и оптимальность

В предыдущей лекции мы обсудили необходимость анализа экономической политики в рамках моделей общего равновесия и сформулировали определение равновесия по Вальрасу. Дальнейший анализ общего равновесия пойдет по двум направлениям. С одной стороны, необходимо убедиться в том, что сформулированное определение внутренне не противоречиво, т.е. в том, что (при некоторых условиях) вальрасовское равновесие существует. С другой стороны, интересно исследовать общее равновесие с точки зрения нормативного анализа.

Нас будет интересовать вопрос сопоставления тех распределений, к которым приводит рынок, с теми распределениями, которые могли бы быть достигнуты с помощью централизованного планирования. Подобное сопоставление предполагает два вопроса, на которые мы попытаемся ответить в данной лекции. 1. Будет ли равновесное распределение желаемым для общества или, иными словами, будет ли равновесное распределение Парето-оптимальным? 2. Верно ли обратное, т.е. можно ли получить любое Парето-оптимальное распределение с помощью рыночного механизма? Ответ на первый вопрос дает первая теорема экономики благосостояния, которая по своей сути является формализацией идеи А. Смита о «невидимой руке» рынка.

Утверждение 16.1. Первая теорема благосостояния.

Если в экономике с частной собственностью все потребители имеют локально ненасыщаемые предпочтения и набор $(\tilde{x},\ \tilde{y},\ \tilde{p})$ является равновесием по Вальрасу, то распределение $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ Парето-оптимально.

Доказательство

Заметим, что равновесное распределение всегда является допустимым в силу условий сбалансированности рынков. Докажем, что это распределение не улучшаемо по Парето.

Предположим, что это не так и существует другое допустимое распределение $(\hat{x}, \hat{y})$, которое лучше по Парето, чем $(\tilde{x}, \tilde{y})$, т.е.: $\hat{x}^k \overset{k}{\succsim} \tilde{x}^k$ для всех $k = 1, \ldots, M$ и $\hat{x}^k \overset{k}{\succ} \tilde{x}^k$ хотя бы для одного потребителя.

Покажем, что в силу локальной ненасыщаемости набор $\hat{x}^k$ должен стоить в равновесных ценах $\tilde{p}$ не меньше, чем стоил набор $\tilde{x}^k$, т.е.: $\tilde{p}\hat{x}^k \geq \tilde{p}\tilde{x}^k$. Предположим, что это неверно и $\tilde{p}\hat{x}^k < \tilde{p}\tilde{x}^k$. Это означает, что $\tilde{p}\hat{x}^k < I^k$, т.е. набор $\hat{x}^k$ лежит внутри бюджетного множества k-го участника. Тогда существует окрестность точки $\hat{x}^k$, которая целиком лежит в бюджетном множестве. Согласно предположению о локальной ненасыщаемости предпочтений в этой окрестности должен быть набор, который строго лучше, чем данный, но это противоречит тому, что $\tilde{x}^k$ — наилучший набор для k-го участника при ценах $\tilde{p}$. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение было неверно и $\tilde{p}\hat{x}^k \geq \tilde{p}\tilde{x}^k$.

Рассмотрим потребителя, для которого имеет место строгое предпочтение $\hat{x}^k \overset{k}{\succ} \tilde{x}^k$. Для такого участника набор $\hat{x}^k$ стоит строго больше, чем $\tilde{x}^k : \tilde{p}\hat{x}^k > \tilde{p}\tilde{x}^k$. Это объясняется тем, что если бы набор $\hat{x}^k$ был доступен потребителю при ценах $\tilde{p}$, то потребитель не должен был бы выбрать $\tilde{x}^k$. Поскольку этого не произошло, значит, $\hat{x}^k$ не был доступен, т.е. стоил больше дохода потребителя: $\tilde{p}\hat{x}^k > I^k = \tilde{p}\tilde{x}^k$. Итак, для всех потребителей мы имеем нестрогие неравенства $\tilde{p}\hat{x}^k \geq \tilde{p}\tilde{x}^k$ и хотя бы для одного строгое $\tilde{p}\hat{x}^k > \tilde{p}\tilde{x}^k$. Суммируя эти неравенства по всем потребителям, с учетом строгого неравенства хотя бы для одного, получаем

$$\sum_k \tilde{p}\hat{x}^k > \sum_k \tilde{p}\,\tilde{x}^k = \sum_k \tilde{p}\omega^k + \sum_k \sum_j \theta_j^k \tilde{p}\tilde{y}_j =$$
$$= \sum_k \tilde{p}\omega^k + \sum_j \tilde{p}\tilde{y}_j \sum_k \theta_j^k = \sum_k \tilde{p}\omega^k + \sum_j \tilde{p}\tilde{y}_j.$$

Поскольку $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p})$ — равновесие, то для любой фирмы $j = 1, \ldots, J$ вектор $\tilde{y}_j$ дает максимальную прибыль на производственном множестве при ценах $\tilde{p}$. Это означает, что для любого другого вектора чистых выпусков из производственного множества фирмы прибыль не может быть выше, в том числе и для $\hat{y}_j$: $\tilde{p}\tilde{y}_j \geq \tilde{p}\hat{y}_j$. С учетом этого факта мы можем переписать выведенное выше неравенство как

$$\sum_k \tilde{p}\hat{x}^k > \sum_k \tilde{p}\omega^k + \sum_k \tilde{p}\tilde{y}_j \geq \sum_k \tilde{p}\omega^k + \sum_j \tilde{p}\hat{y}_j.$$

Покажем, что это строгое неравенство противоречит допустимости распределения $(\hat{x}, \hat{y})$. Действительно, из допустимости $(\hat{x}, \hat{y})$ для любого $i=1, \ldots, N$ имеем $\sum_k \hat{x}^k \leq \sum_k \omega_i^k + \sum_j \hat{y}_{ij}$. Домножим каждое неравенство на цену соответствующего товара $(\tilde{p}_i)$ и просуммируем по всем товарам:

$$\sum_i \sum_k \tilde{p}_i \hat{x}_i^k \leq \sum_i \sum_k \tilde{p}_i \omega_i^k + \sum_i \sum_j \tilde{p}_i \hat{y}_{ij}.$$

Таким образом, мы получили два неравенства с обратными знаками, что означает ложность сделанного ранее предположения о том, что распределение $(\tilde{x}, \tilde{y})$ может быть улучшено. ■

Обсудим предпосылки, при которых была доказана первая теорема благосостояния. Эти предпосылки можно разделить на две группы. К первой относятся институциональные характеристики среды, о которых мы договорились в самом начале, приступая к обсуждению общего равновесия. Ко второй следует отнести технические предпосылки, связанные с определенными ограничениями, налагаемыми на характеристики агентов в модели.

Напомним предпосылки относительно институциональных особенностей экономики. Мы договорились рассматривать конкурентную экономику, где ни покупатели, ни продавцы не влияют на цены. Кроме того, мы рассматриваем экономику, где имеет место полная и симметричная информированность участников обо всех релевантных характеристиках экономики (потребители знают цены и характеристики благ и т.д.) и существует рынок для каждого товара (т.е. с полной системой рынков). Что происходит с равновесием при отбрасывании какой-либо из этих предпосылок, обсудим позже, когда будем рассматривать равновесие при наличии экстерналий, общественных благ и равновесие в условиях асимметричной информации. Однако уже на данном этапе мы можем спрогнозировать появление определенных проблем с оптимальностью равновесного распределения при подобных модификациях модели вальрасовского равновесия.

С точки зрения технических предпосылок в данной теореме фигурирует предпосылка о локальной ненасыщаемости предпочтений, причем это предположение является лишь достаточным условием и может быть несколько ослаблено. Продемонстрируем на простом примере роль этой предпосылки.

Пример 16.1. Роль условия локальной ненасыщаемости в первой теореме благосостояния.

Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями и двумя товарами. Пусть предпочтения одного из участников, скажем, первого, не совсем обычны: одна из кривых безразличия выглядит как полоска, заштрихованная на рис. 16.1. Это означает, что потребитель не проводит различия между некоторой корзиной и ее небольшими вариациями, в результате чего кривая безразличия становится «толстой». Будем считать, что предпочтения второго участника представимы кривыми безразличия обычного вида, изображенными на той же картинке.

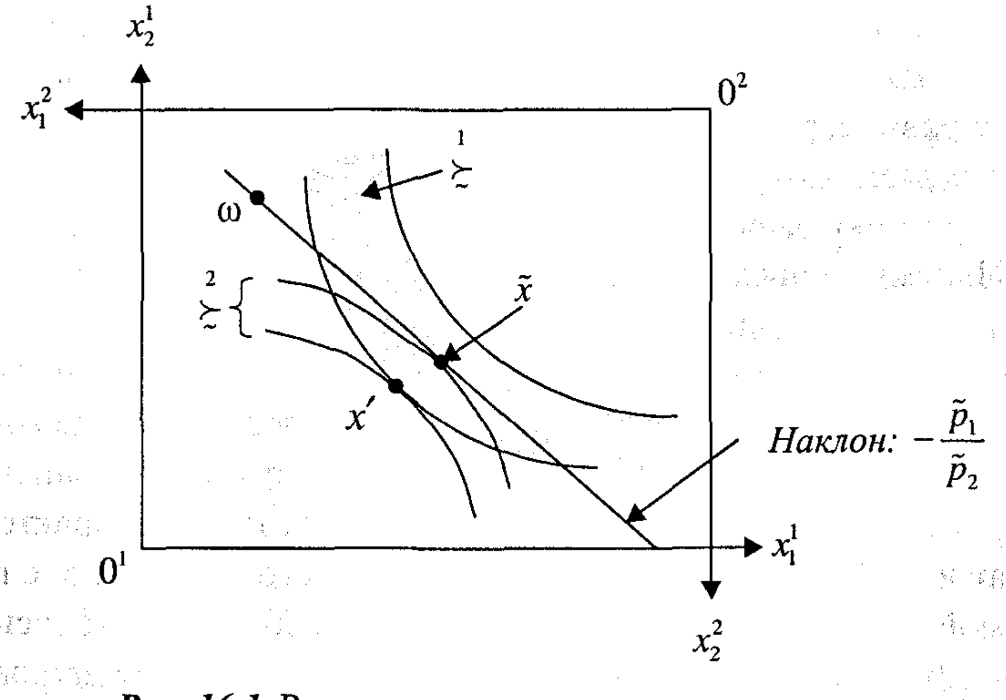


Рис. 16.1. Равновесное распределение, которое не является Парето-оптимальным

На рисунке изображено распределение $\tilde{x}$, которое является равновесным при векторе цен $p = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$. Действительно, в точке $\tilde{x}$ имеет место касание кривой безразличия и бюджетного ограничения для второго участника и, с другой стороны, эта точка является одной из точек выбора для первого участника. Условия балансов на рынках выполнены автоматически, поскольку это допустимое распределение по построению «ящика» Эджворта. Итак, $\tilde{x}$ — равновесное распределение, однако несложно убедиться в том, что оно не является Парето-оптимальным. Например, в допустимом распределении x' благосостояние первого участника остается неизменным, а благосостояние второго потребителя улучшается. Это означает, что исходное распределение $\tilde{x}$ было неэффективным. Подобный результат никак не противоречит доказанной выше теореме. Причина неэффективности равновесия в данном случае кроется в специфических предпочтениях первого участника, которые не удовлетворяют свойству локальной ненасыщаемости.

Эффективных распределений обычно много, и они различаются между собой соответствующими им уровнями благосостояния потребителей. Предположим, что общество заинтересовано в достижении определенного Парето-оптимального распределения. Можно ли достичь этого распределения не посредством централизованного распределения ресурсов, а с помощью рыночного механизма? Поскольку нас интересует конкретное Парето-оптимальное распределение, то вряд ли рынок сам приведет к нему без какого-либо вмешательства государства, однако хотелось бы это вмешательство минимизировать.

Простейший способ повлиять на равновесие — изменить первоначальные запасы. Однако трудно и не всегда возможно перераспределить сами первоначальные запасы, т.е. перераспределить наделенность индивидов товарами и (или) услугами. Например, невозможно перераспределить бюджет времени потребителей, который экономисты трактуют как запас труда. Можно попытаться осуществить перераспределение через систему налогов и субсидий. В дальнейшем такое равновесие, которое соответствует не исходным первоначальным запасам, а запасам с учетом перераспределения доходов через паушальные налоги и субсидии, будем называть *равновесием в экономике с трансфертами.* Всегда ли мы сможем получить желаемое эффективное распределение как равновесие в экономике с трансфертами? Рассмотрим несколько примеров, которые показывают, что далеко не всегда можно добиться поставленной цели.

Например, если предпочтения участника не являются выпуклыми, то Парето-оптимальное распределение может быть не достижимо как равновесие с трансфертами.

Пример 16.2. Экономика с невыпуклыми предпочтениями.

Рассмотрим экономику обмена с двумя товарами и двумя потребителями, в которой первый потребитель имеет невыпуклые предпочтения, а предпочтения другого участника выпуклы (см. рис. 16.2).

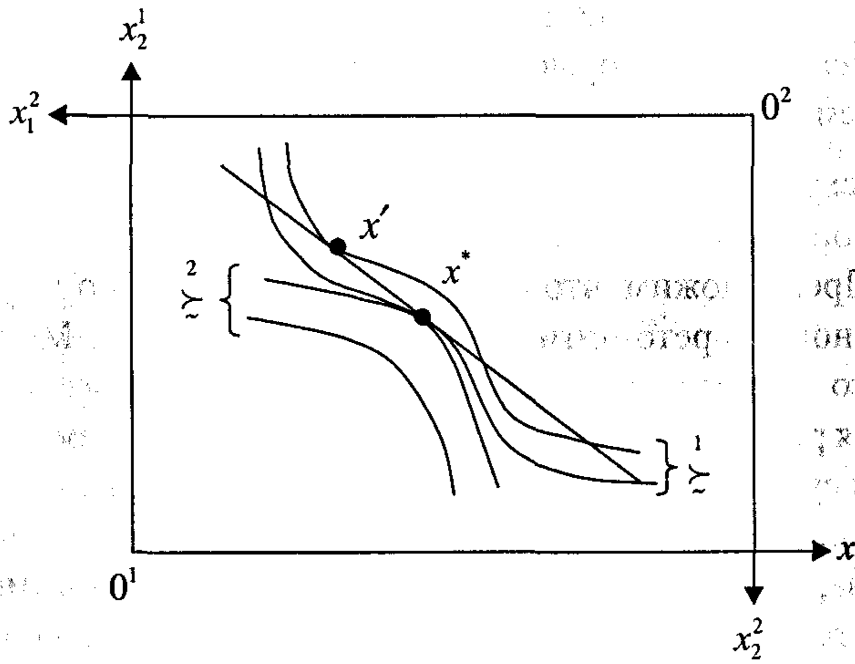


Рис. 16.2. Парето-оптимальное распределение в «ящике» Эджворта, которое не может быть реализовано как равновесие в экономике с трансфертами

Распределение x^* является Парето-оптимальным. Покажем, что тем не менее его нельзя реализовать как равновесие ни при каких первоначальных запасах. Поскольку рассматриваемое распределение внутреннее, а предпочтения второго участника выпуклы, то эта точка будет наилучшей для второго участника лишь при условии, если бюджетное ограничение будет касаться кривой безразличия второго потребителя в этой точке. Однако при этих ценах первый потребитель выберет набор, соответствующий точке x', и в результате в экономике будет иметь место избыточный спрос на первый товар, т.е. распределение x^* не является равновесным ни при каких ценах.

Для того чтобы исключить подобные ситуации, можно в качестве одного из условий второй теоремы благосостояния использовать предпосылку о выпуклости предпочтений. Однако мы можем столкнуться с похожей проблемой, если не будет выпукло производственное множество.

Пример 16.3. Экономика с невыпуклым производственным множеством.

Рассмотрим экономику Робинзона Крузо с невыпуклым производственным множеством, изображенную на рис. 16.3.

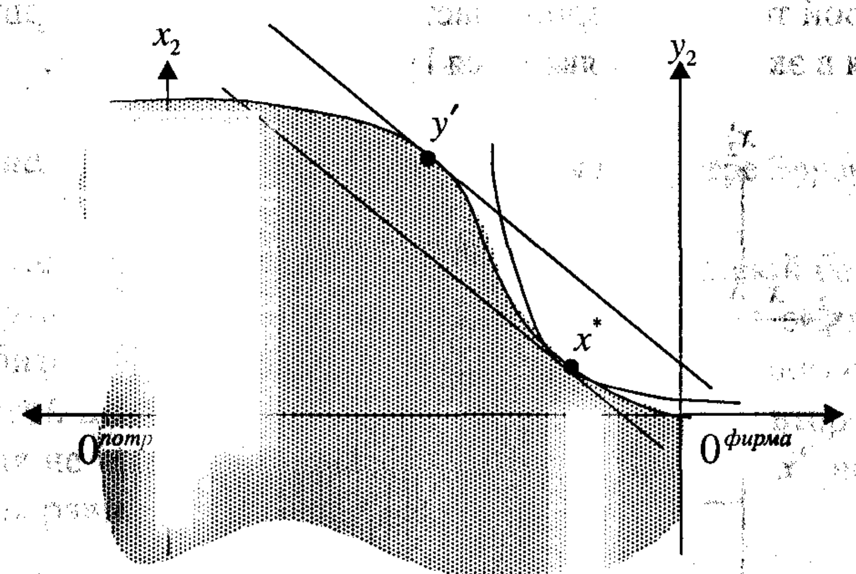


Рис. 16.3. Экономика Робинзона Крузо
с Парето-оптимальным распределением,
не реализуемым как равновесие в экономике с трансфертами

В этой экономике лишь одно распределение будет Парето-оптимальным — точка x^*. Эта точка могла бы быть наилучшей для потребителя лишь при бюджетном ограничении, которое служило бы касательной к кривой безразличия в точке x^*. Однако при таких ценах в точке x^* не будет выполняться условие максимизации прибыли, поскольку фирма смогла бы увеличить прибыль, выбрав вектор чистых выпусков y'. Следовательно, x^* не может быть достигнуто с помощью рыночного механизма.

Наконец, рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий возможные проблемы даже при условии выпуклости как предпочтений, так и производственного множества.

Пример 16.4. Пример Эрроу.

Пусть в экономике обмена с двумя потребителями первый потребитель ценит оба товара, причем его предпочтения квазилинейны и предельная норма замещения в любой точке, где $x_1^1 = 0$ равна бесконечности. Второй участник ценит только первый товар. Соответствующие кривые безразличия представлены на рис. 16.4. Нетрудно убедиться в том, что распределение x^*, в котором первый участник имеет весь второй товар, а второй участник получает весь первый товар, имеющийся в экономике, является Парето-оптимальным.

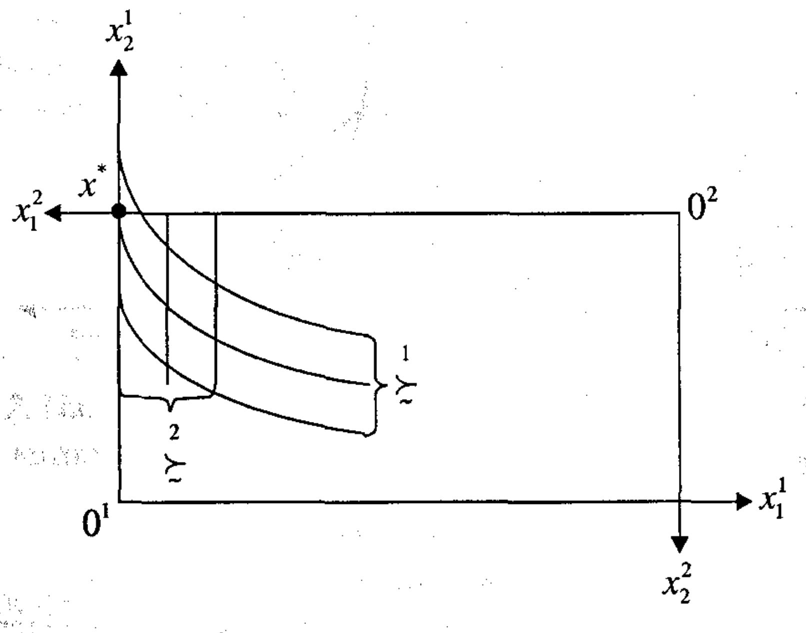


Рис. 16.4. Иллюстрация примера Эрроу

Попытаемся подобрать цены, при которых это распределение было бы равновесием. С точки зрения второго потребителя, подходят любые цены, за исключением случая нулевой цены первого блага. Этот потребитель ценит лишь первый товар и всегда будет тратить свой доход только на приобретение этого блага. С точки зрения первого потребителя, никакие конечные цены не подходят, потому что при них выбор всегда будет внутренним, что обусловлено бесконечным наклоном кривой безразличия на вертикальной оси (см. рис. 16.5).

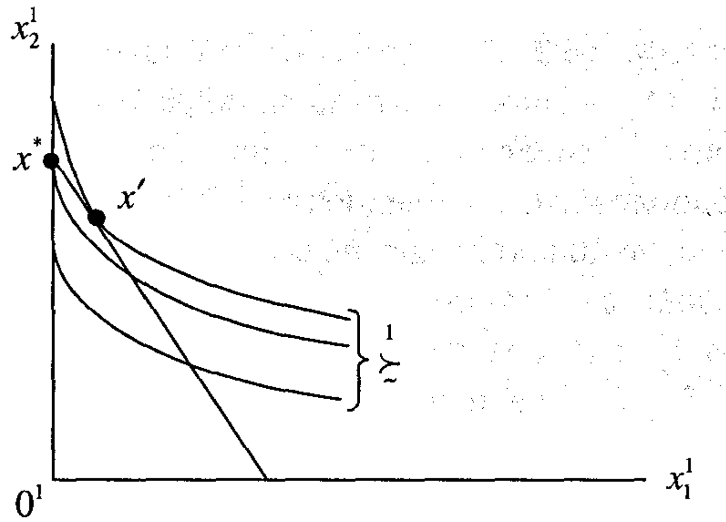


Рис. 16.5. Спрос первого потребителя в примере Эрроу

Если же цены будут совпадать с наклоном кривой безразличия (случай вертикального бюджетного ограничения), то опять же первый потребитель не выберет точку x^*, поскольку он ценит оба товара и при нулевой цене на один из них (в данном случае второй) задача потребителя не имеет решения. Итак, распределение x^* нельзя реализовать как равновесие ни при каких ценах.

Мы можем сделать вывод: для того чтобы гарантировать реализуемость произвольного эффективного распределения через рыночный механизм, нужно исключить возможность таких ситуаций, которые были представлены выше. Для этого, к примеру, можно ввести ограничения на предпочтения и технологии, требуя их выпуклости. Чтобы исключить ситуацию из примера Эрроу, следует рассматривать лишь внутренние распределения. Однако даже этого набора требований может оказаться недостаточно. Например, мы можем столкнуться с проблемами в случае, если предпочтения допускают насыщение. Поэтому в следующей теореме список требований будет несколько шире, чем те, что были обсуждены выше. Однако надо помнить, что эти условия являются лишь достаточными условиями, а не необходимыми. В связи с этим в разных учебниках можно встретить различные формулировки второй теоремы благосостояния (с разными наборами предпосылок).

Утверждение 16.2. Вторая теорема благосостояния.

Пусть $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — Парето-оптимальное распределение, в котором любой потребитель имеет положительное количество любого товара ($\tilde{x}^k \gg 0$). Предположим, что предпочтения всех потребителей выпуклы, непрерывны, локально ненасыщаемы и хотя бы у одного потребителя предпочтения слабо монотонны. Пусть, кроме того, производственные множества Y_j выпуклы. Тогда существует вектор цен $\tilde{p} \geq 0$ ($\tilde{p} \neq 0$) такой, что $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$ — равновесие по Вальрасу в экономике с трансфертами, где богатство индивидов задано вектором $(I^1, \ldots, I^M)$ таким, что $\sum_{k=1}^{M} I^k = \sum_k \tilde{p}\omega^k + \sum_{j=1}^{J} \tilde{p}\tilde{y}_j$, т.е. каждый индивид получает трансферт, равный $T^k = \tilde{p}\omega^k + \sum_j \theta_j^k \tilde{p}\tilde{y}_j - I^k$ и сумма всех трансфертов равна нулю: $\sum_{k=1}^{M} T^k = 0$.

Заметим, что для каких-то потребителей трансферт окажется положительным, т.е. эти потребители получат субсидии, а для каких-то потребителей трансферт окажется отрицательным, что означает, что данные агенты будут платить налоги.

Доказательство

Определим для каждого k множество V^k, состоящее из наборов лучших, чем $\tilde{x}^k : V^k = \{x^k \in X^k : x^k \succ_k \tilde{x}^k\}$ и определим

$$V = \sum_k V^k = \{x = \sum_k x^k \in R^N : \; x^k \in V^k \;\; \forall \;\; k\}.$$

Определим также агрегированное производственное множество

$$Y = \sum_j Y_j = \{ y = \sum_j y_j \in R^N : \; y_j \in Y \;\; \forall j \}.$$

Рассмотрим множество $Y + \{\overline{\omega}\}$ — агрегированное производственное множество со сдвигом начала координат на вектор первоначальных запасов, которое даст нам все наборы, доступные для потребления.

Представим схему доказательства и проиллюстрируем ее графически. Построенные выше множества V и $Y + \{\overline{\omega}\}$ для двухтоварной экономики схематично изображены на рис. 16.6. Сначала покажем, что к этим множествам применима теорема о разделяющей гиперплоскости (для этого необходимо убедиться в том, что они непустые и выпуклые, а их пересечение пусто). Далее покажем, что нормаль разделяющей гиперплоскости можно рассматривать в качестве вектора цен, т.е. все ее координаты неотрицательны. И наконец, проверим, что этот вектор цен и исходное распределение действительно образуют равновесие в экономике с трансфертами.

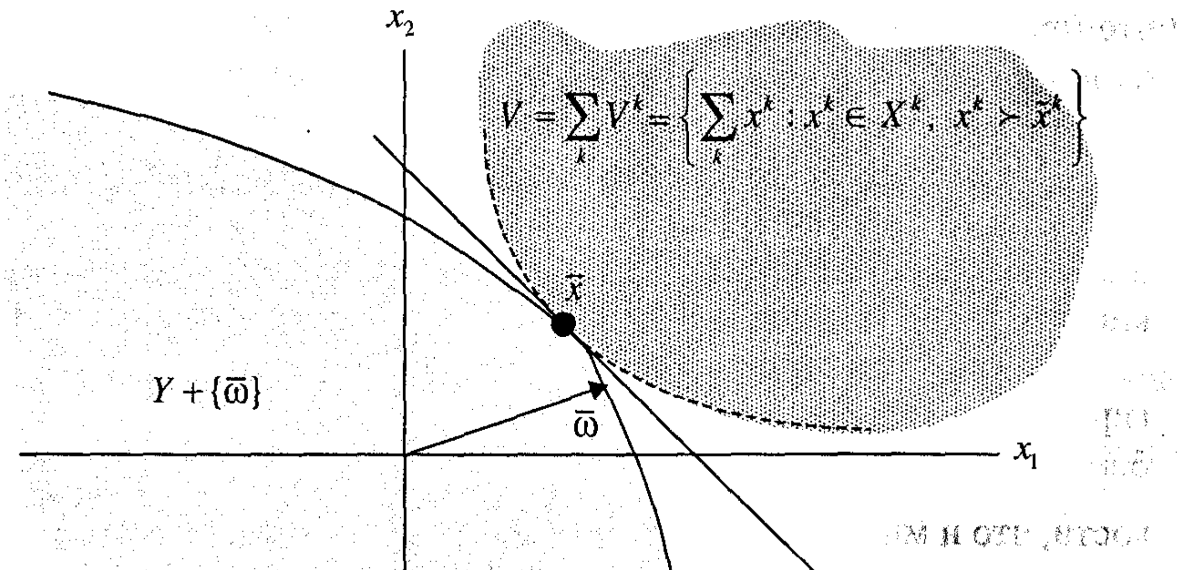


Рис. 16.6. Иллюстрация теоремы о разделяющей гиперплоскости

1. Для любого потребителя k множество V^k выпукло в силу выпуклости предпочтений. Тогда V — выпуклое множество как сумма выпуклых множеств.

Производственные множества Y_j выпуклы по условию, и потому агрегированное производственное множество Y, являющееся их суммой, также выпукло. Множество доступных для потребления наборов $Y+\{\overline{\omega}\}$ получается из Y путем сдвига на вектор первоначальных запасов, а потому свойство выпуклости сохраняется и для $Y+\{\overline{\omega}\}$.

Множества V^k непустые, поскольку в силу локальной ненасыщаемости в любой окрестности $\tilde{x}^k$ найдется лучший набор и он будет по определению элементом V^k. Непустота множества $Y+\{\overline{\omega}\}$ следует из допустимости распределения $(\tilde{x}, \tilde{y})$, поскольку это означает, что $\tilde{y}\in Y$ и, значит, $\tilde{y}+\overline{\omega}\in Y+\{\overline{\omega}\}$.

Покажем, что пересечение множеств V и $Y+\{\overline{\omega}\}$ пусто в силу Парето-оптимальности распределения $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Предположим, что это не так, т.е. $V\cap(Y+\{\overline{\omega}\})\neq\emptyset$. Тогда существует z-вектор такой, что $z\in V$ и $z\in(Y+\{\overline{\omega}\})$. Поскольку $z\in(Y+\{\overline{\omega}\})$, то это означает, что z доступен для потребителей. С другой стороны, $z\in V$, откуда следует, что существуют z^k такие, что для каждого потребителя $z^k \overset{k}{\succ} \tilde{x}^k$, но это противоречит Парето-оптимальности распределения $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Полученное противоречие доказывает, что наша предпосылка была неверна и множества в действительности не пересекаются.

2. Итак, мы показали, что множества V и $Y+\{\overline{\omega}\}$ непустые, выпуклые и их пересечение пусто. Тогда согласно теореме о разделяющей гиперплоскости существует вектор $p\in R^N$, $p\neq 0$ и число c такие, что $px\geq c$ для любого $x\in V$ и $px'\leq c$ для любого $x'\in(Y+\{\overline{\omega}\})$.

3. Покажем, что все точки, получающиеся в результате агрегирования потребительских наборов x^k, которые не хуже чем наборы $\tilde{x}^k$, будут лежать по ту же сторону от разделяющей гиперплоскости, что и множество V. Формально покажем, что, если $x^k \overset{k}{\succsim} \tilde{x}^k$ для всех k, то

$$p\sum_k x^k \geq c.$$

Пусть $x^k \overset{k}{\succsim} \tilde{x}^k$ для всех k. В силу локальной ненасыщаемости в любой ε-окрестности найдется лучший набор $\hat{x}^k_\varepsilon : \hat{x}^k_\varepsilon \overset{k}{\succ} x^k$. Следовательно, $\hat{x}^k_\varepsilon \in V^k$ для любого k и, значит, $p\sum_k \hat{x}^k_\varepsilon \geq c$. Уменьшая окрестности, построим последовательности $\{\hat{x}^k_\varepsilon\}$ такие, что $\hat{x}^k_\varepsilon \to x^k$. Поскольку неравенство сохранится и в пределе, получим, что $p\sum_k x^k \geq c$.

4. Покажем что нормаль разделяющей гиперплоскости можно рассматривать в качестве вектора цен, т.е. все координаты вектора p неотрицательны. С данной целью предположим, что это неверно и какая-то координата вектора p отрицательна: $p_i < 0$.

Рассмотрим произвольный элемент множества $V : \bar{x} \in V$. По условию в экономике существует по крайней мер один потребитель со слабо монотонными предпочтениями. Пусть это первый участник. Изменим потребительский набор этого участника, увеличив i-ю координату на $\lambda > 0 : \hat{x}^1 = \bar{x}^1 + \lambda e_i$, где $e_i = (0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, причем ненулевая — только i-я координата. Потребительские наборы остальных участников оставим прежними: $\hat{x}^k = \bar{x}^k$ для всех $k > 1$. Таким образом, мы имеем для первого потребителя $\hat{x}^1 \geq \bar{x}^1$ для любого $\lambda > 0$, откуда в силу слабой монотонности $\hat{x}^1 \succsim \bar{x}^1$, а для всех остальных потребителей в силу неизменности наборов также $\hat{x}^k \succsim \bar{x}^k$. Согласно пункту 3 доказательства это означает, что $p\sum_k \hat{x}^k \geq c$ для любого $\lambda > 0$.

Рассмотрим выражение, стоящее в левой части неравенства:

$$p\sum_k \hat{x}^k = p\sum_k \bar{x}^k + \lambda p_i.$$

Заметим, что $p\sum_k \bar{x}^k \geq c$, поскольку $\bar{x} \in V$, а $\lambda p_i < 0$. Так как λ — произвольное положительное число, то, выбрав его достаточно большим, мы всегда сможем добиться того, что

$$p\sum_k \hat{x}^k = p\sum_k \bar{x}^k + \lambda p_i < 0.$$

Это противоречит полученному выше неравенству. Таким образом, наше предположение о том, что у вектора есть отрицательные координаты, неверно.

5. Итак, мы доказали, что нормаль гиперплоскости имеет лишь неотрицательные координаты. Выберем эту нормаль в качестве вектора цен, положив $\tilde{p} = p$, и докажем, что набор $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$ образует равновесие по Вальрасу в экономике с трансфертами. Сначала убедимся в том, что $\tilde{p}\tilde{x} = \tilde{p}\tilde{y} + \tilde{p}\overline{\omega}$.

Поскольку $\tilde{y} + \overline{\omega} \in (Y + \{\overline{\omega}\})$, то согласно пункту (2) имеем $\tilde{p}\tilde{y} + \tilde{p}\overline{\omega} \leq c$. С другой стороны, для каждого потребителя $\tilde{x}^k \overset{k}{\succsim} \tilde{x}^k$, откуда согласно пункту (3) получаем $\tilde{p}\tilde{x} \geq c$ и в итоге приходим к неравенству

$$\tilde{p}\tilde{y} + \tilde{p}\overline{\omega} \leq c \leq \tilde{p}\tilde{x}.$$

Покажем, что имеет место и обратное неравенство. В силу допустимости распределения $(\tilde{x}, \tilde{y})$ по каждому товару i имеет место следующее неравенство: $\sum_k \tilde{x}_i^k \leq \overline{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ji}$. Домножив каждое неравенство на $\tilde{p}_i \geq 0$ и сложив по всем товарам, получим

$$\tilde{p}\tilde{x} = \sum_i \tilde{p}_i \sum_k \tilde{x}_i^k \leq \sum_i \tilde{p}_i \overline{\omega}_i + \sum_i \tilde{p}_i \sum_j \tilde{y}_{ji} = \tilde{p}\overline{\omega} + \tilde{p}\tilde{y}.$$

С учетом полученного выше обратного неравенства это означает, что

$$\tilde{p}\tilde{x} = c = \tilde{p}\overline{\omega} + \tilde{p}\tilde{y}.$$

Заметим, что это условие, вместе с условиями допустимости $\sum_k \tilde{x}_i^k \leq \overline{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ji}$, означает отсутствие избыточного спроса по каждому товару.

6. Покажем, что при ценах $\tilde{p}$ для любой фирмы j вектор чистых выпусков $\tilde{y}_j \in Y_j$ приносит максимально возможную прибыль фирме j, т.е. $\tilde{p}\tilde{y}_j \geq \tilde{p}y_j$ для всех $y_j \in Y_j$. Рассмотрим произвольный $y_j \in Y_j$. Тогда $(y_j + \sum_{h \neq j} y_h) + \overline{\omega} \in (Y + \{\overline{\omega}\})$ и, следовательно,

$$\tilde{p}(y_j + \sum_{h \neq j} \tilde{y}_h) + \tilde{p}\overline{\omega} \leq c = \tilde{p}\tilde{y}_j + \tilde{p}\sum_{h \neq j} \tilde{y}_h.$$

Таким образом, получаем, что $\tilde{p}y_j \leq \tilde{p}\tilde{y}_j$ для любого $y_j \in Y_j$.

7. Нам осталось удостовериться в том, что для каждого потребителя при ценах $\tilde{p}$ набор $\tilde{x}^k$ является наилучшим. Разобьем доказательство этого утверждения на несколько этапов. Сначала покажем, что если и существует набор, лучший чем $\tilde{x}^k$, то он будет стоить не меньше, т.е.

$$\text{если } x^k \overset{k}{\succ} \tilde{x}^k, \text{ то } \tilde{p}x^k \geq \tilde{p}\tilde{x}^k.$$

Рассмотрим k-го потребителя. Пусть $x^k \overset{k}{\succ} \tilde{x}^k$, тогда согласно пунктам 3 и 5 имеем

$$\tilde{p}(x^k + \sum_{h \neq k} \tilde{x}^h) \geq c = \tilde{p}(\tilde{x}^k + \sum_{h \neq k} \tilde{x}^h),$$

откуда заключаем, что $\tilde{p}x^k \geq \tilde{p}\,\tilde{x}^k$.

8. Покажем, что в действительности неравенство в пункте 7 будет строгим, т.е., если $x^k \overset{k}{\succ} \tilde{x}^k$, то $\tilde{p}x^k > \tilde{p}\,\tilde{x}^k$. Предположим, что это неверно и для какого-то потребителя $x^k \overset{k}{\succ} \tilde{x}^k$ и $\tilde{p}x^k = \tilde{p}\tilde{x}^k$. Рассмотрим набор αx^k, где $\alpha \in (0,\ 1)$. При α, близком к единице, αx^k оказывается как угодно близко к исходному набору x^k, и, следовательно, в силу непрерывности предпочтений $\alpha x^k \overset{k}{\succ} \tilde{x}^k$ при α, достаточно близком к единице. Тогда в силу пункта 7 $\tilde{p}\alpha x^k \geq \tilde{p}\tilde{x}^k$.

С другой стороны, поскольку $\tilde{p} \geq 0$ $(\tilde{p} \neq 0)$ и $\tilde{x}^k \gg 0$ для любого k, то $\tilde{p}\tilde{x}^k > 0$. Поскольку $\tilde{p}x^k = \tilde{p}\tilde{x}^k$, то $\tilde{p}x^k > 0$, и с учетом того, что $\alpha < 1$, находим, что $\alpha\,\tilde{p}x^k < \tilde{p}x^k = \tilde{p}\tilde{x}^k$, а это противоречит полученному выше неравенству. Таким образом, мы заключаем, что $\tilde{p}x^k > \tilde{p}\tilde{x}^k$. Это означает, что все лучшие наборы не будут доступны потребителю при доходе $I^k = \tilde{p}\tilde{x}^k$.

9. Определим трансферты как $T^k = \tilde{p}\omega^k + \sum_j \theta_j^k \tilde{p}\tilde{y}_j - I^k$ и покажем, что эта система трансфертов сбалансирована. Для этого просуммируем трансферты по всем потребителям:

$$\sum_k T^k = \sum_k \tilde{p}\omega^k + \sum_k \sum_j \theta_j^k \tilde{p}\tilde{y}_j - \sum_k I^k = \tilde{p}\sum_k \omega^k + \sum_j \tilde{p}\tilde{y}_j \sum_k \theta_j^k - \sum_k \tilde{p}\tilde{x}^k.$$

Поскольку при любом распределении прав собственности $\sum_k \theta_j^k = 1$, а $\sum_k \omega_i^k = \bar{\omega}_i$, то $\sum_k T^k = \tilde{p}\bar{\omega} + \tilde{p}\tilde{y} - \tilde{p}\tilde{x} = 0$ согласно пункту 5. Итак, мы доказали, что предложенная нами система трансфертов представляет лишь перераспределение богатства, т.е. достижима в данной экономике. ■

Завершив доказательство теоремы, вернемся еще раз к ее содержанию. Итак, помимо того что теорема имеет место при весьма существенных технических предпосылках, чтобы реализовать заложенный в ней результат, государству необходимо решить еще целый ряд проблем. Во-первых, надо быть уверенным в том, что распределение, которого общество пытается достичь, действительно Парето-оптимально. В противном случае оно не может быть получено как равновесие по Вальрасу, поскольку согласно первой теореме благосостояния равновесие всегда Парето-оптимально.

Другая проблема состоит в том, что государство должно обладать огромным объемом информации, чтобы рассчитать необходимые трансферты. Даже если государство обладает информацией о группах потребителей в целом, то для того чтобы реализовать найденные трансферты, нужно знать гораздо больше, а именно нужно уметь определять, к какой именно группе принадлежит данный конкретный потребитель. Сложность этой задачи состоит в том, что у многих потребителей нет стимула правильно выявлять свои характеристики, например у тех, кто в результате вынужден будет платить налоги, а не получать субсидии. Таким образом, даже если необходимая система трансфертов будет найдена, то совсем не очевидно, что государству удастся ее корректно реализовать.

Лекция 17

Дифференциальный анализ Парето-оптимальных распределений

Мы проанализировали соотношение между равновесными распределениями и Парето-оптимальными распределениями при достаточно общих предпосылках. В частности, в первой теореме благосостояния мы не требовали представимости предпочтений с помощью функции полезности. Если предпосылки второй теоремы благосостояния и гарантировали существование функции полезности, то при этом нигде не предполагалась дифференцируемость этой функции. Несмотря на то что основные положения теории благосостояния не требуют дифференциального анализа Парето-оптимальных распределений, все же попытаемся охарактеризовать оптимальные распределения с помощью дифференциального анализа.

Такой подход, с одной стороны, позволит нам легко находить Парето-оптимальные распределения в случае дифференцируемых функций, а с другой стороны, мы сможем еще раз проиллюстрировать связь между равновесием и Парето-оптимумом. Причем при предположении о дифференцируемости функций доказательство теорем благосостояния становится крайне простым и наглядным.

Пусть предпочтения каждого потребителя представимы дважды непрерывно дифференцируемыми функциями полезности, причем $\frac{\partial u^k}{\partial x_i^k} > 0$ для всех k и i. Будем также считать, что $u^k(0) > 0$. Производственное множество j-й фирмы имеет вид $Y_j = \{y \in R^N : F_j(y) \le 0\}$, где уравнение $F_j(y) = 0$ определяет кривую производственных возможностей или трансформационную кривую j-й фирмы. Будем считать, что функции $F_j(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемы, $F_j(0) = 0$ и $\frac{\partial F_j(y_j)}{\partial y_{ij}} > 0$ для всех i и j. Последнее условие означает, что, если мы находимся на трансформационной кривой фирмы $(F_j(y)=0)$, то попытка увеличения выпуска какого-то товара или снижения использования какого-то фактора, если $y_{ij}<0$ выводит нас за границы множества производственных возможностей Y_j.

Поиск Парето-оптимальных распределений

Рассмотрим следующую задачу. Зафиксируем уровни благосостояния для всех потребителей, кроме одного (скажем, первого), и попытаемся максимизировать его полезность при фиксированных полезностях остальных участников и ресурсных ограничениях:

$$\max\ u^1(x_1^1,\ \dots,\ x_N^1)$$

$$\begin{aligned}
&(1)\ u^k(x_1^k,\ \dots,\ x_N^k)\ge \bar{u}^k \quad k=2,\ \dots,\ M;\\
&(2)\ \sum_k x_i^k \le \bar{\omega}_i+\sum_j y_{ji} \quad i=1,\ \dots,\ N;\\
&(3)\ F_j(y_{j1},\ \dots,\ y_{jN})\le 0 \quad j=1,\ \dots,\ J.
\end{aligned} \tag{17.1}$$

Утверждение 17.1. Характеристика Парето-оптимальных распределений.

Каждое решение задачи (17.1) является Парето-оптимальным распределением рассмотренной выше экономики. Верно и обратное: любое Парето-оптимальное распределение в этой экономике является решением задачи (17.1) при некоторых значениях уровней полезности $(\bar{u}^2,\ \bar{u}^3,\ \dots,\ \bar{u}^M)$.

Доказательство

1. Докажем, что любое решение задачи (17.1) будет Парето-оптимальным распределением. Заметим, что решение этой задачи является допустимым распределением, поскольку удовлетворяет ресурсным ограничениям по каждому товару и технологическим ограничениям фирм в силу ограничений (2) и (3) задачи (17.1).

Предположим, что какое-то решение задачи $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ не является Парето-оптимальным распределением. Это означает, что существует другое допустимое распределение $(\hat{x}, \hat{y})$ такое, что: $u^k(\hat{x}^k) \geq u^k(\tilde{x}^k)$ для всех $k = 1, \ldots, M$ и $u^k(\hat{x}^k) > u^k(\tilde{x}^k)$ хотя бы для одного потребителя. Поскольку $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — решение задачи (17.1), то $u^k(\hat{x}^k) \geq u^k(\tilde{x}^k) \geq \bar{u}^k$ для всех $k = 2, \ldots, M$.

Так как хотя бы для одного потребителя «новое» распределение должно быть лучше, чем «старое», соответствующее решению задачи, то либо одно из этих неравенств является строгим $(u^k(\hat{x}^k) > \bar{u}^k)$, либо $u^1(\hat{x}^1) > u^1(\tilde{x}^1)$. Последнее невозможно, поскольку это означало бы, что распределение $(\hat{x}, \hat{y})$ удовлетворяет всем ограничениям задачи (17.1) и при этом приносит большую полезность первому потребителю. Это значит, что $(\tilde{x}, \tilde{y})$ не является решением задачи (17.1) и мы приходим к противоречию. Если же для какого-то потребителя ограничение является строгим неравенством $u^k(\hat{x}^k) > \bar{u}^k$, то в силу монотонности и непрерывности функции $u^k(\cdot)$ можно уменьшить количество какого-либо блага в наборе $\hat{x}^k$ (заметим, что поскольку $u^k(\hat{x}^k) > u^k(\tilde{x}^k)$, то $\hat{x}^k \neq 0$) $\hat{x}^k \neq 0$) так, чтобы это неравенство сохранилось, и передать его первому потребителю. При этом все ограничения задачи по-прежнему будут выполняться, а полезность первого участника возрастет, и мы вновь приходим к противоречию с тем, что $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — решение задачи (17.1).

2. Докажем обратное утверждение. Рассмотрим произвольное Парето-оптимальное распределение $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и покажем, что оно является решением задачи (17.1) при $\bar{u}^k = u^k(\tilde{x}^k)$. Поскольку $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — Парето-оптимально, то это распределение допустимое и, следовательно, удовлетворяет условиям (2) и (3) задачи (17.1). Кроме того, оно удовлетворяет и условию (1) в силу соответствующего выбора констант $\bar{u}^k$. Если не $(\tilde{x}, \tilde{y})$ является решением задачи (17.1), то существует набор $(\hat{x}, \hat{y})$ такой, что $u^k(\hat{x}^k) \geq \bar{u}^k = u^k(\tilde{x}^k)$ и $u^1(\hat{x}^1) > u^1(\tilde{x}^1)$, что противоречит Парето-оптимальности $(\tilde{x}, \tilde{y})$. ■

Условия первого порядка для Парето-оптимальных распределений

Итак, теперь мы знаем, что все Парето-оптимальные распределения могут быть получены как решения задачи (17.1). Выпишем условия первого порядка, характеризующие решения этой задачи. Для этого введем множители Лагранжа для каждой группы ограничений: $\delta^k \geq 0$ для (1), $\mu_i \geq 0$ для (2) и $\gamma_j \geq 0$ для (3). Условия первого порядка примут следующий вид:

(4) $\frac{\partial u^1}{\partial x_i^1} - \mu_i \leq 0$; $\frac{\partial u^1}{\partial x_i^1} - \mu_i = 0$, если $x_i^1 > 0$, $i = 1, \ldots, N$;

(5) $\delta^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i^k} - \mu_i \leq 0$; $\delta^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i^k} - \mu_i = 0$, если $x_i^k > 0$, $i = 1, \ldots, N, k = 2, \ldots, M$;

(6) $\mu_i - \gamma_j \frac{\partial F_j}{\partial y_{ji}} = 0$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 2, \ldots, J$.

Заметим, что условия (4) для первого потребителя можно записать в таком же виде, как и для остальных потребителей, считая, что $\delta^1 = 1$.

Для внутреннего решения, т.е. такого решения, где все участники потребляют все блага в ненулевых количествах, мы можем переписать (4) и (5) в следующем виде:

(5′) $\delta^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i^k} = \mu_i$, $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, M$.

Заметим, что в силу предположения о возрастании функций полезности по каждому аргументу имеем $\mu_i = \frac{\partial u^1}{\partial x_i^1} > 0$ для всех i. Кроме того, поскольку $\delta^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i^k} = \mu_i > 0$ и по предположению $\frac{\partial u^k}{\partial x_i^k} > 0$, то и $\delta^k > 0$ для всех k. Аналогично $\gamma_j \frac{\partial F_j}{\partial y_{ji}} = \mu_i > 0$, откуда, с учетом предположения $\frac{\partial F_j(y_j)}{\partial y_{ij}} > 0$, следует, что и $\gamma_j > 0$.

Поделив условия (5′) для двух товаров i и h, найдем предельную норму замещения между этими товарами:

$$(7)\ MRS^k_{i,h}(\tilde{x}) = \frac{\left(\partial u^k(\tilde{x})\right)/\partial x^k_i}{\left(\partial u^k(\tilde{x})\right)/\partial x^k_i} = \frac{\mu_i/\delta^k}{\mu_h/\delta^k} = \frac{\mu_i}{\mu_h}$$

для всех $k = 1,\ \ldots,\ M$ и $i,\ h = 1,\ \ldots,\ N$.

Из этого условия мы можем заключить, что предельные нормы замещения между любыми двумя благами i и h будут равны для всех потребителей:

$$MRS^k_{i,h}(\tilde{x}) = MRS^r_{i,h}(\tilde{x}) \text{ для всех } k,\ r = 1,\ \ldots,\ M.$$

Это условие носит название условия *эффективности потребления*.

Теперь проделаем аналогичные преобразования с соотношениями (6). Поделив условия (6) для двух товаров i и h, найдем предельную норму трансформации для j-го производственного процесса:

$$(8)\ MRT^j_{i,h}(\tilde{y}_j) = \frac{\left(\partial F_j(\tilde{y}_j)\right)/\partial y_{ji}}{\left(\partial F_j(\tilde{y}_j)\right)/\partial y_{jh}} = \frac{\mu_i/\gamma_j}{\mu_h/\gamma_j} = \frac{\mu_i}{\mu_h}$$

для всех $j = 1,\ \ldots,\ J$ и $i,\ h = 1,\ \ldots,\ N$.

Таким образом, в оптимальном распределении предельная норма трансформации между любыми двумя товарами i и h должна быть одинакова по всем фирмам:

$$MRT^j_{i,h}(\tilde{y}_j) = MRT^l_{i,h}(\tilde{y}_l) \text{ для всех } j,\ l = 1,\ \ldots,\ J.$$

Это условие называют условием *технологической эффективности* или *эффективности производства*. Оно означает, что невозможно перераспределить ресурсы между технологиями таким образом, чтобы увеличить выпуск одного продукта, не уменьшив выпуск другого.

Наконец из условий (7) и (8) находим, что в оптимальном распределении предельная норма замещения между двумя благами должна быть равна предельной норме трансформации для этих же благ:

$$MRS^k_{i,h}(\tilde{x}) = \frac{\mu_i}{\mu_h} = MRT^j_{i,h}(\tilde{y}_j)$$

для всех $k = 1, \ldots, M$; $i, h = 1, \ldots, N$ и $j = 1, \ldots, J$.

Это условие называют условием *эффективности производимого ассортиментного набора.*

Если функции полезности всех потребителей $u^k(\cdot)$ квазивогнуты, а трансформационные кривые $F_j(\cdot)$ выпуклы, то условия первого порядка являются не только необходимыми, но и достаточными и, таким образом (вместе с ограничениями задачи), дают полную характеристику Парето-оптимальных распределений. Тогда условия первого порядка могут быть использованы для доказательства теорем благосостояния в дифференциальной форме.

Доказательства теорем благосостояния в дифференциальной форме

Для доказательства теорем благосостояния в дифференциальной форме выпишем дифференциальные характеристики для равновесия по Вальрасу и сравним их с найденными нами характеристиками Парето-оптимальных распределений.

Пусть $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$ — равновесие по Вальрасу в рассматриваемой экономике. Это означает, что для каждого потребителя $\tilde{x}^k$ является решением следующей задачи:

$$\max u^k(x^k_1, \ldots, x^k_N)$$

$$(9) \quad \sum_i \tilde{p}_i x^k_i \le I^k.$$

Обозначим через λ^k множитель Лагранжа для бюджетного ограничения k-го потребителя и выпишем условия первого порядка для этой задачи:

$$(10) \quad \frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)}{\partial x^k_i} \le \lambda^k \tilde{p}_i;$$

$$\frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)}{\partial x^k_i} = \lambda^k \tilde{p}_i, \text{ если } \tilde{x}^k_i > 0.$$

По предположению функции полезности потребителей квазивогнуты, поэтому условия первого порядка являются не только необходимыми, но и достаточными.

Поскольку $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$ — равновесие по Вальрасу, то для каждой фирмы вектор чистых выпусков $\tilde{y}_j \in Y_j$ должен приносить j-й фирме максимальную прибыль при ценах $\tilde{p}$, т.е. должен являться решением следующей задачи:

$$\max \tilde{p} y_j$$

$$(11)\ F_j(y_j) \le 0.$$

Условия первого порядка для задачи максимизации прибыли примут вид

$$(12)\ \frac{\partial F_j(\tilde{y}_j)}{\partial y_{ji}} = \beta_j \tilde{p}_i,$$

где β_j — множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению j-й фирмы.

Наконец, осталось выписать условия уравновешенности рынков:

$$(13) \sum_k x_i^k \le \overline{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ji};\quad \tilde{p}_i \sum_k x_i^k = \tilde{p}_i \overline{\omega}_i + \tilde{p}_i \sum_j \tilde{y}_{ji}.$$

Итак, равновесие полностью характеризуется условиями (9) — (13), а Парето-оптимальные распределения задаются соотношениями (2) — (6). Полагая $\mu_i = \tilde{p}_i$, $\delta^k = \frac{1}{\lambda^k}$ и $\beta_j = \gamma_j$, получаем, что характеристики для Парето-оптимальных распределений (2)—(6) совпадают с условиями равновесия (10)—(13). Но, как мы видим, среди условий Парето-оптимальности нет аналога бюджетных ограничений (9). Это означает, что любое равновесное распределение будет удовлетворять условиям (2)—(6), а потому будет являться Парето-оптимальным, а обратное утверждение вовсе не обязано иметь место. Для того чтобы имела место и вторая теорема благосостояния, мы можем искусственно подобрать доходы таким образом, чтобы были выполнены бюджетные ограничения. Для этого положим $I^k = \tilde{p}\tilde{x}^k$. Тогда будет верна и обратная теорема, и поскольку $\sum_k I^k = \sum_k \tilde{p}\tilde{x}^k = \tilde{p}\overline{\omega} + \tilde{p}\tilde{y}$, то такие доходы можно получить путем перераспределения. ■

Парето-оптимальность и максимизация общественного благосостояния

Покажем, что задача поиска Парето-оптимальных распределений может быть сформулирована и в несколько отличном от задачи (17.1) виде, а именно как задача максимизации взвешенных полезностей потребителей при технологических и ресурсных ограничениях:

$$
\begin{gathered}
\max \sum_k \alpha^k u^k(x_1^k, \ldots, x_N^k) \\
\sum_k x_i^k \le \bar{\omega}_i + \sum_j y_{ji}, \quad i = 1, \ldots, N; \\
F_j(y_{j1}, \ldots, y_{jN}) \le 0, \quad j = 1, \ldots, J.
\end{gathered}
\tag{17.2}
$$

Обозначив множители Лагранжа для ресурсных ограничений этой задачи через ρ_i и для технологических ограничений через η_j, выпишем условия первого порядка для этой задачи и сравним их с условиями первого порядка для задачи (17.1):

$$(14)\ \alpha^k \frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)}{\partial x_i^k} - \rho_i \le 0;\ \alpha^k \frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)}{\partial x_i^k} - \rho_i = 0, \text{если } x_i^k > 0 \ \ \forall k, i;$$

$$(15)\ \rho_i - \eta_j \frac{\partial F(y_j)}{\partial y_{ij}} = 0 \ \ \forall i, j.$$

Положив: $\alpha^k = \delta^k$, $\rho_i = \mu_i$ и $\eta_j = \gamma_j$, получим эквивалентность условий (14)—(15) и (4)—(6). С учетом совпадения ресурсных и технологических ограничений это означает, что любое решение задачи (17.2) является решением задачи (17.1). И наоборот, любое распределение, которое удовлетворяет условиям (2)—(6), удовлетворяет также условиям (14)—(15) и ограничениям задачи (17.2) и поэтому является решением этой задачи при соответствующем векторе $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^M)$.

Лекция 18

Существование равновесия по Вальрасу

Мы обсудили свойства вальрасовского равновесия, но до сих пор не убедились в том, что оно существует. Без решения этого вопроса весь предыдущий анализ, посвященный соотношению распределений, к которым приводят рыночный механизм и централизованное планирование, становится беспредметным.

Все теоремы существования равновесия сводятся к применению теорем о неподвижных точках для некоторого искусственно построенного отображения. В зависимости от свойств этого отображения далее применяют, например, теорему Брауэра (которая работает лишь для непрерывных функциональных отображений) или теорему Какутани (которая работает для полунепрерывных, в том числе и многозначных, отображений). Еще один способ доказательства существования равновесия основан на сведении равновесия по Вальрасу к равновесию по Нэшу в соответствующим образом построенной игре и использовании теоремы о существования равновесия по Нэшу, доказательство которой, в свою очередь, также базируется на теореме Какутани.

Пример 18.1. Существование равновесия в экономике обмена с двумя товарами.

Рассмотрим вопрос существования равновесия на примере простейшей экономики, где имеется всего два товара, а производство отсутствует. Пусть в этой экономике все потребители имеют непрерывные, строго выпуклые, монотонные предпочтения, определенные на $X^k = R_+^2$, и обладают положительным количеством каждого блага.

В силу строгой выпуклости предпочтений спрос каждого участника будет функцией цен благ, а следовательно, и избыточный спрос на каждый товар будет функцией при всех ценах $p \gg 0$. Заметим, что при нулевой цене блага спрос, а следовательно, и избыточный спрос не определены, поскольку задача потребителя в силу монотонности его предпочтений не будет иметь решения. Таким образом, если равновесие существует, то равновесные цены в данной экономике всегда положительны.

В силу монотонности предпочтений избыточный спрос удовлетворяет закону Вальраса, а потому можно ограничиться поиском цен, уравновешивающих только один из рынков, а оставшийся будет автоматически уравновешен при тех же ценах. Итак, будем рассматривать лишь рынок первого товара. Для удобства пронормируем цены, положив $p_2 = 1$. Напомним, что такая нормировка допустима в силу того, что спрос каждого участника (и соответственно избыточный спрос) однороден нулевой степени относительно цен, а равновесными могут быть только положительные цены. Изобразим избыточный спрос на первый товар как функцию от своей цены $z_1(p_1,\ 1)$ (см. рис. 18.1).

Отметим характеристики этой функции. Во-первых, в силу непрерывности функций полезности и положительности доходов потребителей ($I^k(p_1,1) = p_1\omega_1^k + \omega_2^k > 0\ \ \forall p_1 > 0$) функции спроса всех потребителей и, следовательно, функции избыточного спроса непрерывны при $p_1 > 0$.

Во-вторых, $z_1(p_1,\ 1) > -\overline{\omega}_1$, поскольку потребительские множества всех участников состоят из наборов, содержащих лишь неотрицательные количества товаров $X^k = R_+^N$.

И наконец, нетрудно показать, что при достаточно низкой цене первого блага совокупный спрос на данный товар превысит предложение (избыточный спрос будет положителен). Аналогично при достаточно высокой цене первого блага совокупный спрос на это благо будет близок к нулю, а избыточный спрос будет отрицательным.

В результате мы имеем дело с непрерывной функцией, которая принимает как положительные значения при цене $\underline{p}_1$, где $\underline{p}_1$ близко к нулю, так и отрицательные при достаточно большой цене $\overline{p}_1$. Тогда по теореме о промежуточном значении данная функция должна проходить через ноль, т.е. существует цена $\tilde{p}_1 \in (\underline{p}_1,\ \overline{p}_1)$ такая, что $z_1(\tilde{p}_1,\ 1) = 0$. Это означает, что $(\tilde{p}_1,\ 1)$ — равновесный вектор цен.

Рассмотрев случай двух товаров, перейдем к экономике с произвольным количеством товаров. В этом случае мы уже не можем провести доказательство по аналогии с рассмотренной ситуацией, поскольку не сможем ограничиться рассмотрением лишь одного рынка.

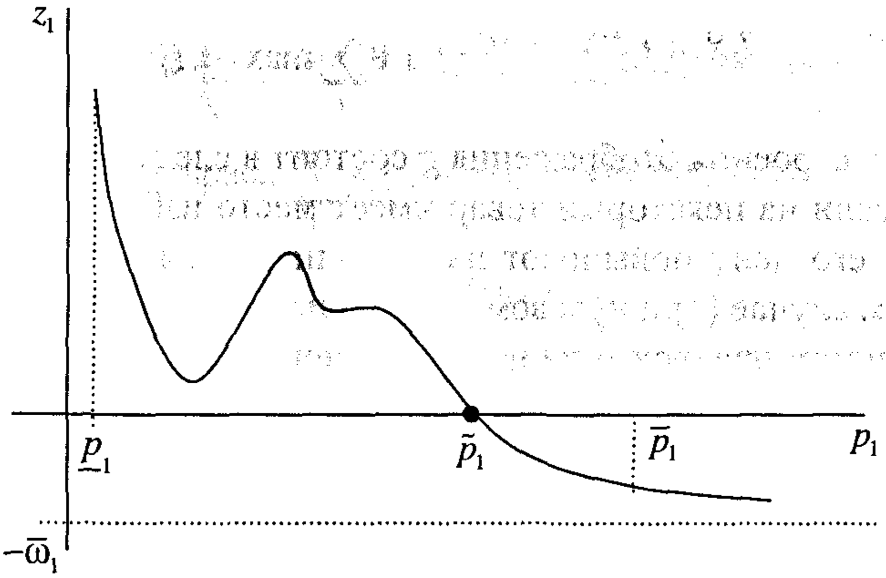


Рис. 18.1. Существование равновесия в двухтоварной экономике обмена

Утверждение 18.1. Теорема о существовании равновесия в терминах избыточного спроса.

Пусть избыточный спрос $z(p)$ для каждого товара является функцией, определенной для всех неотрицательных ненулевых векторов цен $p \geq 0$, $p \neq 0$. Если функции избыточного спроса $z(p)$ непрерывные для всех $p \geq 0$, $p \neq 0$, однородные нулевой степени и удовлетворяют закону Вальраса, то существует вектор цен $\tilde{p}$ такой, что $z_i(\tilde{p}) \leq 0$ и $\tilde{p}_i z_i(\tilde{p}) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, N$.

Доказательство

1. Поскольку $z(p)$ обладает свойствами однородности нулевой степени, то мы можем пронормировать цены (поделив на сумму их цен) так, что в результате $\sum_i p_i = 1$, а избыточный спрос при этом не изменится. Таким образом, можно ограничиться поиском вектора $\tilde{p}$ с указанными свойствами на $(N-1)$-мерном симплексе цен: $S^{N-1} = \{p \geq 0, \sum_{i=1}^{N} p_i = 1\}$. Данное множество цен представляет собой непустой выпуклый компакт.

2. Рассмотрим следующее отображение этого множества в себя:

$$g: S^{N-1} \to S^{N-1}, \text{ где } g_i(p) = \frac{p_i + \max(0, z_i(p))}{1 + \sum_i \max(0, z_i(p))}.$$

Идея построения отображения g состоит в следующем. На первом этапе, если на некоторый товар имеет место избыточный спрос $(z_i(p) > 0)$, его цену повышают на величину избыточного спроса. В противном случае (при нулевом избыточном спросе или при наличии избыточного предложения на рынке) цена товара остается неизменной. На втором этапе новые цены нормируют так, чтобы их сумма вновь была равна единице.

Заметим, что по построению $g_i(p) \geq 0$ и $\sum_i g_i(p) = 1$, т.е. построено отображение $(N-1)$-мерного симплекса в себя. Более того, построенное отображение является непрерывной функцией, поскольку все $z_i(p)$ — непрерывные функции и к ним применялись операции (сложение и т.д.), сохраняющие непрерывность.

Таким образом, к построенному отображению можно применить теорему Брауэра о неподвижной точке. Согласно этой теореме у любой непрерывной функции, отображающей непустой выпуклый компакт в себя, существует неподвижная точка $\tilde{p}$: $\tilde{p} = g(\tilde{p})$.

3. Покажем, что неподвижная точка отображения g является равновесным вектором цен, т.е. $z_i(\tilde{p}) \leq 0$ и $\tilde{p}_i z_i(\tilde{p}) \leq 0$ для всех $i = 1, \ldots, N$.

По построению

$$\tilde{p}_i = g_i(\tilde{p}) = \frac{\tilde{p}_i + \max(0, z_i(\tilde{p}))}{1 + \sum_i \max(0, z_i(\tilde{p}))}.$$

Домножим левую и правую часть на знаменатель:

$$\tilde{p}_i + \tilde{p}_i \sum_i \max(0, z_i(\tilde{p})) = \tilde{p}_i + \max(0, z_i(\tilde{p}))$$

или

$$\tilde{p}_i \sum_i \max(0, z_i(\tilde{p})) = \max(0, z_i(\tilde{p})).$$

Домножим каждое равенство на $z_i(\tilde{p})$ и просуммируем по всем $i=1, ..., N$:

$$\left(\sum_i \tilde{p}_i z_i(\tilde{p})\right)\left(\sum_i \max\left(0, z_i(\tilde{p})\right)\right) = \sum_i z_i(\tilde{p})\max\left(0, z_i(\tilde{p})\right).$$

В силу закона Вальраса $\sum_i \tilde{p}_i z_i(\tilde{p}) = 0$ и, следовательно,

$$\sum_i z_i(\tilde{p})\max\left(0, z_i(\tilde{p})\right) = 0.$$

Заметим, что любое слагаемое в этой сумме неотрицательно:

$$z_i(\tilde{p})\max\left(0, z_i(\tilde{p})\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } z_i(\tilde{p}) < 0; \\ \left(z_i(\tilde{p})\right)^2 \geq 0, \text{ если } z_i(\tilde{p}) \geq 0. \end{cases}$$

Итак, все слагаемые неотрицательны, а их сумма равна нулю, а это возможно, только если каждое из слагаемых равно нулю:

$$z_i(\tilde{p})\max\left(0, \ z_i(\tilde{p})\right) = 0.$$

Это означает, что $z_i(p^*) \leq 0$ для всех $i=1, ..., N$.

Покажем, что в силу закона Вальраса все рынки уравновешены. Предположим, что это не так и существует по крайней мере один рынок, скажем, рынок товара l, на котором $z_l(\tilde{p}) < 0$ и $\tilde{p}_l > 0$. Тогда $\tilde{p}_l z_l(\tilde{p}) < 0$. Поскольку мы доказали, что $z_i(\tilde{p}) \leq 0$ для всех $i=1, ..., N$, то домножим каждое неравенство на $\tilde{p}_i \geq 0$ (знак неравенства при этом сохранится): $\tilde{p}_i z_i(\tilde{p}) \leq 0$ для всех $i=1, ..., N$. Просуммируем по всем товарам с учетом строгого неравенства для товара l:

$$\sum_{i \neq l} \tilde{p}_i z_i(\tilde{p}) + \tilde{p}_l z_l(\tilde{p}) < 0,$$

что противоречит закону Вальраса. Это означает, что наше предположение неверно, и если на каком-то рынке имеется избыточное предложение, то цена этого товара равна нулю, т.е. $\tilde{p}_i z_i(\tilde{p}) = 0$ для всех $i=1, ..., N$. ■

Таким образом, мы показали, что если избыточный спрос удовлетворяет определенным условиям, то равновесие существует. Теперь следует выяснить, насколько ограничительны эти условия, т.е., каковы должны быть характеристики экономики, чтобы порожденный ею спрос удовлетворил этим требованиям.

Как мы знаем, для выполнения закона Вальраса достаточно потребовать локальной ненасыщаемости предпочтений всех потребителей. Однако этого недостаточно. Значительно больше проблем возникает с тем, чтобы избыточный спрос определялся однозначно (являлся функцией) и, более того, чтобы эта функция была непрерывной при всех неотрицательных ценах. Непрерывность и строгая выпуклость предпочтений гарантирует единственность решения задачи максимизации полезности и, следовательно, единственность избыточного спроса при положительных ценах. Кроме того, при положительных первоначальных запасах всех товаров у всех потребителей функции избыточного спроса будут непрерывными на множестве положительных цен. Если же цена какого-то блага равна нулю, то значение спроса либо не определено (соответствующие задачи потребителей не имеют решения), либо определено неоднозначно (задачи потребителей имеют несколько решений). В этом случае утверждение 18.1 можно использовать для доказательства существования равновесия, построив некую модификацию избыточного спроса на основе приема, который продемонстрирован при доказательстве утверждения 18.2.

Утверждение 18.2. Существование равновесия для экономики обмена с положительными начальными запасами.

Если в экономике обмена все потребители имеют локально ненасыщаемые, непрерывные, строго выпуклые предпочтения и положительные начальные запасы каждого блага ($\omega^k \gg 0$ для всех $k = 1, \ldots, M$), то равновесие существует.

Доказательство

1. Для того чтобы применить утверждение 18.1, нам требуется, чтобы функции избыточного спроса $z(p)$ были определены не только для положительных, но и для всех неотрицательных цен (проблема в том, что при нулевых ценах некоторых благ множество потребительских наборов не ограничено, и потому задача максимизации по-

лезности может не иметь решения). Для решения этой проблемы модифицируем задачу потребителя, введя дополнительные ограничения сверху на потребительские наборы (своего рода лимиты), однако будем подбирать ограничения таким образом, чтобы на самом деле в равновесии они не являлись существенными.

Итак, рассмотрим модифицированную модель, где задача каждого потребителя имеет следующий вид:

$$\max_{x_i^k \geq 0} u^k(x_1^k, \ \ldots, \ x_N^k)$$

$$\sum_i p_i x_i^k \leq \sum_i p_i \omega_i^k;$$

$$x_i^k \leq \overline{\omega}_i + \varepsilon, \ \varepsilon > 0.$$

2. Допустимое множество модифицированной задачи потребителя будет компактом при любом неотрицательном векторе цен $p \geq 0$, следовательно, при непрерывности предпочтений решение задачи существует. Если, кроме того, предпочтения строго выпуклы, то решение задачи при каждом векторе цен единственно. Таким образом, для модифицированной задачи будут определены модифицированные функции спроса $\overline{x}^k(p)$ и модифицированные функции избыточного спроса $\overline{z}(p)$ при всех $p \geq 0, \ p \neq 0$.

Модифицированные функции избыточного спроса будут непрерывны, поскольку все потребители обладают непрерывными. строго выпуклыми предпочтениями и доходы участников положительны при любых ценах в силу положительности всех координат вектора первоначальных запасов ($p\omega^k > 0$ при всех $p \geq 0, \ p \neq 0$ и $\omega^k >> 0$).

3. Таким образом, можно применить теорему о существовании равновесия к модифицированным функциям избыточного спроса, поскольку $\overline{z}(p)$ — функции непрерывные при всех $p \geq 0, \ p \neq 0$, однородные нулевой степени и удовлетворяют закону Вальраса. Итак, согласно утверждению 18.1, существует вектор цен $\tilde{p} \geq 0, \ p \neq 0$ такой, что $\overline{z}_i(\tilde{p}) \leq 0$ и $\tilde{p}_i \overline{z}_i(\tilde{p}) = 0$ для всех $i = 1, \ \ldots, \ N$.

4. Покажем, что равновесие в модифицированной модели совпадает с равновесием в исходной (без ограничений на x_i^k).

Действительно, если $(\tilde{p},\ \overline{x}(\tilde{p}))$ — равновесие в модифицированной модели, то $\sum_k \overline{x}_i^k(\tilde{p}) \leq \overline{\omega}_i$. Поскольку потребление должно быть неотрицательно, то это означает, что каждое слагаемое в данной сумме не превосходит $\overline{\omega}_i$, и, следовательно, для всех $k=1,\ \ldots,\ M$ и $i=1,\ \ldots,\ N$ имеем

$$\overline{x}_i^k(\tilde{p}) \leq \overline{\omega}_i < \overline{\omega}_i + \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что введенные нами дополнительные ограничения несущественны, поэтому $\overline{x}^k(\tilde{p})$ является решением исходной задачи k-го потребителя. Таким образом, $(\tilde{p},\ \overline{x}(\tilde{p}))$ является равновесием и в исходной модели. ■

Итак, мы доказали существование равновесия в экономике обмена при некоторых условиях для предпочтения и положительности начальных запасов каждого товара у каждого потребителя. Последнее требование в этом списке условий представляется не слишком реалистичным. Обычно участники имеют положительные запасы лишь некоторых товаров. Это условие, как мы помним, было существенно для обеспечения непрерывности избыточного спроса. В действительности требование непрерывности можно несколько ослабить, если при доказательстве существования равновесия пользоваться вместо теоремы Брауэра теоремой Какутани, где требуется лишь полунепрерывность сверху отображения избыточного спроса. В результате можно доказать теорему о существовании равновесия с менее ограничительными условиями на первоначальные запасы. В частности, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 18.3. Существование равновесия в экономике обмена со строго монотонными предпочтениями.

Если в экономике обмена все потребители имеют строго монотонные, непрерывные, строго выпуклые предпочтения и совокупные начальные запасы каждого блага в экономике положительны ($\overline{\omega}_i > 0$ для всех $1=1,\ \ldots,\ N$), то равновесие существует[6].

[6] Доказательство этого утверждения можно найти в учебнике: *Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic Theory. P. 585—587.

До сих пор мы вели речь о существовании равновесия в экономике обмена. Что можно сказать о существовании равновесия в экономике с производством? Заметим, что, если бы условия утверждения 18.1 были выполнены в экономике с производством, то существование равновесия для такой экономики было бы доказано. Однако в экономике с производством помимо проблем с непрерывностью избыточного спроса, которые мы наблюдали и в экономике обмена, возникают дополнительные проблемы, связанные с самими функциями избыточного спроса.

Наиболее распространенный в теории производства тип технологий — это технологии с постоянной отдачей от масштаба. Как мы знаем, для таких технологий задача максимизации прибыли при некоторых ценах дает континуум решений, а это означает, что при данных ценах избыточный спрос не будет однозначно определен и соответственно утверждение 18.1 для таких экономик не работает. В этом случае нужно пользоваться другими вариантами теоремы о существовании равновесия, которые позволяют работать с многозначными отображениями. Примеры подобных утверждений можно найти в учебнике Х. Вэриана[7].

Лекция 19

Единственность равновесия

Предположим, что равновесие существует. Можем ли мы утверждать, что оно единственно? Как мы увидим далее, без дополнительных предпосылок мы не можем гарантировать единственность равновесия. Однако почему этот вопрос для нас столь важен? Мы строили модели общего равновесия для того, чтобы с их помощью анализировать ре-

[7] *Varian H.* Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch.18.5.

акцию экономики на изменения в экзогенных параметрах, т.е. для того, чтобы проводить анализ сравнительной статики. В случае множественности равновесий подобный анализ будет практически лишен смысла. Проблема в том, что даже если в настоящий момент мы знаем, в каком именно состоянии находится экономика, то неясно, в какое состояние равновесия перейдет она в результате изменения экзогенных параметров.

В дальнейшем, обсуждая вопрос единственности равновесия, договоримся рассматривать экономику, где нет свободных благ, т.е. в равновесии все цены положительны.

Говоря о единственности равновесия, следует разделять единственность (с точностью до множителя) равновесного вектора цен и единственность равновесного распределения, поскольку возможны ситуации, когда одному равновесному вектору цен соответствует несколько равновесных распределений и, наоборот, когда одному равновесному распределению соответствует несколько равновесных векторов цен.

Попытаемся проанализировать причины неединственности равновесных цен на примере экономики обмена с двумя товарами. Такая экономика удобна прежде всего тем, что мы можем рассматривать избыточный спрос лишь на один товар и по нему делать выводы о равновесии в экономике в целом.

Пример 19.1. Единственность равновесного вектора цен в двухтоварной экономике обмена.

Рассмотрим экономику обмена, где все потребители имеют непрерывные, строго выпуклые, строго монотонные предпочтения, определенные на $X = R_+^2$, и обладают положительными начальными запасами всех товаров. В силу строгой выпуклости предпочтений избыточный спрос будет определен однозначно при каждом векторе цен $p \gg 0$, и мы можем говорить о функциях избыточного спроса. Для удобства пронормируем цены, положив $p_2 = 1$. Напомним, что в силу непрерывности функций полезности и положительности доходов потребителей при любых ценах $(I^k(p_1,\ 1) = p_1\omega_1^k + \omega_2^k > 0$ в силу положительности первоначальных запасов) функция избыточного спроса непрерывна при всех $p \gg 0$.

Пусть избыточный спрос на первый товар $z_1(p_1,\ 1)$ ведет себя так, как это изображено на рис. 19.1. Тогда в экономике существует три равновесных вектора цен $(p_1^1,\ 1)$, $(p_1^2,\ 1)$ и $(\bar{p}_1,\ 1)$. Поведение функции избыточного спроса на первый товар в окрестности точки $\bar{p}_1$ не совсем согласуется с интуицией: с ростом цены на товар мы наблюдаем увеличение избыточного спроса. Именно этот «нестандартный» участок функции $z_1(p_1,\ 1)$ и приводит в конечном счете к неединственности равновесия, поскольку, как мы знаем, функция $z_1(p_1,\ 1)$ принимает произвольно большие значения при цене первого блага, близкой к нулю, что дает равновесную цену $(p_1^1 < \bar{p}_1)$, и, с другой стороны, $z_1(p_1,\ 1)$ стремится к $-\bar{\omega}_1$ при достачно высокой цене первого блага, что дает по крайней мере еще одно пересечение графика $z_1(p_1,\ 1)$ с нулем при $p_1^2 > \bar{p}_1$.

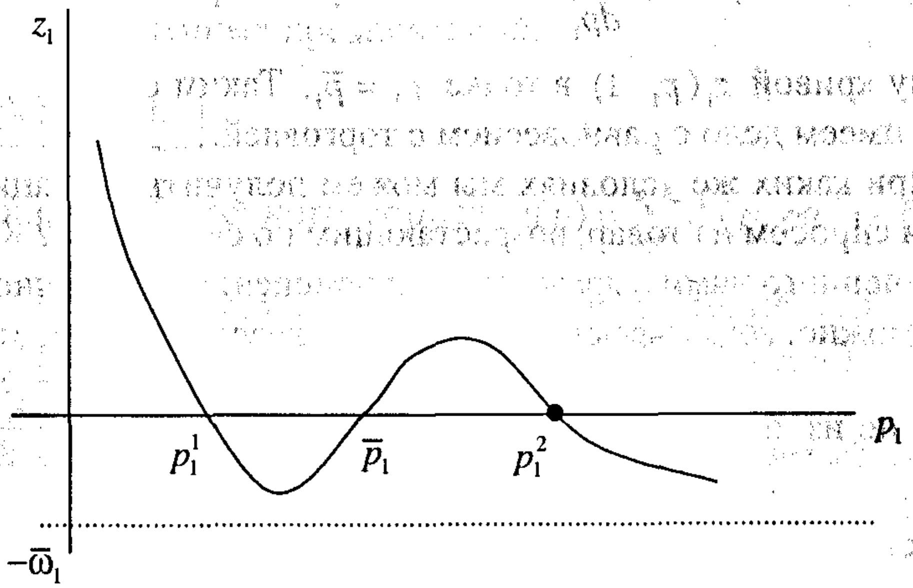


Рис. 19.1. Множественность равновесий в двухтоварной экономике обмена

Итак, проанализируем поведение $z_1(p_1,\ 1)$ в окрестности точки $p_1 = \bar{p}_1$, воспользовавшись уравнением Слуцкого:

$$\frac{dz_1(\bar{p})}{dp_1} = \frac{dx_1^1(\bar{p})}{dp_1} + \frac{dx_1^2(\bar{p})}{dp_1} =$$

$$= \frac{\partial h_1^1(\bar{p})}{\partial p_1} + \frac{\partial h_1^2(\bar{p})}{\partial p_1} + (\omega_1^1 - x_1^1)\frac{\partial x_1^1(\bar{p})}{\partial I} + (\omega_1^2 - x_1^2)\frac{\partial x_1^2(\bar{p})}{\partial I}.$$

Первые два слагаемые описывают эффекты замещения и потому неположительны. Поскольку $x_1^k - \omega_1^k$ дает избыточный спрос на первое благо для k-го участника, то обозначим его через z_1^k. Учитывая, что $\bar{p}$ — равновесная цена, получаем, что $z_1 = z_1^1 + z_1^2 = 0$. Выразив отсюда z_1^1 через z_1^2 и подставив в найденное выше выражение, получим

$$\frac{dz_1(\bar{p})}{dp_1} = \frac{\partial h_1^1(\bar{p})}{\partial p_1} + \frac{\partial h_1^2(\bar{p})}{\partial p_1} + z_1^2(\bar{p})\left(\frac{\partial x_1^1(\bar{p})}{\partial I} - \frac{\partial x_1^2(\bar{p})}{\partial I}\right).$$

Заметим, что $z_1^2(\bar{p}) \neq 0$, поскольку иначе последнее слагаемое было бы нулевым и в силу неположительности эффектов замещения мы бы получили, что $\frac{dz_1(\bar{p})}{dp_1} \leq 0$, а это противоречит положительному наклону кривой $z_1(p_1,\ 1)$ в точке $p_1 = \bar{p}_1$. Таким образом, $z_1^2(\bar{p}) \neq 0$, т.е. мы имеем дело с равновесием с торговлей.

При каких же условиях мы можем получить ситуацию с избыточным спросом на товар, возрастающим по своей цене? Как следует из полученного нами выражения для изменения избыточного спроса, это возможно, когда эффекты замещения невелики и при этом выполнено одно из двух условий: либо $z_1^2(\bar{p}) > 0$ и $\frac{\partial x_1^1(\bar{p})}{\partial I} < \frac{\partial x_1^2(\bar{p})}{\partial I}$, либо $z_1^2(\bar{p}) < 0$ и $\frac{\partial x_1^1(\bar{p})}{\partial I} > \frac{\partial x_1^2(\bar{p})}{\partial I}$. Это означает, что спрос агента, который является чистым покупателем товара, должен быть менее чувствителен к доходу, чем спрос чистого продавца.

Из проведенного анализа мы можем сделать вывод, что причиной множественности равновесных векторов цен может служить поведение эффектов дохода. С неупорядоченным поведением эффектов дохода мы уже встречались ранее, когда изучали проблемы, возникающие при агрегировании спроса. Тогда же мы пришли к выводу, что именно в силу неупорядоченности эффектов дохода слабая аксиома выявленных предпочтений может не иметь место для агрегированного спроса. Это наводит на мысль попытаться проанализировать проблему единственности в условиях, когда совокупный спрос удовлетворяет слабой аксиоме.

Слабая аксиома выявленных предпочтений и единственность равновесия

Рассмотрим экономику, которая задается функциями избыточного спроса для экономики обмена: $z(p)=\sum_k x^k(p,p\omega^k)-\bar{\omega}$ и выпуклым (агрегированным) производственным множеством Y, обладающим постоянной отдачей от масштаба.

Будем рассматривать избыточный спрос, удовлетворяющий слабой аксиоме выявленных предпочтений.

Определение

Функции избыточного спроса $z(p)=\sum_k x^k(p,p\omega^k)-\bar{\omega}$ удовлетворяют слабой аксиоме выявленных предпочтений, если для любых векторов цен p и p' таких, что $z(p)\neq z(p')$ и $pz(p')\leq 0$, имеет место $p'z(p)>0$. □

Покажем, что слабая аксиома является необходимым условием единственности равновесного вектора цен для экономики, задаваемой $z(p)$ и произвольной выпуклой технологией с постоянной отдачей от масштаба. Вместе с тем слабая аксиома является достаточным условиям выпуклости множества равновесных цен в таких экономиках, что при конечности векторов равновесных цен означает единственность.

Утверждение 19.1. Слабая аксиома и единственность равновесного вектора цен.

Пусть все потребители в экономике имеют строго выпуклые, непрерывные, строго монотонные предпочтения. Тогда:

1) если функции избыточного спроса $z(p)$ таковы, что в любой экономике, задаваемой $z(p)$ и выпуклой технологией с постоянной отдачей от масштаба, вектор равновесных цен единственный, то $z(p)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений;

2) если $z(p)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, то в любой экономике, образованной $z(p)$ и выпуклой технологией с постоянной отдачей от масштаба, множество равновесных векторов цен выпукло.

Доказательство

1. Докажем первую часть утверждения. Предположим, что слабая аксиома не выполняется, т.е. существуют векторы цен p и p' такие, что $z(p) \neq z(p')$, $pz(p') \leq 0$ и $p'z(p) \leq 0$.

Рассмотрим производственное множество $\tilde{Y} = \{y \in R^N : py \leq 0,\ p'y \leq 0\}$. Это множество выпукло и обладает постоянной отдачей от масштаба. Покажем, что p и p' являются равновесными векторами цен для экономики, образованной $z(p)$ и $\tilde{Y}$.

Заметим, что $y = z(p) \in \tilde{Y}$, поскольку $p'z(p) \leq 0$ по предположению и $pz(p) \leq 0$ в силу закона Вальраса. По определению множества $\tilde{Y}$ фирма с такой технологией не может иметь положительной прибыли при ценах p. Поскольку y дает нулевую прибыль при ценах p в силу закона Вальраса $(py = pz(p) = 0)$, то выполнено условие максимизации прибыли. Остальные условия равновесия выполняются автоматически. Следовательно, $(p,\ z(p),\ y)$ образует равновесие по Вальрасу в этой экономике.

Аналогично получаем, что $y' = z(p') \in \tilde{Y}$, поскольку по допущению $p'z(p) \leq 0$ и $p'z(p') \leq 0$ в силу закона Вальраса. По определению $\tilde{Y}$ прибыль фирмы при ценах $\tilde{p}$ всегда не выше нуля, а $y' = z(p')$ дает нулевую прибыль в силу закона Вальраса. Отсюда заключаем, что $(p',\ z(p'),\ y')$ образует равновесие по Вальрасу. Таким образом, поскольку $z(p) \neq z(p')$, имеются два различных равновесия, что противоречит исходной посылке.

2. Докажем вторую часть утверждения. Пусть p' и p'' — два равновесных вектора цен для экономики, образованной $z(p)$ и некоторой выпуклой технологией с постоянной отдачей от масштаба Y. Это озна-

чает, что существуют $y' \in Y$ и $y'' \in Y$ такие, что $z(p') = y'$, $z(p'') = y''$ и $p'y' = 0 \geq p'y$, $p''y'' = 0 \geq p''y$ для всех $y \in Y$.

Рассмотрим $\tilde{p} = \alpha p' + (1-\alpha)p''$, где $\alpha \in [0, 1]$. Прибыль при ценах $\tilde{p}$ равна

$$\tilde{p}y = \alpha p'y + (1-\alpha)p''y \leq 0 \text{ для всех } y \in Y,$$

поскольку $p'y' = 0 \geq p'y$ и $p''y'' = 0 \geq p''y$. Так как $z(p') \in Y$ и $z(p'') \in Y$, то полученное неравенство, в частности, означает, что

$$\tilde{p}z(p') \leq 0 \text{ и } \tilde{p}z(p'') \leq 0.$$

Покажем, что $z(\tilde{p}) \in Y$, т.е. все рынки сбалансированы и, значит, $\tilde{p}$ является равновесным вектором цен.

Стоимость избыточного спроса в силу закона Вальраса равна нулю, а согласно определению $\tilde{p}$ ее можно выразить как

$$0 = \tilde{p}z(\tilde{p}) = \alpha p'z(\tilde{p}) + (1-\alpha)p''z(\tilde{p}).$$

Это означает, что одно из двух слагаемых должно быть меньше либо равно нулю:

$$p'z(\tilde{p}) \leq 0 \text{ или } p''z(\tilde{p}) \leq 0.$$

Если имеет место первое неравенство, то, комбинируя его с полученным ранее неравенством $\tilde{p}z(p') \leq 0$, приходим к нарушению слабой аксиомы, если $z(p') \neq z(\tilde{p})$. Аналогично, если имеет место второе неравенство, в комбинации с условием $\tilde{p}z(p'') \leq 0$ также получаем нарушение слабой аксиомы при $z(p'') \neq z(\tilde{p})$. Итак, можно заключить, что либо $z(\tilde{p}) = z(p')$, либо $z(\tilde{p}) = z(p'')$. Учитывая, что $z(p') \in Y$ и $z(p'') \in Y$, любое из этих равенств означает, что $z(\tilde{p}) \in Y$. Отсюда вытекает, что $\tilde{p} = \alpha p' + (1-\alpha)p''$ при $\alpha \in [0, 1]$ является равновесным вектором цен, и мы можем заключить, что множество равновесных векторов цен выпукло, поскольку p' и p'' — два произвольных равновесных вектора цен в данной экономике. ■

Валовая заменимость и единственность равновесия

Другой подход к вопросу о единственности равновесия также основан на идее упорядоченности эффектов дохода и рассматривает специальную экономику, где все товары являются валовыми заменителями.

Определение

Функции избыточного спроса $z(p)$ обладают свойством *валовой заменимости*, если для любых векторов цен p и p' таких, что для некоторых i $p_i' > p_i$ и $p_l' = p_l$ для всех $l \neq i$, имеет место $z_l(p') > z_l(p)$ для всех $l \neq i$. □

Валовая заменимость означает, что при повышении цены одного из товаров избыточный спрос на все остальные товары растет. В частности, валовая заменимость делает невозможной ситуацию возрастания избыточного спроса на товар по своей цене, которую мы наблюдали на рис. 19.1. Покажем, что в экономике с валовой заменимостью не может быть более одного вектора равновесных цен.

Утверждение 19.2. Единственность вектора равновесных цен в экономике с валовой заменимостью.

Пусть функции избыточного спроса $z(p)$ удовлетворяют свойству валовой заменимости. Тогда, если равновесие существует, вектор равновесных цен единствен.

Доказательство

Докажем от противного. Предположим, что существуют два различных равновесных вектора цен $p' \gg 0$ и $p'' \gg 0$, причем не существует $\lambda > 0$ такого, что $p' = \lambda p''$. Поскольку оба вектора являются равновесными, то $z(p') = z(p'') = 0$.

Рассмотрим отношение координат векторов p' и p'', найдем максимальное из этих отношений и обозначим через α:

$$\max_i \frac{p_i'}{p_i''} = \frac{p_l'}{p_l''} \equiv \alpha.$$

Рассмотрим векторы p' и $\alpha p''$. По определению α имеем

$$p_l' = \alpha p_l'' \text{ и } p_i' \le \alpha p_i'' \text{ для всех } i = 1, \ldots, N,$$

причем по крайней мере для одного товара неравенство строгое, поскольку по предположению для любого $\alpha > 0$ выполнено условие $p' \neq \alpha p''$.

В силу однородности избыточного спроса $z(\alpha p'') = z(p'')$, и потому вектор $\alpha p''$ является равновесным: $z(\alpha p'') = 0$. Рассмотрим переход от вектора цен p' к вектору $\alpha p''$. Этот переход связан с повышением цен некоторых товаров, тогда в силу валовой заменимости избыточный спрос на те товары, цены которых остались неизменными, должен возрасти. Как мы знаем, одним из таких товаров является товар с индексом l, и, следовательно, спрос на этот товар должен возрасти:

$$0 = z_l(\alpha p'') > z_l(p').$$

Это означает, что при векторе цен p' на рынке l-го товара будет иметь место избыточное предложение, что при $p' >> 0$ противоречит тому, что p' — равновесный вектор цен. ■

Насколько реалистично предположение о валовой заменимости? В экономике с агрегированными благами эта гипотеза вполне разумна, поскольку все агрегированные товары, действительно, в определенной степени являются заменителями друг друга. В дисагрегированной экономике подобное предположение нереалистично, поскольку, как известно, некоторые товары служат дополнителями, а не заменителями. Однако некоторые достаточно распространенные функции полезности порождают спрос, удовлетворяющий валовой заменимости, и при отсутствии производства избыточный спрос в такой экономике также будет удовлетворять свойству валовой заменимости. Ниже мы приведем пример достаточного условия, обеспечивающего валовую заменимость в экономике обмена.

Утверждение 19.3. Критерий валовой заменимости.

Пусть функции полезности всех потребителей аддитивно сепарабельны $\left(u^k(x^k) = \sum_i u_i^k(x_i^k)\right)$, дважды непрерывно дифференцируемы и, кроме того, $\dfrac{x_i^k \partial u_i^k}{\partial x_i^k}$ возрастает по x_i^k для всех k и i. Тогда избыточный спрос экономики обмена удовлетворяет свойству валовой заменимости для любых первоначальных запасов.

Доказательство этого утверждения базируется на анализе условий первого порядка.

Единственность равновесия и индексные теоремы

Наконец, рассмотрим подход к анализу условий единственности равновесия с точки зрения индексных теорем. Этот подход применим лишь к так называемым регулярным экономикам. Неформально можно определить *регулярную экономику* как экономику, для которой небольшие изменения в избыточном спросе не приводят к изменению количества равновесий.

Проанализируем случай двухтоварной экономики обмена, где все потребители имеют непрерывные, строго выпуклые, строго монотонные предпочтения, определенные на $X^k = R_+^2$, и обладают положительными начальными запасами всех товаров.

Регулярность для такой экономики, во-первых, означает, что все равновесные векторы цен изолированы, т.е. невозможна ситуация, изображенная на рис. 19.2. Как мы видим, даже при очень небольших подвижках в избыточном спросе из континуума равновесий мы переходим в ситуацию с единственным равновесием.

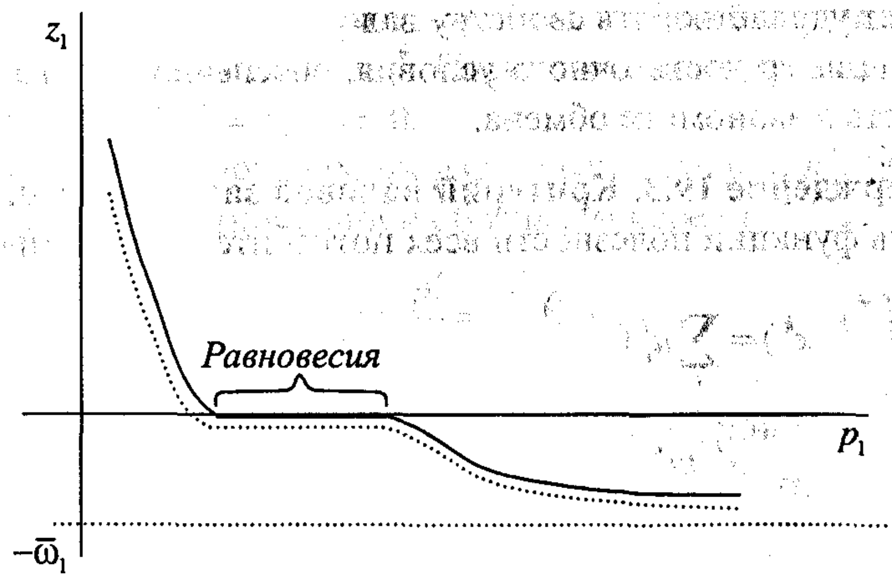


Рис. 19.2. Нерегулярная экономика: случай континуума равновесных векторов цен

Во-вторых, помимо изолированности, которая означает конечность равновесных векторов цен, в регулярной экономике невозможна ситуация, изображенная на рис. 19.3, когда избыточный спрос имеет нулевой наклон в равновесии. Опять же небольшой сдвиг кривой избыточного спроса приводит к тому, что равновесие, соответствующее нулевому наклону избыточного спроса, пропадает.

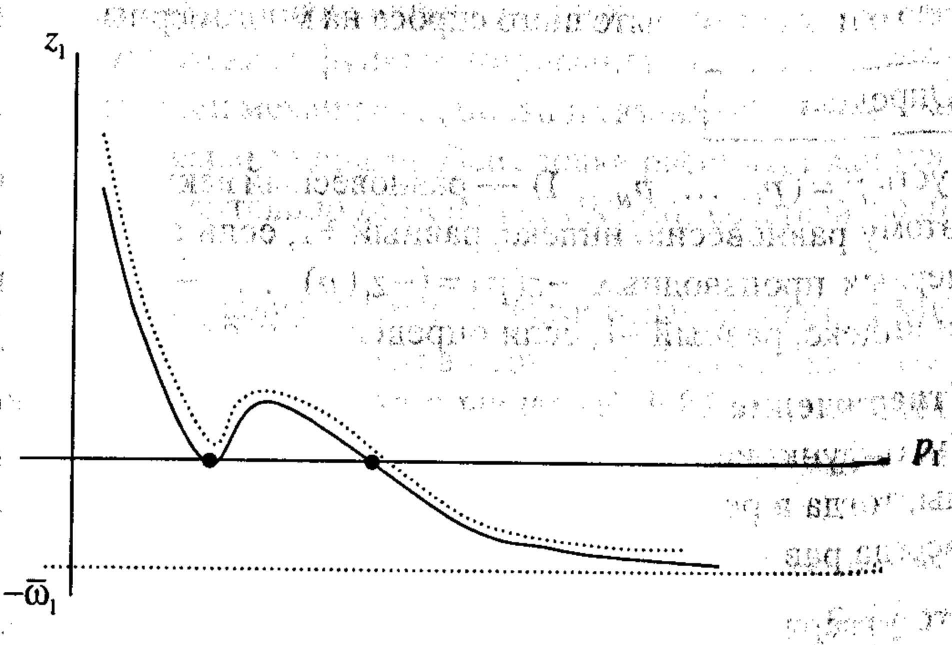


Рис. 19.3. Нерегулярная экономика: случай четного числа равновесных векторов цен

Таким образом, в регулярной экономике имеется конечное число равновесных векторов цен, и кривая избыточного спроса при равновесных ценах имеет либо положительный, либо отрицательный наклон. В итоге это приводит к тому, что в такой экономике будет нечетное количество равновесных векторов цен, поскольку, как мы выяснили в начале лекции, избыточный спрос при большой относительной цене блага стремится к запасу этого блага с обратным знаком, а при приближении цены блага к нулю избыточный спрос неограниченно растет. Отсюда следует вывод: если в каком-то равновесии кривая избыточного спроса имеет положительный наклон (как это было, к примеру, на рис. 19.1), это означает, что существуют другие равновесия с отрицательным наклоном кривой избыточного спроса. И наоборот, если во всех (возможных) равновесиях кривая избыточного спроса может иметь лишь отрицательный наклон, это свидетельствует о том, что в данной экономике может существовать только одно равновесие.

Мы обсуждали случай экономики с двумя товарами, но рассмотренную нами идею можно обобщить и на случай экономики с N товарами. Для этого введем концепцию индекса равновесия, которая будет обобщать идею о наклоне избыточного спроса на многомерный случай.

Определение

Пусть $p = (p_1, \ldots, p_{N-1}, 1)$ — равновесный вектор цен, тогда присвоим этому равновесию индекс, равный +1, если определитель матрицы первых производных $-z(p) = \left(-z_1(p), \ldots, -z_{N-1}(p)\right)$ положителен, и индекс, равный –1, если определитель отрицателен. □

Утверждение 19.4. Индексы в регулярной экономике. Пусть функции избыточного спроса $z(p)$ непрерывно дифференцируемы, тогда в регулярной экономике сумма индексов всех равновесий всегда равна +1[8].

Это утверждение означает, что в регулярной экономике — нечетное число равновесий. Более того, если все возможные равновесия могут иметь лишь положительные индексы, то равновесие единственно. И наконец, если мы нашли равновесие с отрицательным индексом, это означает, что существует еще по крайней мере два других равновесия с положительными индексами.

Лекция 20

Равновесие и ядро

Концепция вальрасовского равновесия предполагает, что наличие множества взаимодействующих конкурентных агентов ведет к появ-

[8] См. доказательство в учебнике: *Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic Theory. P. 593.

лению системы цен, которая воспринимается экономическими агентами как экзогенно данная и которая в итоге приводит к равновесию.

Однако вовсе не очевидно, почему следует представлять модель функционирования рыночной экономики именно таким образом. В настоящей лекции мы попытаемся обосновать не механизм достижения равновесия, а сам результат, т.е. покажем, что альтернативный взгляд на механизм распределения ресурсов не приводит к принципиально другим прогнозам функционирования рыночного механизма. Этот альтернативный механизм основан на взаимовыгодных контрактах, но никак не связан с ценами. Все сделки рассматриваются только как договоры относительно обмена ресурсами, который происходит без посредства цен.

Итак, мы проанализируем все возможные варианты многосторонних договоров и сформируем в итоге некий набор распределений, который будет признан всеми участниками наилучшим. Этот набор распределений будем называть *ядром экономики*, формальное определение которого приведем чуть позже.

Рассмотрим экономику, в которой все потребители имеют непрерывные, строго выпуклые, строго монотонные предпочтения, определенные на потребительском множестве $X^k = R_+^N$. Будем считать, что в экономике также есть доступная для всех выпуклая технология с постоянной отдачей от масштаба $Y \in R^N$. В частности, в качестве примера такой экономики можно рассматривать экономику обмена, если положить $Y = 0$.

Для того чтобы сформулировать концепцию ядра, необходимо определить, каким именно образом в данной экономике идет процесс переговоров между участниками, который в итоге приводит к набору взаимоприемлемых решений. Ключевыми в определении ядра являются понятия *коалиции* и *блокирования*.

Определение

Любое непустое подмножество потребителей $S \subset M$ будем называть *коалицией*.

Коалиция $S \subset M$ *блокирует* допустимое распределение $x = (x^1, \ldots, x^M)$, если существует распределение $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^M) \in R_+^{NM}$ такое, что:

1) $\bar{x}^k \overset{k}{\succ} x^k$ для любого $k \in S$;

2) $\sum_{k \in S} \bar{x}^k \in Y + \left\{ \sum_{k \in S} \omega^k \right\}$. □

Прокомментируем условия 1 и 2 определения. Согласно условию 2 блокирующее распределение $\bar{x}$ должно быть достигнуто посредством общедоступной технологии Y и перераспределения первоначальных запасов членов коалиции. Согласно условию 1 такое распределение будет блокирующим лишь в том случае, если оно улучшит положение каждого участника коалиции.

Используя понятие *блокирующей коалиции*, мы можем сформулировать определение ядра.

Определение

Ядром экономики называется совокупность допустимых распределений, ни для одного из которых не существует блокирующей это распределение коалиции. □

Проиллюстрируем концепцию ядра на примере экономики обмена с двумя товарами, где имеется два потребителя.

Пример 20.1. Ядро экономики обмена с двумя потребителями.

Рассмотрим экономику обмена, представленную на рис. 20.1, где оба потребителя имеют функции полезности Кобба — Дугласа. Покажем, что ядром этой экономики является отрезок контрактной кривой, лежащий между кривыми безразличия двух потребителей, проведенными через точку первоначальных запасов.

Заметим, что любое распределение, лежащее вне контрактной кривой, может быть заблокировано коалицией, состоящей из двух потребителей. Действительно, рассмотрим произвольное допустимое распределение x, не принадлежащее контрактной кривой. Это распределение не Парето-оптимально, следовательно, существует другое допустимое распределение $\hat{x}$ такое, что всем потребителям в нем будет не хуже, а одному, скажем первому, строго лучше: $\hat{x}^1 \overset{1}{\succ} x^1$ и $\hat{x}^2 \overset{2}{\succsim} x^2$. Воспользовавшись непрерывностью предпочтений, можно уменьшить количество какого-то блага в потребительском наборе первого потребителя (так, чтобы ему, по-прежнему было лучше, чем в x^1) и увеличить на данную величину количество этого блага в потребительском наборе второго, полезность которого в результате также возрастет. Поскольку мы включили в коалицию обоих участников, то такое перераспределение достижимо с помощью их первоначальных запасов и, таким образом, исходное распределение x оказалось заблокировано.

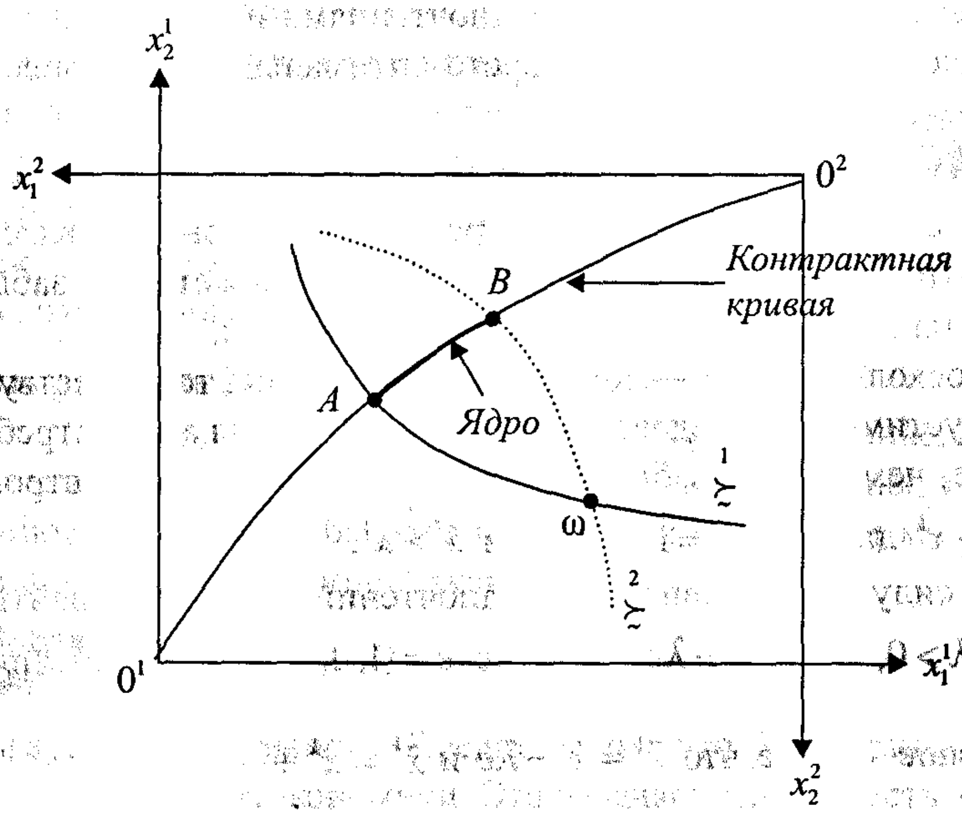


Рис. 20.1. Ядро экономики обмена с двумя потребителями

Все распределения, принадлежащие интервалу $[0^1, A)$, блокируются коалицией, состоящей только из первого участника, поскольку в этих точках его благосостояние меньше, чем в точке первоначальных запасов. Аналогично все распределения, принадлежащие $[0^2, B)$ блокируются коалицией, состоящей из второго участника.

Итак, перебрав всевозможные коалиции, мы приходим к выводу, что в данной экономике невозможно заблокировать лишь распределения, лежащие на $[A, B]$.

В данном примере было показано, что в силу непрерывности и возрастания функций полезности потребителей все распределения, лежащие в ядре, должны быть Парето-оптимальными. Сформулируем и докажем обобщение данного утверждения для произвольной экономики с непрерывными, строго монотонными предпочтениями.

Утверждение 20.1. Ядро и Парето-отимальные распределения. Если в экономике все потребители характеризуются непрерывными, строго монотонными предпочтениями и x — распределение, принадлежащее ядру, то x — Парето-оптимальное распределение.

Доказательство

Пусть x-распределение из ядра, и при этом оно не является Парето-оптимальным. Покажем, что оно всегда может быть заблокировано коалицией, состоящей из всех потребителей.

Поскольку (x, y) — не Парето-оптимально, то существует другое допустимое распределение $(\hat{x}, \hat{y})$, которое для всех потребителей не хуже, чем x, и хотя бы для одного, скажем первого, строго лучше: $\hat{x}^k \overset{k}{\succsim} x^k$ для всех $k = 1, \ldots, M$ и $\hat{x}^1 \overset{1}{\succ} x^1$.

В силу непрерывности предпочтений мы можем найти такое число $\lambda > 0$, что $(\hat{x}^1 - \lambda e) \overset{1}{\succ} x^1$, где $e = (1, 1, \ldots, 1)$. Рассмотрим распределение $\tilde{x}$ такое, что $\tilde{x}^1 = \hat{x}^1 - \lambda e$ и $\tilde{x}^k = \hat{x}^k + \dfrac{\lambda}{M-1} e$ для всех $k \neq 1$.

В силу строгой монотонности предпочтений $\tilde{x}^k \overset{k}{\succ} x^k$ для всех $k \neq 1$ и $(\hat{x}^1 - \lambda e) \overset{1}{\succ} x^1$ в силу соответствующего выбора λ. Таким образом, благосостояние всех членов коалиции улучшилось.

Кроме того, распределение $\tilde{x}$ доступно для данной коалиции, поскольку получено из допустимого распределения $\hat{x}$ путем перераспределения товаров между участниками коалиции. Действительно, в силу допустимости распределения $(\hat{x}, \hat{y})$ имеем $\hat{y} \in Y$ и

$$\sum_k \hat{x}^k = \hat{y} + \sum_k \omega^k.$$

С учетом построения распределения $\tilde{x}$ получаем

$$\sum_k \tilde{x}^k = \sum_k \hat{x}^k - \lambda e + (M-1)\frac{\lambda}{M-1}e = \sum_k \hat{x}^k = \hat{y} + \sum_k \omega^k.$$

Это означает, что мы построили блокирующую коалицию для распределения x, т.е. такое распределение не может лежать в ядре данной экономики. Таким образом, мы пришли к противоречию. ■

Напомним, что мы хотели с помощью концепции ядра предоставить некое обоснование ценового механизма распределения ресурсов, показав, что альтернативный взгляд на механизм распределения ресурсов не приводит к принципиально другим прогнозам функционирования рыночного механизма. Для этого нам необходимо установить связь между равновесными распределениями, к которым приводит экономику механизм цен, и ядром. В следующем утверждении мы покажем, что равновесие всегда находится в ядре.

Утверждение 20.2. Равновесие и ядро.

Если $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$ — равновесие по Вальрасу в экономике, где все потребители имеют локально ненасыщаемые предпочтения, а производственное множество обладает постоянной отдачей от масштаба, то $\tilde{x}$ принадлежит ядру данной экономики.

Доказательство

Докажем от противного. Предположим, что $\tilde{x}$ не принадлежит ядру рассматриваемой экономики. Это означает, что существует блокирующая коалиция $S \in M$, т.е. найдется распределение $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^M) \in R_+^{NM}$ такое, что $\bar{x}^k \overset{k}{\succ} \tilde{x}^k$ для любого $k \in S$ и

$$\sum_{k\in S} \bar{x}^k \in Y + \left\{\sum_{k\in S} \omega^k\right\}.$$

Поскольку $\bar{x}^k \overset{k}{\succ} \tilde{x}^k$, то это означает, что набор $\bar{x}^k$ не был доступен при ценах $\tilde{p}$, когда выбирался набор $\tilde{x}^k$, т.е. $\tilde{p}\bar{x}^k > \tilde{p}\tilde{x}^k$. Просуммировав эти неравенства по всем участникам, входящим в коалицию, получим

$$\sum_{k\in S}\tilde{p}\bar{x}^k > \sum_{k\in S}\tilde{p}\tilde{x}^k.$$

В силу строгой монотонности предпочтений бюджетные ограничения должны выполняться как равенства и, значит,

$$\sum_{k\in S}\tilde{p}\tilde{x}^k = \sum_{k\in S}\theta^k\tilde{p}\tilde{y} + \sum_{k\in S}\tilde{p}\omega^k$$

или с учетом вышеприведенного неравенства

$$\sum_{k\in S}\tilde{p}\bar{x}^k > \sum_{k\in S}\tilde{p}\tilde{x}^k = \sum_{k\in S}\theta^k\tilde{p}\tilde{y} + \sum_{k\in S}\tilde{p}\omega^k.$$

Поскольку в данной экономике производственное множество обладает постоянной отдачей от масштаба, то в равновесии прибыль равна нулю ($\tilde{p}\,\tilde{y}=0$) и мы получаем, что

$$\sum_{k\in S}\tilde{p}\bar{x}^k > \sum_{k\in S}\theta^k\tilde{p}\tilde{y} + \sum_{k\in S}\tilde{p}\omega^k = \sum_{k\in S}\tilde{p}\omega^k.$$

Покажем, что данное неравенство противоречит условию достижимости распределения $\bar{x}$ для членов коалиции. Поскольку по определению блокирующей коалиции $\sum_{k\in S}\bar{x}^k \in Y + \left\{\sum_{k\in S}\omega^k\right\}$, то существует $\bar{y}\in Y$ такой, что

$$\sum_{k\in S}\bar{x}_i^k = \bar{y}_i + \sum_{k\in S}\omega_i^k,\quad i=1,\ \dots,\ N.$$

Домножим каждое равенство на $\tilde{p}_i$ и, просуммировав по всем товарам, найдем

$$\sum_{k\in S}\tilde{p}\bar{x}^k = \tilde{p}\bar{y} + \sum_{k\in S}\tilde{p}\omega^k.$$

Поскольку вектор чистых выпусков $\tilde{y}$ приносит максимальную прибыль при ценах $\tilde{p}$ и в силу постоянной отдачи от масштаба максимальная прибыль равняется нулю, то $\tilde{p}\bar{y}\le\tilde{p}\tilde{y}=0$. Следовательно,

$$\sum_{k\in S}\tilde{p}\bar{x}^k = \tilde{p}\bar{y} + \sum_{k\in S}\tilde{p}\omega^k \le \tilde{p}\tilde{y} + \sum_{k\in S}\tilde{p}\omega^k = \sum_{k\in S}\tilde{p}\omega^k.$$

Полученное неравенство противоречит выведенному выше условию $\sum_{k\in S}\tilde{p}\overline{x}^{k}>\sum_{k\in S}\theta^{k}\tilde{p}\tilde{y}+\sum_{k\in S}\tilde{p}\omega^{k}=\sum_{k\in S}\tilde{p}\omega^{k}$. Найденное противоречие свидетельствует, что сделанное ранее предположение о том, что $\tilde{x}$ не принадлежит ядру рассматриваемой экономики, является неверным. ■

Итак, мы показали, что равновесное распределение лежит в ядре. Заметим, что обратное утверждение неверно. Например, в рассмотренном выше примере экономики обмена ядро содержало континуум распределений. Однако если предпочтения представимы функциями полезности Кобба — Дугласа, то лишь одно из распределений, лежащих в ядре, будет равновесным распределением. Напомним, что в экономике с предпочтениями Кобба — Дугласа и положительными запасами каждого блага избыточный спрос удовлетворяет свойству валовой заменимости, что гарантирует единственность равновесного вектора цен и — в силу строгой выпуклости предпочтений — единственность соответствующего распределения. Однако при увеличении числа потребителей, как мы увидим в дальнейшем, все неравновесные распределения будут выбывать из ядра.

В дальнейшем проанализируем, как трансформируется ядро экономики при пропорциональном увеличении количества участников каждого типа. Для начала введем формально определение реплицированной экономики.

$\boxed{\text{Определение}}$

Будем называть *R-кратно реплицированной* экономикой такую экономику, где имеется R потребителей каждого типа. □

Проанализируем распределения, принадлежащие ядру R-кратно реплицированной экономики, с точки зрения потребительских наборов участников одного типа и покажем, что при определенных условиях эти наборы не должны между собой различаться. Это означает, что при реплицировании экономики в ядре не появляются новые (несимметричные) распределения.

Утверждение 20.3. Одинаковый подход в ядре.

Предположим, что все потребители характеризуются строго выпуклыми, непрерывными, строго монотонными предпочтениями, а производственное множество фирмы обладает постоянной отдачей от масштаба. Если x — распределение, принадлежащее ядру R-кратно реплицированной экономики, то любые два агента одного типа в этом распределении должны иметь одинаковые потребительские наборы.

Доказательство

Для удобства обозначим индексом kr r-го индивида типа k. Пусть $r=1, ..., R$, тогда нам нужно показать, что $x^{kr}=x^{kl}$ для всех k, r, l, где $k=1, \ldots, M$ и $l=1, \ldots, R$.

Докажем утверждение от противного. Предположим, что допустимое распределение x лежит в ядре и при этом и не обладает свойством одинакового подхода, т.е. существует $r \neq l : x^{kr} \neq x^{kl}$. Для определенности будем считать, что это так для потребителей из последней группы с номером M. Покажем, что для такого распределения всегда найдется блокирующая коалиция.

Сформируем коалицию из M «обиженных» участников, т.е. включим в коалицию по одному участнику каждого типа, которым достался наихудший набор среди всех участников данного типа (если такие участники в группе есть) и условимся считать, что это первые участники в каждой группе. Тогда

$$x^{kr} \succsim x^{k1} \text{ для всех } k=1, \ldots, M \text{ и } r=1, \ldots, R.$$

Обозначим усредненную потребительскую корзину для каждой группы через $\bar{x}^k$, где

$$\bar{x}^k = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} x^{kr}.$$

В силу строгой выпуклости предпочтений имеем $\bar{x}^k \overset{k}{\succsim} x^{k1}$ для всех $k=1, \ldots, M$. Поскольку мы предположили, что в последней группе участники получают разные наборы, а именно $x^{Mr} \neq x^{M1}$, то в этой группе $\bar{x}^M \neq x^{M1}$ и в силу строгой выпуклости предпочтений имеем $\bar{x}^M \overset{M}{\succ} x^{M1}$.

Согласно определению блокирующей коалиции необходимо предложить распределение, которое позволило бы улучшить положение всех участников коалиции. Для этого перейдем от распределения $\bar{x}$ к распределению $\tilde{x}$, которое будет построено на основе распределения $\bar{x}$ следующим образом. В силу непрерывности предпочтений мы можем найти такое число $\lambda > 0$, что $(\bar{x}^M - \lambda e) \overset{M}{\succ} x^{M1}$, где e — единичный вектор. Тогда положим $\tilde{x}^{M1} = \bar{x}^M - \lambda e$. Распределим λe поровну между остальными участниками коалиции $\tilde{x}^{k1} = \bar{x}^k + \dfrac{\lambda}{M-1} e$. Тогда в силу строгой монотонности предпочтений $\tilde{x}^{k1} \overset{k}{\succ} \bar{x}^{k1}$.

Покажем, что сформированная выше коалиция «обиженных» потребителей может достичь потребительского набора $(\tilde{x}^{11}, ..., \tilde{x}^{M1})$, используя лишь свои начальные запасы и общедоступную технологию Y. Действительно, в силу допустимости распределения x существует такой вектор $y \in Y$, что

$$\sum_{k,r} x^{kr} = y + R \sum_k \omega^k,$$

откуда получаем

$$\sum_k \tilde{x}^{k1} = \sum_k \bar{x}^k - \lambda e + (M-1)\frac{\lambda}{M-1} e = \sum_k \bar{x}^k = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} x^{kr} = \frac{1}{R} y + \sum_k \omega^k.$$

В силу того что производственное множество обладает постоянной отдачей от масштаба, вектор $\dfrac{1}{R} y \in Y$, поэтому $\tilde{x}$ — распределение, которое достижимо для данной коалиции. Итак, мы показали, что коалиция из «обиженных» участников сможет блокировать распределение x, следовательно, такое распределение не может лежать в ядре рассматриваемой экономики. Таким образом, все распределения из ядра реплицированной экономики должны характеризоваться одинаковым подходом к потребителям из одной группы. ■

Вернемся к рассмотренному выше примеру 20.1 и покажем, что происходит с ядром этой экономики при реплицировании.

Пример 20.2. Реплицированная экономика обмена и ядро.

Рассмотрим двукратное реплицирование экономики из примера 20.1, т.е. в реплицированной экономике будет по два участника каждого типа. Покажем, что точка *A* (см. рис. 20.2) не принадлежит ядру реплицированной экономики. Создадим коалицию из двух потребителей первого типа и одного потребителя второго типа.

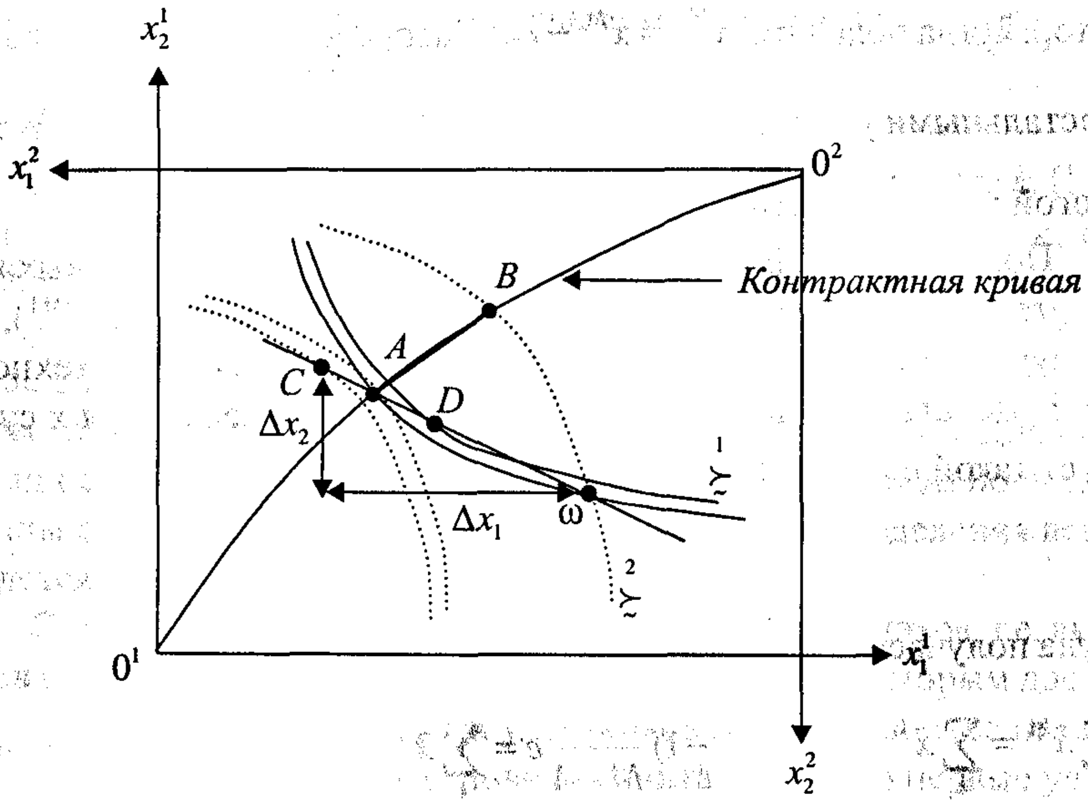


Рис. 20.2. Сужение ядра при реплицировании экономики

Если из первоначальных запасов второго участника взять Δx_2 и дать ему в обмен Δx_1 так, чтобы он переместился в точку *C*, то, как видно из рис. 20.2, благосостояние второго участника улучшится: $x_C \overset{2}{\succ} x_A$. Для того чтобы добавить второму участнику Δx_1, нам необходимо у кого-то из участников коалиции это количество забрать. Поскольку в коалицию входят два участника первого типа, то заберем у каждого из них по $\frac{\Delta x_1}{2}$, а взамен дадим им $\frac{\Delta x_2}{2}$. Тогда каждый из участников первого типа окажется в точке *D*, которая лежит посередине отрезка $[C\omega]$. Как мы видим, точка D строго предпочтительнее для участников первого типа, чем A. Таким образом, построена блокирующая коалиция для распределения A, которое принадлежало ядру нереплицированной экономики.

В следующем утверждении покажем, что ядро сжимается при росте размера экономики таким образом, что любое распределение, отличное от вальрасовского равновесия, не будет принадлежать некоторой реплике рассматриваемой экономики.

Утверждение 20.4. Теорема о сжимающемся ядре.

Предположим, что все потребители обладают строго выпуклыми, непрерывными, строго монотонными предпочтениями, а производственное множество фирмы выпукло и обладает постоянной отдачей от масштаба. Если x — распределение, отличное от вальрасовского равновесия, то существует такая реплика R, что x не принадлежит ядру R-кратно реплицированной экономики.

Доказательство

Данную теорему мы доказывать не будем, а приведем лишь доказательство для экономики обмена с несколько более сильными условиями. Итак, введем ряд упрощенных предположений.

Во-первых, будем считать, что предпочтения каждого потребителя представимы непрерывно дифференцируемой функцией полезности. Более того, будем считать, что предельная полезность каждого блага положительна для любой потребительской корзины.

Во-вторых, предположим, что для каждого участника вектор первоначальных запасов строго предпочтительнее любого распределения, не содержащего хотя бы одного блага.

1. В силу последнего предположения все распределения, лежащие в ядре, будут внутренними, т.е. $x^k \gg 0$ для всех k. Действительно, если некое распределение не является внутренним, то это означает, что для какого-то участника потребительский набор будет содержать нулевую координату и такой участник сможет в одиночку заблокировать подобное распределение, поскольку набор, соответствующий

первоначальным запасам, строго предпочтительнее данного распределения в силу последнего предположения.

2. Предположим, что x — допустимое распределение, которое не является равновесным. Нам нужно показать, что при некоторой реплике R распределение x может быть заблокировано. Если распределение x не является Парето-оптимальным, то согласно утверждению 19.1 оно не может лежать в ядре, поскольку всегда может быть заблокировано даже в нереплицированной экономике коалицией, состоящей из всех потребителей.

3. Итак, мы рассматриваем Парето-оптимальное распределение x, в котором $x^k >> 0$ для всех k. Поскольку мы имеем дело с экономикой, где все потребители обладают выпуклыми, строго монотонными предпочтениями, а производственное множество выпукло (в экономике обмена $Y = -R_+^N$), можно применить вторую теорему благосостояния. Согласно этой теореме существует вектор цен p такой, что $(p,\ x)$ — равновесие в экономике с трансфертами. Раз мы предполагаем, что x не является равновесием в исходной экономике, то трансферты хотя бы для каких-то участников должны быть ненулевыми, т.е. хотя бы один участник должен получить субсидию и хотя бы один — заплатить налог. Будем считать, что первый участник получает субсидию, т.е. $px^1 > p\omega^1$ или $p(x^1 - \omega^1) > 0$.

4. Рассмотрим R раз реплицированную экономику и сформируем следующую коалицию: включим в коалицию всех потребителей, кроме одного потребителя первого типа. Таким образом, в коалицию войдут $R-1$ потребителей первого типа и по R потребителей всех остальных типов, т.е. $RM-1$ потребителей.

Сформируем распределение $\tilde{x}$, в котором потребительская корзина участника образуется следующим образом:

$$\tilde{x}^k = x^k + \frac{1}{RM-1}(x^1 - \omega^1).$$

Заметим, что хотя первый потребитель получает субсидию в денежном выражении, это вовсе не означает, что все координаты вектора $(x^1 - \omega^1)$ положительны. Таким образом, формируя распределение $\tilde{x}$, мы равномерно распределяем как положительные, так и отрицательные компоненты вектора $(x^1 - \omega^1)$ по всем участникам коалиции.

5. Покажем, что $\tilde{x}$ достижимо для рассматриваемой коалиции. По построению имеем

$$(R-1)\tilde{x}^1 + R\sum_{k=2}^{M}\tilde{x}^k = (R-1)x^1 + R\sum_{k=2}^{M}x^k + (RM-1)\frac{1}{RM-1}(x^1-\omega^1) =$$

$$= (R-1)x^1 + R\sum_{k=2}^{M}x^k + (x^1-\omega^1) = R\sum_{k=1}^{M}x^k - \omega^1.$$

Поскольку распределение x — Парето-оптимальное, то оно допустимо и должно удовлетворять условиям материального баланса как равенствам, поскольку предпочтения строго монотонны, поэтому

$$(R-1)\tilde{x}^1 + R\sum_{k=2}^{M}\tilde{x}^k = R\sum_{k=1}^{M}x^k - \omega^1 = R\sum_{k=1}^{M}\omega^k - \omega^1 = (R-1)\omega^1 + R\sum_{k=2}^{M}\omega^k.$$

Итак, мы показали, что участники коалиции могут достичь распределения $\tilde{x}$ путем перераспределения своих начальных запасов.

6. Последний, и наиболее важный, вопрос состоит в том, будет ли данная коалиция блокирующей, т.е. будут ли участники коалиции предпочитать распределение $\tilde{x}$ исходному распределению x? Как будет показано ниже, при соответствующем выборе реплики R данная коалиция действительно является блокирующей.

Нужно найти условия, при которых

$$u^k(\tilde{x}^k) = u^k\left(x^k + \frac{1}{RM-1}(x^1-\omega^1)\right) > u^1(x^k) \quad \text{для всех} \quad k=1, \ldots, M.$$

Обозначим $\dfrac{1}{RM-1} \equiv \alpha$ и рассмотрим для каждого потребителя k $u^k\left(x^k + \alpha(x^1-\omega^1)\right)$. Разложим это выражение в ряд Тейлора в точке $\alpha(x^1-\omega^1)$. Тогда

$$u^k\left(x^k + \alpha(x^1-\omega^1)\right) = u^k(x^k) + u'^k(x^k)\alpha(x^1-\omega^1) + \varphi(\alpha),$$

где $\varphi(\alpha)$ содержит все остальные слагаемые ряда Тейлора. При малых α по определению ($\alpha < \bar{\alpha}^k$) разность $u^k\left(x^k + \alpha(x^1-\omega^1)\right) - u^k(x^k)$ имеет тот же знак, что и величина $\alpha u'^k(x^k)(x^1-\omega^1)$.

Поскольку (p, x) — равновесие, то для каждого потребителя k набор x^k является решением задачи максимизации полезности при ценах p и потому вектор цен пропорционален градиенту функции полезности, вычисленному в точке $x^k : u'^k(x^k) = \lambda^k p$, где λ^k — множитель Лагранжа, соответствующий бюджетному ограничению. Таким образом, $u'^k(x^k)(x^1 - \omega^1) = \lambda^k p(x^1 - \omega^1) > 0$, поскольку по предположению первый потребитель получает субсидию и потому $p(x^1 - \omega^1) > 0$.

Возвращаясь к полученному выше выражению для приращения полезности k-го участника, мы можем заключить, что

$$\operatorname{sign}\left(u^k\left(x^k + \alpha(x^1 - \omega^1)\right) - u^k(x^k)\right) = \operatorname{sign}\left(\alpha u'^k(x^k)(x^1 - \omega^1)\right) =$$
$$= \operatorname{sign}\left(\alpha\lambda^k p(x^1 - \omega^1)\right) > 0$$

при $\alpha \in (0, \bar{\alpha}^k)$.

Следовательно, при малых α $(0 < \alpha < \min \bar{\alpha}^k)$ **для всех** $k = 1, \ldots, M$ имеем

$$u^k\left(x^k + \alpha(x^1 - \omega^1)\right) > u^k(x^k).$$

Таким образом, при малых α (т.е. при большом R) построенная коалиция будет блокирующей. ■

В заключение проиллюстрируем выбор размера реплики графически (см. рис. 20.3).

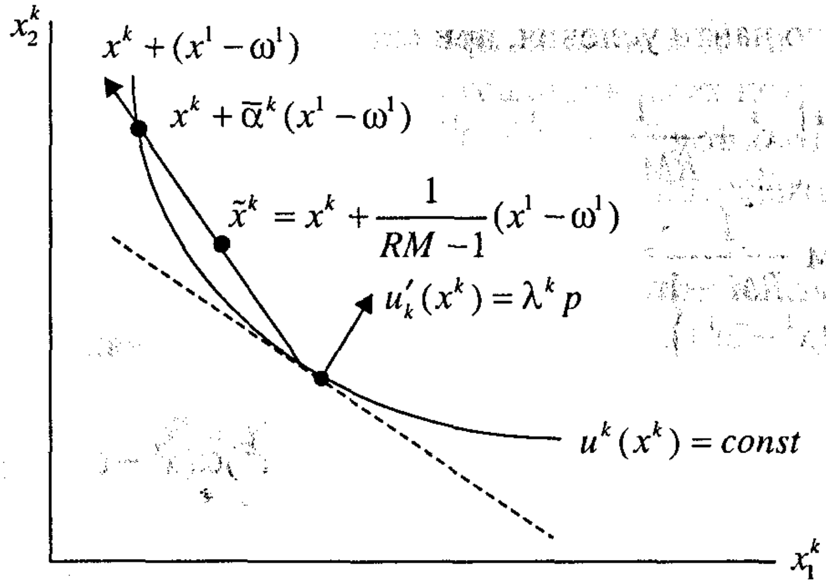


Рис. 20.3. Выбор величины реплики при построении коалиции, блокирующей распределение x

Лекция 21

Общее равновесие в условиях неопределенности

Концепция вальрасовского равновесия до сих пор использовалась нами лишь для анализа ценообразования в условиях определенности, однако далеко не всегда потребитель действует в строго детерминированной среде, зачастую многие решения связаны с риском. Ранее мы анализировали индивидуальное поведение в условиях неопределенности при экзогенно заданных ценах. Теперь мы рассмотрим процесс формирования цен в условиях неопределенности. Для этого нам необходима модель замкнутой системы, где цены являются эндогенными.

Равновесие в экономике с контингентными благами

Будем, как и в случае определенности, рассматривать экономику с N физическими товарами и M потребителями. Для упрощения анализа ограничимся рассмотрением экономики обмена, но, вообще говоря, несложно включить в модель и производство. Основное отличие от стандартной модели, рассмотренной ранее, будет состоять в понятии товара. Любой физический товар мы будем рассматривать в различных состояниях мира, и в любом состоянии мира его количество может быть различным. Пусть имеется S состояний мира, тогда любой физический товар порождает S контингентных благ.

Напомним, что единицей контингентного блага is называют право на получение единицы физического товара i при реализации состояния s. Таким образом, контингентный потребительский набор (корзина) товаров $x = \left(x_{11}, ..., x_{N1}; x_{12}, ..., x_{N2}; x_{1S}, ..., x_{NS}\right) \in R^{NS}$ — право на получение набора товаров $\left(x_{1s}, ..., x_{Ns}\right)$ при реализации состояния s, где $s = 1, ..., S$.

Аналогично вектор первоначальных запасов также является контингентным потребительским набором
$\omega^k = \left(\omega_{11}^k, ..., \omega_{N1}^k; ...; \omega_{1S}^k, ..., \omega_{NS}^k\right) \in R^{NS}$.

Предпочтения потребителей также могут зависеть от состояния мира и, мы будем считать, что для любого потребителя k предпочтения представимы обобщенной функцией ожидаемой полезности, т.е. существуют $u_s^k(\cdot)$ такие, что $\tilde{x}^k \underset{\sim}{\overset{k}{\succ}} x^k$ тогда и только тогда, когда $\sum_s \pi_s^k u_s^k\left(\tilde{x}_s^k\right) \geq \sum_s \pi_s^k u_s^k\left(\tilde{x}_s^k\right)$, где π_s^k — вероятность наступления состояния s с точки зрения потребителя k. Таким образом, вероятности состояний субъективны и могут быть различны для разных участников.

Начнем построение модели общего равновесия, предполагая, что в экономике существует рынок для любого контингентного блага is или, иначе говоря, в экономике имеется полная система рынков. Будем считать, что эти рынки открываются до разрешения неопределенности, например, в момент $t = 0$ (до реализации любого из состояний s), но в момент $t = 0$ ничего не потребляется. Обозначим цену контингентного блага is через p_{is}. Таким образом, на любом рынке в момент $t = 0$ по цене p_{is} покупается (продается) право получить (обязательство поставить) определенное количество физического блага i при реализации состояния s. Заметим, что хотя сами поставки (получение) товара зависят от реализации данного состояния, платежи осуществляются в любом случае, независимо от реализации состояния s (данная схема торговли представлена на рис. 21.1).

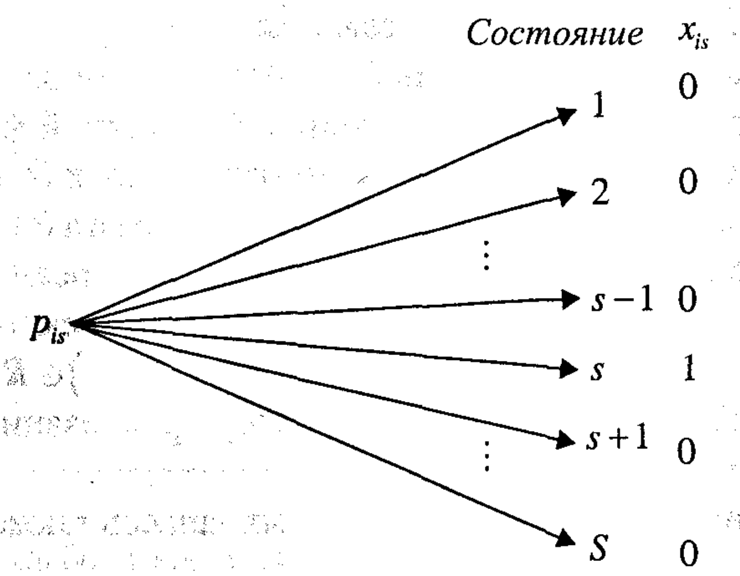


Рис. 21.1. **Покупка единицы контингентного блага** ***is***

С подобным вариантом сделок мы встречались, рассматривая рынок страховых услуг, когда плата за страховку вносилась до того, как становилось ясно, наступит страховой случай или нет, а компенсация выплачивалась только в одном состоянии — при наступлении страхового случая. Кроме того, будем предполагать, что информация симметрична и все агенты точно распознают любое состояние s.

Определение

Распределение $\tilde{x} \in R_+^{NSM}$ и цены $\tilde{p} \in R_+^{NS}$ образуют *равновесие Эрроу — Дебре* в экономике обмена с контингентными благами, если:

1) для любого потребителя k набор $\tilde{x}^k$ является наилучшим согласно предпочтениям данного потребителя среди всех наборов из бюджетного множества $\left\{x^k \in X^k : \tilde{p}x^k \leq \tilde{p}\omega^k\right\}$;

2) рынок любого контингентного блага is уравновешен, т.е.

$\sum_k \tilde{x}_{is}^k \leq \sum_k \omega_{is}^k$ и $\tilde{p}_{is}\left(\sum_k \tilde{x}_{is}^k - \overline{\omega}_{is}\right) = 0$, где $\overline{\omega}_{is} = \sum_k \omega_{is}^k$. □

Фактически описанная выше экономика полностью совпадает с той, которую мы изучали в условиях определенности: изменения коснулись лишь самой концепции потребительского блага и спецификации функции полезности. Это означает, что для равновесия Эрроу — Дебре будут иметь место все результаты, которые получены для случая определенности. Единственное различие состоит в том, что для использования в экономике с контингентными благами функции ожидаемой полезности необходимо в дополнение к стандартным условиям теорем (о существовании, единственности равновесия и теорем благосостояния) потребовать выполнение аксиомы независимости. Итак, поскольку в данной экономике имеет место первая теорема благосостояния, то равновесие Эрроу — Дебре в экономике с локально ненасыщаемыми предпочтениями будет Парето-оптимальным.

Пример 21.1. Графическая иллюстрация равновесия в экономике с контингентными благами.

Рассмотрим экономику с одним физическим товаром $(N = 1)$, двумя состояниями мира $(S = 2)$ и двумя потребителями $(M = 2)$. В такой экономике будет лишь два контингентных товара, а потому ее легко представить графически с помощью «ящика» Эджворта (рис. 21.2). Пусть в каждом состоянии природы в экономике имеется по одной единице физического блага, но в первом состоянии этим благом владеет первый участник, а во втором состоянии — второй участник, т.е. $\omega^1 = (1,\ 0)$ и $\omega^2 = (0,\ 1)$. Таким образом, в данной экономике на агрегированном уровне нет неопределенности.

Пусть функция полезности k-го потребителя имеет вид $\pi_1^k u^k(x_1^k) + \pi_2^k u^k(x_2^k)$, где π_s^k — субъективная вероятность реализации s-го состояния с точки зрения k-го потребителя. Заметим, что полезность не имеет индекса s, т.е. мы рассматриваем ситуацию, где функция полезности k-го потребителя не зависит от состояния мира. Как известно, в этом случае для каждого потребителя предельная норма замещения контингентных благ вдоль линии определенности равна соотношению вероятностей соответствующих состояний: $MRS_{1,2}^k \Big|_{x_1^k = x_2^k} = \dfrac{\pi_1^k}{\pi_2^k}$.

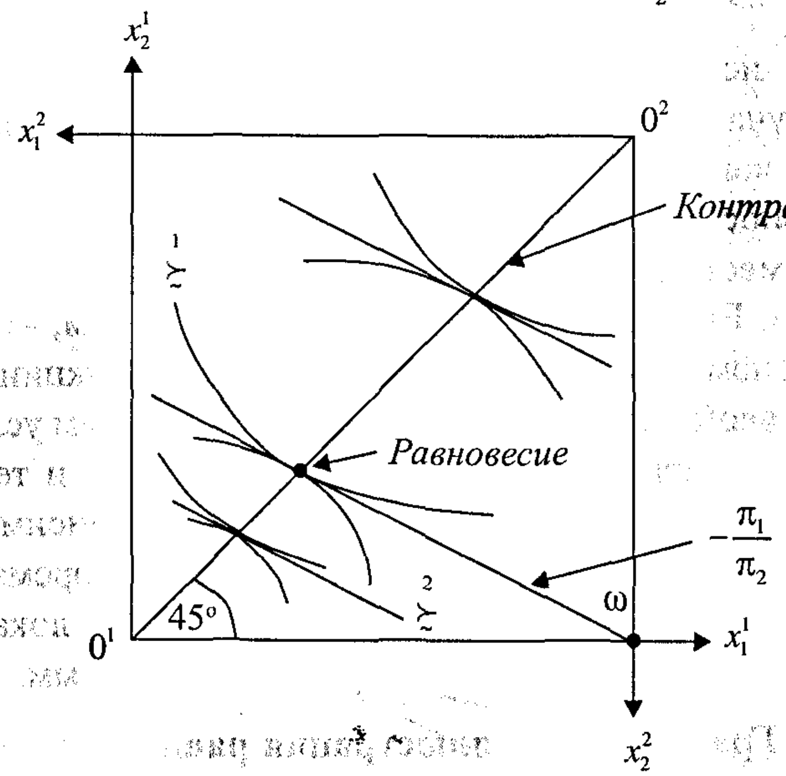


Рис. 21.2. Равновесие в экономике без агрегированного риска: случай объективных вероятностей состояний $\left(\dfrac{\pi_1^k}{\pi_2^k} = \dfrac{\pi_1}{\pi_2}\right)$

В данной экономике линия определенности совпадет с диагональю «ящика» Эджворта, поскольку при отсутствии агрегированного риска «ящик» будет квадратным. Это означает, что, если бы потребители одинаково оценивали бы вероятности двух состояний мира $\left(\frac{\pi_1^1}{\pi_2^1} = \frac{\pi_1^2}{\pi_2^2}\right)$, то предельные нормы замещения были бы одинаковыми вдоль диагонали «ящика». В случае потребителей-рискофобов диагональ соответствовала бы Парето-оптимальным распределениям, как это показано на рис. 21.2. Поскольку равновесное распределение по первой теореме благосостояния должно быть Парето-оптимальным, оно должно лежать на диагонали «ящика», т.е. в равновесии оба потребителя полностью избавляются от риска (потребление на линии определенности).

Если же субъективные оценки состояний агентов не совпадают (рис. 21.3), то в равновесии каждый потребитель будет нести определенный риск, а именно, индивид будет потреблять большее количество агрегированного физического товара в том состоянии, которое он по сравнению с другим считает более вероятным.

Например, пусть $\pi_1^1 < \pi_1^2$ (второй потребитель считает первое состояние более вероятным), тогда контрактная кривая будет лежать слева от диагонали, как показано на рис. 21.3. Поскольку равновесие в модели Эрроу — Дебре Парето-оптимально, то равновесное распределение должно лежать на контрактной кривой и мы имеем в равновесии для первого потребителя $x_1^1 < x_2^1$, а для второго потребителя $x_1^2 > x_2^2$.

Рассмотренное выше равновесие Эрроу — Дебре в экономике с контингентными благами предполагает существование рынка для любого обусловленного товара, но эта предпосылка малореалистична. Кроме того, в модели предполагается, что торговля идет только до разрешения неопределенности, а в действительности рынки существуют в любой момент времени, в том числе и после получения информации о реализации состояния. Заметим, что смысл в наличии торговли после разрешения неопределенности (в момент $t = 1$) в модели

Эрроу — Дебре отсутствует, поскольку, как известно, равновесие будет Парето-оптимальным, а потому даже при возможности такой торговли никаких дальнейших обменов не будет. Однако если рассматривать экономику, где нет полной системы рынков, то тогда возможность такой торговли могла бы существенно изменить распределение ресурсов.

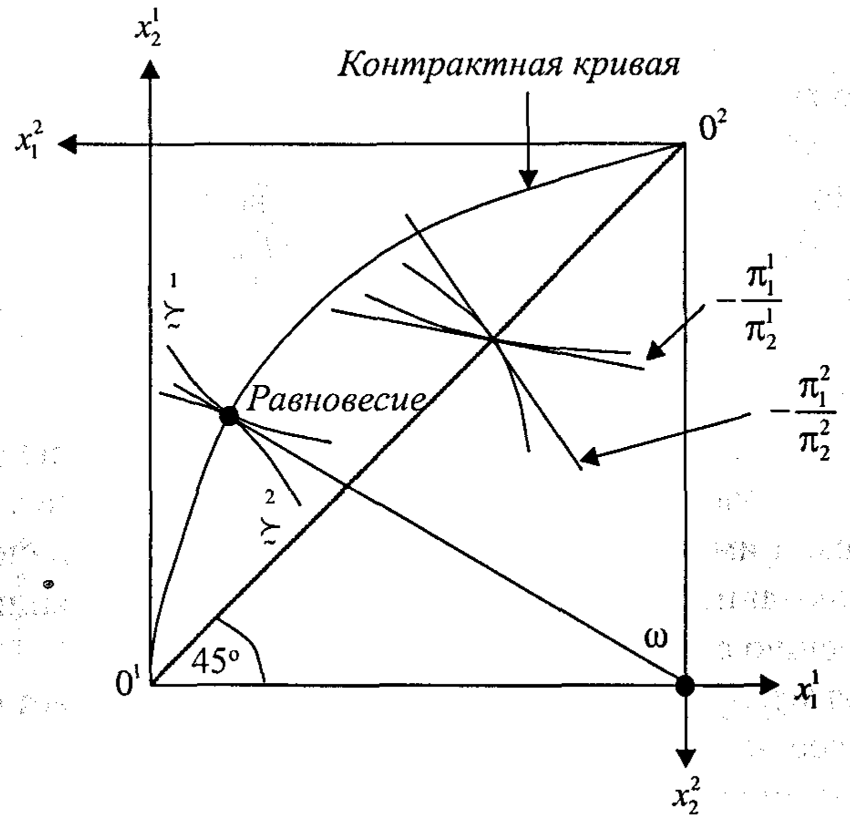


Рис. 21.3. Равновесие в экономике без агрегированного риска для потребителей с различными субъективными вероятностями $\frac{\pi_1^1}{\pi_2^1} < \frac{\pi_1^2}{\pi_2^2}$

Итак, перейдем от модели Эрроу — Дебре к рассмотрению модели последовательной торговли, или модели Раднера.

Равновесие в модели Раднера (экономика с последовательной торговлей)

Будем рассматривать два периода времени: $t = 0$, когда нет информации о том, какое состояние реализуется, и $t = 1$, когда ясно, какое состояние реализовалось. Как и ранее, будем считать, что в период $t = 0$ ничего не потребляется.

Пусть в период $t = 0$ существуют все контингентные рынки хотя бы для одного физического товара, а затем в период $t = 1$ открываются спот-рынки по всем товарам. В такой экономике смысл последующей торговли (на спот-рынках) очевиден, поскольку в ней нет полной системы рынков в период $t = 0$, а потому торговля в нулевом периоде вряд ли исчерпывает все возможности для последующего взаимовыгодного обмена.

Для того чтобы принимать решения в момент $t = 0$, потребителю нужно иметь некие ожидания относительно того, какие же цены сложатся на спот-рынках в момент $t = 1$. Обозначим ожидаемые цены спот-рынков через $p = (p_{11}, \ldots, p_{NS}) \in R_+^{NS}$. Заметим, что предполагаются одинаковые ожидания всех потребителей. Будем считать, что в период $t = 0$ существуют контингентные рынки по всем состояниям для первого физического блага, и обозначим соответствующие форвардные цены через $q = (q_1, \ldots, q_S) \in R_+^S$. Кроме того предположим, что в период $t = 0$ у потребителей нет никакого богатства, и потому каждый потребитель, если решает торговать на форвардных рынках, то заключает как минимум два контракта: один на покупку, а другой — на продажу. Это условие не является существенным: например, можно рассмотреть модифицированную модель, где каждый потребитель k изначально обладает неким набором форвардных контрактов, где в роли таких контрактов выступает вектор первоначальных запасов ω^k.

Каждый потребитель k выбирает объем сделок по каждому из S контингентных благ в период $t = 0$. Обозначим соответствующий вектор покупок-продаж через $z^k \in R^S$. Он также выбирает потребительский набор, а тем самым определяет покупки-продажи на спот-рынках в период $t = 1$. Полученный в результате всех этих сделок потребительский набор обозначим через $x^k \in R_+^{NS}$.

Если придерживаться исходного предположения об отсутствии богатства в момент $t = 0$, то сделки, заключаемые на форвардных рынках, должны удовлетворять условию

$$\sum_s q_s z_s^k \leq 0.$$

Помимо сделок на форвардных рынках, индивид в любом состоянии $s \in S$ выбирает свой потребительский набор, стоимость которого не должна превосходить его совокупного дохода в этом состоянии. Заметим, что доход потребителя в состоянии s включает стоимость запаса ω_k^s и стоимость блага $1s$, которое потребитель купил (продал) в момент $t = 0$. Если $z_s^k > 0$, то он купил благо, и его стоимость добавляется к богатству потребителя в состоянии s, а в противном случае, если $z_s^k < 0$, — вычитается. В результате бюджетное ограничение для спот-рынка s имеет вид

$$p_s x_s^k \le p_s \omega_s^k + p_{1s} z_s^k.$$

Итак, мы можем выписать задачу потребителя:

$$\max_{\substack{x^k \in R_+^{NS} \\ z^k \in R^S}} u^k(x_1^k, ..., x_s^k)$$

$$\sum_s q_s z_s^k \le 0;$$

$$p_s x_s^k \le p_s \omega_s^k + p_{1s} z_s^k \quad \forall\, s = 1, \dots, S,$$

где первое ограничение — условие обмена контингентными благами в период $t = 0$, а второе условие описывает совокупность бюджетных ограничений по всем спот-рынкам.

Заметим, что мы не вводим никаких экзогенных ограничений на объемы форвардных контрактов. Например, возможна ситуация, когда $z_s^k < -\omega_s^k$, т.е. агент может продавать блага больше, чем он будет иметь в состоянии s и, следовательно, если состояние s наступит, ему придется купить на спот-рынке недостающее количество первого товара, чтобы выполнить свои обязательства. Тем не менее возможность таких «коротких позиций» ограничена тем, что потребление x_{is}^k должно быть неотрицательным в любом состоянии s, а следовательно, и богатство должно быть также неотрицательным: $\sum_i p_s \omega_{is}^k + p_{1s} z_s^k \ge 0$ для всех $s = 1, \dots, S$, что накладывает определенные ограничения на z_s^k.

Проясним наше понимание ожидаемых цен. Мы будем считать, что потребители имеют рациональные ожидания, т.е. ожидают именно те цены, которые уравновесят спот-рынки после разрешения неопределенности.

Определение

Набор цен контингентных благ $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_S) \in R_+^S$ и цен спот-рынков $\tilde{p} = (\tilde{p}_{1s}, \ldots, \tilde{p}_{Ns})_{s=1}^S \in R_+^{NS}$, а также набор форвардных контрактов $\tilde{z}^k \in R^S$, выбираемых в период $t = 0$, и потребительские наборы $\tilde{x}^k \in R_+^{NS}$, образуют *равновесие Раднера*, если:

1) для любого потребителя $k(\tilde{z}^k, \tilde{x}^k)$ — решение задачи потребителя при ценах $\tilde{q}$ и $\tilde{p}$;

2) уравновешены все форвардные рынки $\sum_{k=1}^M \tilde{z}_s^k \le 0$ и $\tilde{q}_s \sum_{k=1}^M \tilde{z}_s^k = 0$

для всех $s = 1, \ldots, S$ и все спот-рынки $\sum_{k=1}^M \tilde{x}_{is}^k \le \overline{\omega}_{is}$ и $\tilde{p}_{is}\left(\sum_{k=1}^M \tilde{x}_{is}^k - \overline{\omega}_{is}\right) = 0$

для всех $s = 1, \ldots, S$ и $i = 1, \ldots, N$. □

Заметим, что ограничения задачи потребителя не изменятся, если цены физических товаров в любом состоянии изменяются пропорционально. Таким образом, мы можем пронормировать цены, положив для любого состояния s цену одного из физических товаров равной единице. Пусть это будет первый товар: $p_{1s} = 1$ для всех $s = 1, \ldots, S$. Аналогично у нас есть возможность пронормировать форвардные цены, положив, к примеру, $q_1 = 1$ (или считая, что $\sum_s q_s = 1$).

Покажем, что равновесные распределения в модели Эрроу — Дебре совпадают с множеством равновесных распределений в модели Раднера.

Утверждение 21.1. Соотношение равновесия Эрроу — Дебре и равновесия Раднера.

1. Если распределение $\tilde{x}$ и вектор цен контингентных товаров $\tilde{p}$ образуют равновесие Эрроу — Дебре, то существуют цены $\tilde{q} \in R_+^S$ для набора контингентных благ, соответствующего первому физическому товару, и форвардные контракты $\tilde{z} \in R^{SM}$ такие, что совокуп-

ность $(\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{z}, \tilde{x})$ образует равновесие Раднера в модели с последовательной торговлей.

2. Если совокупность $(\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{z}, \tilde{x})$ образует равновесие Раднера в модели с последовательной торговлей, то существуют положительные множители $(\mu_1, \ldots, \mu_S) \in R_+^S$ такие, что распределение $\tilde{x}$ и вектор цен $(\mu_1 \tilde{p}_1, \ldots, \mu_S \tilde{p}_S) \in R_+^{NS}$ являются равновесием Эрроу — Дебре.

Заметим, что множители μ_s можно проинтерпретировать как оценку в момент $t = 0$ получения 1 руб. в момент $t = 1$ при реализации состояния s.

Доказательство

1. Обозначим бюджетное множество k-го потребителя в модели Эрроу — Дебре через B_{AD}^k:

$$B_{AD}^k = \left\{ x^k \in R_+^{NS} : \sum_{i,s} p_{is}(x_{is}^k - \omega_{is}^k) \le 0 \right\},$$

а бюджетное множество k-го потребителя в модели Раднера через B_R^k:

$$B_R^k = \left\{ x^k \in R_+^{NS} : \sum_s q_s z_s^k \le 0;\ \sum_i p_{is}(x_{is}^k - \omega_{is}^k) \le p_{1s} z_s^k \quad \forall s \right\}.$$

Положим цены на форвардных рынках для первого физического товара равными ценам соответствующих спот-рынков: $q_s = p_{1s}$ для всех $s = 1, \ldots, S$ и покажем, что бюджетное множество k-го потребителя в модели Эрроу — Дебре будет совпадать с бюджетным множеством в модели Раднера (в отношении потребляемых наборов x).

Сначала убедимся в том, что любой набор из бюджетного множества k-го потребителя в модели Эрроу — Дебре будет содержаться и в бюджетном множестве в модели Раднера, т.е. имеет место включение $B_{AD}^k \subset B_R^k$. Пусть $x^k \in B_{AD}^k$. Для любого состояния s определим

$$z_s^k = \frac{\sum_i p_{is}(x_{is}^k - \omega_{is}^k)}{p_{1s}}.$$

Тогда $\sum_s q_s z_s^k = \sum_{i,s} p_{is}(x_{is}^k - \omega_{is}^k) \leq 0$, поскольку мы положили $q_s = p_{1s}$. Кроме того, по построению для всех $s = 1, \ldots, S$ имеем $\sum_i p_{is}(x_{is}^k - \omega_{is}^k) = p_{1s} z_s^k$ и, следовательно, $x^k \in B_R^k$.

Покажем, что имеет место и обратное включение $B_R^k \subset B_{AD}^k$. Пусть $x^k \in B_R^k$. Просуммируем бюджетные ограничения в модели Раднера по всем спот-рынкам: $\sum_s p_s(x_s^k - \omega_s^k) \leq \sum_s p_{1s} z_s^k \leq 0$, следовательно, $x^k \in B_{AD}^k$.

Итак, бюджетные множества двух моделей в отношении потребительских наборов совпадают, откуда следует, что эти задачи будут порождать одинаковые функции спроса, а потому при уравновешенности спот-рынков в модели Раднера будут уравновешены все форвардные рынки в модели Эрроу — Дебре и наоборот. Осталось убедиться в том, что и балансы на форвардных рынках для первого товара в модели Раднера также будут выполняться. Это напрямую следует из определения z, поскольку

$$\sum_k z_s^k = \sum_k \frac{p_s(x_s^k - \omega_s^k)}{p_{1s}} = \frac{p_s}{p_{1s}} \sum_k (x_s^k - \omega_s^k) \leq 0.$$

2. Докажем вторую часть утверждения. Выберем множители μ_s таким образом, что $\mu_s p_{1s} = q_s$. Домножим бюджетные ограничения по каждому спот-рынку s на μ_s, тогда бюджетное множество k-го потребителя в модели Раднера примет вид

$$B_R^k = \left\{ x^k \in R_+^{NS} : \sum_s q_s z_s^k \leq 0;\ p_s \mu_s (x_s^k - \omega_s^k) \leq q_s z_s^k \quad \forall s \right\}.$$

Просуммировав ограничения по всем спот рынкам найдем, что

$$\sum_s p_s \mu_s (x_s^k - \omega_s^k) \leq \sum_s q_s z_s^k \leq 0,$$

т.е. мы получили бюджетное ограничение для модели Эрроу — Дебре. Другими словами, $B_R^k \subset B_{AD}^k$. Обратное включение доказывается аналогично пункту 1. ■

Таким образом, мы можем перейти от модели Эрроу — Дебре, где требуется наличие форвардных рынков по всем контингентным благам, к модели Раднера, где требуется наличие форвардных рынков хотя бы по одному физическому товару. Однако такое значительное снижение числа форвардных рынков в модели Раднера возможно благодаря предпосылке о рациональных ожиданиях относительно цен на спот-рынках.

Итак, если в период $t = 0$ открываются все S форвардных рынков по одному из физических товаров (который можно рассматривать как финансовый актив), то равновесие Раднера будет являться и равновесием Эрроу — Дебре, а значит, результирующее распределение ресурсов будет Парето-оптимальным. Если же откроются не все форвардные рынки, то подобная эквивалентность не будет иметь место и распределение в равновесии Раднера может оказаться неэффективным. В действительности предпосылка о существовании полной системы форвардных рынков даже по одному товару является малореалистичной. Зачастую агенты сталкиваются с тем, что одна из сторон рынка в силу асимметричности информации не может убедиться в наступлении некоторого состояния мира. В итоге это приводит к отсутствию рынка по соответствующему контингентному благу, и в результате система в целом может оказаться не в состоянии достичь эффективного распределения ресурсов.

Рекомендуемая литература

Основная

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. N.Y.: Oxford University Press, 1995. Ch. 15—19.

Varian H. Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 17, 18, 20.

Дополнительная

Arrow K., Debreu G. Existence of Equilibrium for a Competitive Economy // Econometrica. 1954. 22. P. 265—290.

Bradford D. Factor Prices May Be Constant But Factor Returns Are Not // Economic Letters. 1978. P. 199—203.

Dierker E. Two Remarks on the Number of Equilibria of an Economy // Econometrica. 1972. 40. P. 951—953.

Debreu G., Scarf H. A Limit Theorem on the Core of an Economy // International Economic Review. 1963. 4. P. 235—246.

Gravelle H., Rees R. Microeconomics. 2nd ed. Longman, 1992. Ch. 17, 18.

Jehle G., Reny Ph. Advanced Microeconomic Theory. 2nd ed. Addison-Wesley, 2000. Ch. 5.

Laffont J. The Economics of Uncertainty and Information. MIT Press, 1995. Ch. 5—7.

Radner R. Equilibrium under Uncertainty // Handbook of Mathematical Economics / K. Arrow, M. Intriligator (eds.). Amsterdam: North-Holland, 1982. Vol. 2. Ch. 20.

V

ФИАСКО РЫНКА: ОБЩЕСТВЕННЫЕ БЛАГА

Лекция 22

Общественные блага. Неэффективность равновесия в экономике с общественными благами

Мы рассмотрели механизм ценообразования в экономике, где все товары были частными, а именно: каждый товар полностью потреблялся одним потребителем и доступ к каждому товару получал лишь тот потребитель, который оплатил это благо. В действительности помимо частных товаров существуют и другие виды товаров, например коллективные товары. Попытаемся формализовать классификацию различных товаров.

Определение

Товар является *неконкурирующим в потреблении*, если потребление этого товара одним из потребителей не уменьшает количества этого товара, доступного для других потребителей. Неконкурирующие в потреблении товары называют *коллективными товарами*. □

Для коллективного товара i условие допустимости распределения принимает вид

$$x_i^k \leq \sum_j y_{ij} + \overline{\omega}_i \text{ для любого } k.$$

В дальнейшем мы будем изучать частный случай коллективных товаров, а именно товары, которые помимо неконкурируемости в потреблении обладают еще и свойством неисключаемости из потребления.

Определение

Товар является *неисключаемым*, если никто не может быть исключен из потребления данного товара, когда этот товар уже произведен.

Коллективные товары, которые обладают свойством неисключаемости, называют *общественными благами*. □

В дальнейшем будем рассматривать именно общественные блага, т.е. товары, потребление которых не уменьшает благосостояние каждого потребителя. Для общественных благ объемы потребления будут совпадать у всех участников и условие допустимости для общественного блага i можно записать как

$$x_i^k = x_i = \sum_j y_{ij} + \overline{\omega}_i.$$

Заметим, что для общественных благ доступное для потребления количество товара x_i может не совпадать с реально потребляемым объемом для k-го потребителя x_i^k, если потребитель насыщается этим благом, но мы будем считать, что полезность любого потребителя не убывает по каждому общественному благу.

Рассмотрим вопрос: почему для общественных благ следует пересмотреть изученную нами ранее теорию цен? Этот пересмотр связан с самой сущностью этих товаров. В силу неконкурируемости в потреблении потребление блага одним из участников не сокращает количества этого блага, доступного для других потребителей, поэтому возникает вопрос: что же должен оплачивать каждый потребитель, т.е. должен ли он платить за весь потребляемый им объем или лишь за какую-то его часть? Еще большую проблему порождает неисключаемость, поскольку в этом случае ни у кого из потребителей нет стимула оплачивать потребление блага, ведь никто из неплательщиков не может быть исключен из потребления блага. Это приводит к так называемой *проблеме «безбилетника»*. Если никто не будет платить за общественное благо, то такое благо не будет производиться. Таким образом, возникает вопрос: как рыночная система сможет обеспечить производство общественных благ?

Очевидно, что для общественных благ претерпевает изменения не только механизм ценообразования, но и характеристики оптимального распределения ресурсов также будут отличаться от соответствующих характеристик для частных благ. Начнем анализ общественных благ с характеристик оптимальных распределений в экономике с общественными благами, затем обратимся к различным механизмам финансирования общественных благ и проанализируем, будут ли результирующие распределения Парето-оптимальными.

Дифференциальные характеристики Парето-оптимальных распределений в экономике с общественными благами

Разделим все товары на два множества: общественные блага (первые r благ) и частные блага — все остальные товары: $x^k = (x_1, \ldots, x_r, x^k_{r+1}, \ldots, x^k_N)$. Будем считать, что предпочтения потребителей представимы дифференцируемыми функциями полезности $u^k(\cdot)$. Будем считать также, что для любого потребителя по крайней мере одно частное благо желаемо, т.е. существует $s > r$ такое, что $\dfrac{\partial u^k}{\partial x^k_s} > 0.$

Пусть в экономике имеются запасы частных благ, а запасы общественных благ отсутствуют, однако общественные блага могут производиться. В экономике действуют J фирм, и производственное множество каждой фирмы имеет вид $Y_j = \{y_j \in R^N : F_j(y_j) \le 0\}$, причем функции $F_j(\cdot)$ также дифференцируемы. Будем предполагать, что для любого j существует такое благо i, что $\dfrac{\partial F_j(y_j)}{\partial y_{ij}} > 0.$

Как известно, распределение $(\bar{x}, \bar{y})$ Парето-оптимально тогда и только тогда, когда оно является решением задачи максимизации полезности каждого из M потребителей при фиксированных полезностях остальных и при выполнении технологических и ресурсных ограничений. В частности, для первого потребителя соответствующая оптимизационная задача примет вид

$$\max_{x,y} u^1(x^1)$$
$$u^k(x^k) \geq u^k(\bar{x}^k) \quad \forall \quad k \geq 2;$$
$$x_i = \sum_j y_{ij} \quad \forall \quad r \geq i \geq 1;$$
$$\sum_k x_i^k \leq \sum_j y_{ij} + \bar{\omega}_i \quad \forall \quad i > r;$$
$$F_j(y_j) \leq 0 \quad \forall \quad j.$$

Заметим, что именно в специфике второго условия, которое описывает материальные балансы для общественных благ, и состоит отличие данной задачи от соответствующей задачи, характеризующей Парето-оптимальное распределение в экономике с частными товарами.

Обозначим через λ^k множители Лагранжа для ограничений по уровням полезности, через μ_i — множители Лагранжа для ресурсных ограничений и через γ_j — множители Лагранжа для технологических ограничений. Тогда соответствующая функция Лагранжа примет вид

$$L = \sum_k \lambda^k u^k(x^k) + \sum_{i \leq r} \mu_i \left(\sum_j y_{ij} - x_i \right) +$$
$$+ \sum_{i > r} \mu_i \left(\sum_j y_{ij} + \bar{\omega}_i - \sum_k x_i^k \right) + \sum_j \gamma_j F_j(y_j).$$

Заметим, что мы не выделяем участника, полезность которого стоит в целевой функции, полагая, что соответствующий множитель Лагранжа (в рассматриваемой задаче это λ^1) равен единице. Если распределение $(\bar{x}, \bar{y})$ — внутреннее, т.е. $\bar{x}^k \gg 0$ для всех k, то при выполнении условия регулярности (здесь и далее будем считать условие регулярности выполненным) для любой из рассматриваемых оптимизационных задач найдутся неотрицательные (и не все равные нулю) множители $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ и $\gamma \geq 0$ такие, что будут иметь место следующие условия первого порядка:

$$\lambda^k \frac{\partial u^k(\overline{x}^k)}{\partial x_i^k} - \mu_i = 0 \quad \forall \quad i > r;$$

$$\sum_k \lambda^k \frac{\partial u^k(\overline{x}^k)}{\partial x_i} - \mu_i = 0 \quad \forall \quad i \leq r;$$

$$\mu_i - \gamma_j \frac{\partial F_j(\overline{y})}{\partial y_{ij}} = 0 \quad \forall \quad j.$$

Запишем условие первого порядка для частного блага s и первого потребителя: $\frac{\partial u^1(\overline{x}^1)}{\partial x_s^1} = \mu_s$. Поскольку предполагалось, что частное благо s желаемо всеми потребителями, то $\frac{\partial u^1(\overline{x}^1)}{\partial x_s^1} > 0$, откуда заключаем, что $\mu_s > 0$. Для любого потребителя k имеем $\lambda^k \frac{\partial u^k(\overline{x}^k)}{\partial x_s^k} = \mu_s > 0$, следовательно, $\lambda^k > 0$ для любого k. Аналогично покажем, что $\gamma_j > 0$.

Из условий первого порядка имеем $\gamma_j \frac{\partial F_j(\overline{y})}{\partial y_{sj}} = \mu_s > 0$, откуда получаем, что $\gamma_j > 0$.

Рассмотрим условие первого порядка по общественному благу i:

$$\sum_k \lambda^k \frac{\partial u^k(\overline{x}^k)}{\partial x_i} = \mu_i.$$

Поделим левую и правую часть на $\mu_s > 0$ и с учетом того, что

$\mu_s = \lambda^k \frac{\partial u^k(\overline{x}^k)}{\partial x_s^k}$, найдем

$$\sum_k \frac{\lambda^k\left(\partial u^k(\bar{x})/\partial x_i\right)}{\lambda^k\left(\partial u^k(\bar{x})/\partial x_s\right)}=\frac{\mu_i}{\mu_s}\quad \forall i\le r.$$

Из условий первого порядка по y_{ij} имеем $\gamma_j\dfrac{\partial F_j(\bar{y})}{\partial y_{ij}}=\mu_i$. Поделив эти

условия для благ i и s, получим

$$\sum_k \frac{\partial u^k(\bar{x})/\partial x_i}{\partial u^k(\bar{x})/\partial x_s}=\frac{\mu_i}{\mu_s}=\frac{\partial F_j(\bar{y})/\partial y_{ij}}{\partial F_j(\bar{y})/\partial y_{sj}}\quad \forall\ i>r,\ j.$$

В левой части этого выражения стоит сумма предельных норм замещений всех потребителей между желаемым частным благом и общественным благом i, а в правой части — предельная норма трансформации между этими же благами. Таким образом, для общественных благ условие эффективности производимого ассортиментного набора принимает вид $\sum_k MRS_{is}^k=MRT_{is}^j$. Это соотношение называется *уравнением Самуэльсона*. Оно говорит, что сумма предельных норм замещения общественного блага на частное в потреблении в Парето-оптимальном распределении должна равняться предельной норме замещения общественного блага на частное в производстве.

Заметим, что условия эффективности в отношении частных благ не изменились.

Неэффективность добровольного финансирования общественных благ

Следуя классической концепции равновесия по Вальрасу, мы придем к выводу, что в экономике с общественными благами ни у кого из потребителей нет стимула финансировать производство общественного блага, поскольку даже неплательщики смогут пользоваться общественным благом в полном объеме. Для того чтобы общественное благо производилось, необходимо ввести некий механизм совместного финансирования общественного блага, при котором производство общественных благ не было бы убыточно. Рассмотрим децентрализованный механизм финансирования общественного блага на основе добровольных пожертвований, где любой участник k самостоятельно определяет свой вклад t_i^k в финансирование i-го общественного блага, принимая как данные ожидаемые вклады остальных участников. Потребление общественного блага при таком механизме равно сумме взносов всех потребителей, деленной на цену общественного блага.

Итак, задача потребителя k при рассматриваемом механизме примет вид

$$\max_{x^k \geq 0,\, t^k \geq 0} u^k(x^k)$$

$$\sum_{i \leq r} t_i^k + \sum_{i > r} p_i x_i^k \leq \sum_{i > r} p_i \omega_i^k + \sum_j \theta_j^k \pi_j(p);$$

$$x_i = \frac{t_i^k + t_i^{-k}}{p_i} \quad \forall\, i \leq r,$$

где $t_i^{-k} = \sum_{s \neq k} t_i^s$ — взносы остальных участников на финансирование i-го общественного блага.

Определение

Равновесием с добровольным финансированием общественного блага будем называть набор $(\tilde{p}, \tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})$ такой, что:

1) для любого k набор $(\tilde{x}^k, \tilde{t}^k)$ — решение задачи k-го потребителя при ценах $\tilde{p}$ и взносах остальных участников: $\tilde{t}^{-k} = \sum_{s \neq k} \tilde{t}^s$;

2) для любого j вектор затрат-выпусков $\tilde{y}_j$ — решение задачи производителя: $\max_{y_j \in Y_j} \tilde{p} y_j$;

3) все рынки уравновешены:

для любого $i > r$ $\sum_k \tilde{x}_i^k \leq \overline{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ij}$ и $\tilde{p}_i \left(\sum_k \tilde{x}_i^k - \overline{\omega}_i - \sum_j \tilde{y}_{ij} \right) = 0;$

для любого $i \leq r$ $\tilde{x}_i = \sum_j \tilde{y}_{ij}$. □

Рассмотрим вопрос: будет ли равновесие с добровольным финансированием Парето-оптимальным состоянием экономики с общественными благами. Для ответа на этот вопрос обратимся к дифференциальным характеристикам равновесия с добровольным финансированием и затем сопоставим полученные условия с дифференциальными характеристиками оптимальных состояний.

Итак, обозначив через α^k множитель Лагранжа, соответствующий бюджетному ограничению задачи потребителя, и через η_i^k — множитель Лагранжа, соответствующий ограничению по i-му общественному благу в задаче потребителя k, мы можем выписать следующие условия первого порядка:

$$\frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)}{\partial x_i^k} - \alpha^k \tilde{p}_i \le 0;\ \frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)}{\partial x_i^k} - \alpha^k \tilde{p}_i = 0, \text{ если } \tilde{x}_i^k > 0,\ \forall\, i > r;$$

$$\frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)}{\partial x_i} - \eta_i^k \tilde{p}_i \le 0;\ \frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)}{\partial x_i} - \eta_i^k \tilde{p}_i = 0, \text{ если } \tilde{x}_i > 0,\ \forall\, i \le r;$$

$$-\alpha^k + \eta_i^k \le 0;\ -\alpha^k + \eta_i^k = 0, \text{ если } \tilde{t}_i^k > 0.$$

По-прежнему будем считать, что выполнены все те условия, при которых было получено уравнение Самуэльсона. В частности, предполагалось, что существует частное благо s, желаемое любым потребителем k, т.е. $\dfrac{\partial u^k(\cdot)}{\partial x_s^k} > 0$; следовательно, $\alpha^k > 0$ и равновесная цена такого блага положительна: $\tilde{p}_s > 0$.

Рассмотрим предельную норму замещения общественного блага i на частное благо s для внутренней точки $\tilde{x}^k \gg 0$:

$$MRS_{is}^k(\tilde{x}^k) = \frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)/\partial x_i}{\partial u^k(\tilde{x}^k)/\partial x_s^k} = \frac{\eta_i^k \tilde{p}_i}{\alpha^k \tilde{p}_s} \le \frac{\alpha^k \tilde{p}_i}{\alpha^k \tilde{p}_s} = \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_s},$$

причем в случае, когда потребитель k делает положительный взнос на финансирование i-го общественного блага ($\tilde{t}_i^k > 0$), то $\alpha^k = \eta_i^k$ и полученное неравенство выполняется как равенство:

$$MRS_{is}^k(\tilde{x}^k)=\frac{\eta_i^k \tilde{p}_i}{\alpha^k \tilde{p}_s}=\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_s},\ \text{если}\ \tilde{t}_i^k>0.$$

Обратимся к задаче максимизации прибыли. Обозначив через β_j множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению задачи j-й фирмы, выпишем условие первого порядка:

$$\tilde{p}_i-\beta_j\frac{\partial F_j(\tilde{y}_j)}{\partial y_{ij}}=0.$$

Поскольку $\tilde{p}_s>0$, то, поделив условия первого порядка для общественного блага i и желаемого частного блага s, получим выражение для соотношения цен через предельную норму трансформации:

$$\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_s}=\frac{\beta_j\left(\partial F_j(\tilde{y}_j)/\partial y_{ij}\right)}{\beta_j\left(\partial F_j(\tilde{y}_j)/\partial y_{sj}\right)}=\frac{\partial F_j(\tilde{y}_j)/\partial y_{ij}}{\partial F_j(\tilde{y}_j)/\partial y_{sj}}=MRT_{is}^j(\tilde{y}).$$

Предположим, что в равновесии суммарный взнос на i-е общественное благо положителен, т.е. хотя бы один потребитель делает положительный взнос. Пусть, например, это первый потребитель, тогда для него имеем

$$MRS_{is}^1(\tilde{x}^1)=\frac{\partial u^1(\tilde{x}^1)/\partial x_i}{\partial u^1(\tilde{x}^1)/\partial x_s^1}=\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_s}=\frac{\partial F_j(\tilde{y}_j)/\partial y_{ij}}{\partial F_j(\tilde{y}_j)/\partial y_{sj}}=MRT_{is}^j(\tilde{y}).$$

Согласно уравнению Самуэльсона во внутреннем Парето-оптимальном распределении должно выполняться следующее условие:

$$\sum_k MRS_{i,s}^k=MRT_{is}^j,$$

следовательно, это возможно в равновесии тогда и только тогда, когда $\sum_{k\geq 2} MRS_{i,s}^k=0$. Поскольку мы считаем, что общественное благо не снижает полезность для всех потребителей, т.е. $\dfrac{\partial u^k(\cdot)}{\partial x_i}\geq 0$ для всех k, а частное благо s желаемо всеми участниками $\left(\dfrac{\partial u^k(\cdot)}{\partial x_s^k}>0\right)$, равновесное распределение будет удовлетворять уравнению Самуэльсона только в том случае, если $\dfrac{\partial u^k(\tilde{x}^k)}{\partial x_i}=0$ для всех $k \geq 2$. Если же хотя бы для одного участника это не так, то равновесие с добровольным финансированием не будет Парето-оптимальным. Таким образом, мы доказали утверждение 22.1.

Утверждение 22.1. Неэффективность равновесия с добровольным финансированием.

Пусть $(\tilde{p}, \tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})$ — равновесие с добровольным финансированием, в котором $\tilde{x} \gg 0$ для всех *k*, существует потребитель *k*, который финансирует общественное благо *i*: $\tilde{t}_i^k > 0$; функции $u^k(\cdot)$ и $F_j(\cdot)$ дифференцируемы для всех *k* и *j*. Если, кроме того, в экономике частное благо *s* желаемо всеми потребителями $\left(\dfrac{\partial u^k(\cdot)}{\partial x_s^k} > 0\right)$, и для любого потребителя *k* общественные товары являются общественными благами, причем хотя бы для одного потребителя общественное блага *i* является желаемым $\left(\dfrac{\partial u^k(\tilde{x})}{\partial x_i^k} > 0\right)$, то равновесное распределение $(\tilde{x}, \tilde{y})$ не оптимально по Парето.

Проблема «безбилетника»

Из проведенного выше анализа можно заключить, что в равновесии с добровольным финансированием возможны ситуации, когда некоторые потребители не делают никаких взносов на финансирование общественного блага. Таких потребителей называют «безбилетниками». Например, если в точке равновесия $\tilde{x}$ предельные нормы замещения всех участников различаются, то равенство предельной нормы замещения $MRS_{is}^k(\tilde{x}^k)$ соотношению цен $\dfrac{p_i}{p_s}$ возможно лишь для одного из участников. Это означает, что если в равновесии общественное благо i производится, то его производство финансируется лишь одним потребителем с максимальной предельной нормой замещения. Это следует из условий первого порядка для задачи потребителя: для любого участника k должно выполняться условие $MRS^k_{is}(\tilde{x}^k) \leq \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_s}$ и $MRS^k_{is}(\tilde{x}^k) = \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_s}$, если $\tilde{t}^k_i > 0$. Таким образом, все участники, кроме того, который имеет максимальную предельную норму замещения, не платят за общественное благо, т.е. оказываются «безбилетниками».

Пример 22.1. Случай квазилинейной экономики.

Пусть предпочтения потребителей описываются квазилинейными функциями полезности вида $u^k(x,\ m^k) = v^k(x) + m^k$, где x — объем потребления общественного блага, а m^k — потребление агрегированного частного блага. Пусть производственные возможности экономики описываются функцией издержек $c(q)$, которая показывает, какое минимальное количество частного блага необходимо для производства q единиц общественного блага (это функция, обратная производственной функции).

Если общественное благо производится $(\bar{x} > 0)$, то уравнение Самуэльсона для такой экономики примет вид

$$\sum_k v^{k\prime}(\bar{x}) = c'(\bar{q}).$$

Рассмотрим равновесие с добровольным финансированием для квазилинейной экономики. Будем считать, что цена частного блага равна единице, и обозначим через p цену общественного блага.

Равновесие с добровольным финансированием для квазилинейной экономики — это набор $(\tilde{p},\ \tilde{t},\ \tilde{x},\ \tilde{q})$ такой, что:

1) $(\tilde{x},\ \tilde{t}^k)$ — решение задачи потребителя k:

$$\max_{x^k \geq 0,\ t^k \geq 0} \left(v^k(x) + m^k\right);$$

$$t^k + m^k \leq \omega^k_m + \theta^k \pi(\tilde{p});$$

$$x = \frac{t^k + \tilde{t}^{-k}}{\tilde{p}};$$

2) $\tilde{q}$ — решение задачи производителя $\max\limits_{q \geq 0}(pq - c(q))$ при ценах $\tilde{p}$;

3) выполнены балансы на всех рынках: $\tilde{x} = \tilde{q}$ и $\sum\limits_k \tilde{m}^k = \overline{\omega}_m - c(\tilde{q})$.

Заметим, что бюджетное ограничение потребителя в точке выбора всегда выполняется как равенство. Это позволяет нам выразить спрос на частное благо из этого ограничения (предполагая, что этот спрос положителен) и подставить все ограничения задачи потребителя в целевую функцию, преобразовав задачу в задачу безусловной оптимизации:

$$\max_{t^k \geq 0} v^k\left(\frac{t^k + \tilde{t}^{-k}}{\tilde{p}} - t^k + \omega_m^k + \theta^k \pi(\tilde{p})\right),$$

причем слагаемые ω_m^k и $\theta^k \pi(\tilde{p})$ можно откинуть, поскольку это константы, которые никак не повлияют на результат оптимизации. Таким образом, из задачи потребителя имеем

$$\frac{1}{\tilde{p}} v^{k\prime}(\tilde{x}) - 1 \leq 0; \ \frac{1}{\tilde{p}} v^{k\prime}(\tilde{x}) - 1 = 0, \text{ если } \tilde{t}^k > 0.$$

Из задачи фирмы находим:

$$\tilde{p} - c'(\tilde{q}) \leq 0; \ \tilde{p} - c'(\tilde{q}) = 0, \text{ если } \tilde{q} > 0.$$

Предположим, что $\tilde{q} > 0$ (общественное благо производится). Тогда

$$c'(\tilde{q}) = \tilde{p} \geq v^{k\prime}(\tilde{x}),$$

причем для некоторого потребителя *k* последнее условие выполняется как равенство (если общественное благо производится, то кто-то его должен финансировать).

Итак, $\tilde{p} \geq v^{k\prime}(\tilde{x})$, поэтому равенство возможно только для какого-то потребителя *k*, для которого величина $v^{k\prime}(\tilde{x})$ максимальна. Это означает, что если все $v^{k\prime}(\tilde{x})$ различны, то общественное благо финансирует только один потребитель, который его выше всех ценит:

$$c'(\tilde{q}) = \tilde{p} = \max v^{k\prime}(\tilde{x}).$$

Если полезность всех потребителей, как мы ранее предполагали, не убывает по x $(v^{k'}(\tilde{x}) \geq 0)$ и хотя бы у одного потребителя строго возрастает $(v^{k'}(\tilde{x}) > 0$ хотя бы для одного потребителя), то $\sum_k v^{k'}(\tilde{x}) > c'(\tilde{q})$, т.е. нарушается условие Парето-оптимальности.

Если все функции $v^k(\cdot)$ — возрастающие и вогнутые, функция издержек $c(q)$ — возрастающая и строго выпуклая, то функция $\varphi = \sum_k v^{k'}(x) - c'(x)$ является убывающей и потому, если $\varphi(\tilde{x}) > 0 = \varphi(\bar{x})$, то $\tilde{x} < \bar{x}$, где $\bar{x}$ — Парето-оптимальный уровень производства и потребления общественного блага, т.е. в равновесии имеет место недопроизводство общественного блага. Причина недопроизводства в том, что каждый индивид не учитывает, что его решение о финансировании общественного блага влечет положительный внешний эффект для остальных (позволяя им потребить больше), т.е. все потребители заинтересованы в увеличении количества общественного блага, но никто не заинтересован в увеличении своего вклада в его финансирование (проблема «безбилетника»).

Рассмотрим частный случай, когда всех потребителей можно экзогенно проранжировать по их предельной оценке общественного блага, например:

$$v^{1'}(x) < v^{2'}(x) < \ldots < v^{M'}(x), \ \forall x > 0.$$

Тогда, если общественное благо будет производиться в равновесии, финансировать его будет лишь участник M, поскольку $\tilde{p} \geq v^{M'}(\tilde{x}) > v^{k'}(\tilde{x})$ и для любого $k < M$ его вклад $t^k = 0$. Эту ситуацию легко изобразить графически (рис. 22.1). В данном случае потребитель с максимальным номером M ценит общественное благо выше, чем другие, и в результате в равновесии производится такое количество общественного блага $\tilde{x}$, при котором $v^{M'}(\tilde{x}) = c'(\tilde{x})$. Как мы видим, в данном примере будет иметь место недопроизводство общественного блага по сравнению с оптимальным количеством $\bar{x}$, которое определяется уравнением Самуэльсона $\sum_k v^{k'}(\bar{x}) = c'(\bar{x})$.

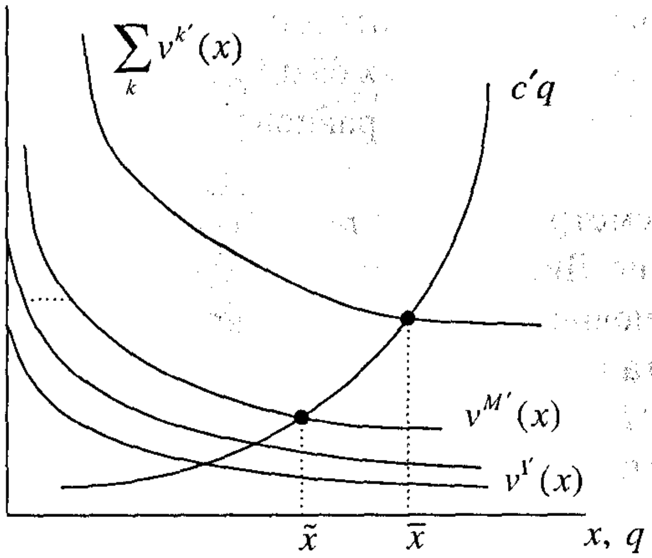


Рис. 22.1. Эффект недопроизводства общественных благ в квазилинейной экономике

Лекция 23

Решение проблемы «безбилетника». Равновесие по Линдалю и долевое финансирование общественных благ

В предыдущей лекции было показано, что равновесие с добровольным финансированием, как правило, приводит к неэффективному распределению ресурсов. Можно ли в экономике с общественными благами каким-то образом достигнуть Парето-оптимального распределения посредством ценового механизма? Этого можно добиться, если соответствующим образом модифицировать понятие равновесия. В рыночном равновесии во внутренней точке предельные нормы замещения равны соотношению цен, а в условии Самуэльсона не требуется равенства предельных норм замещения, т.е. в Парето-оптимальном распределении они могут различаться. Поэтому необходимо отказаться от предпосылки о единых ценах и ввести индивидуальные цены общественных благ для потребителей. Эта идея о персонифицированных ценах общественных благ была предложена Линдалем и соответствующую концепцию равновесия принято называть *равновесием Линдаля*.

Рассмотрим *модель равновесия с индивидуальными ценами*, или равновесие Линдаля. Пусть каждый потребитель оплачивает лишь часть рыночной цены общественного блага, т.е. эта цена общественного блага своя для каждого потребителя. Обозначим индивидуальную цену i-го общественного блага для k-го индивида через τ_i^k, тогда задача потребителя примет вид

$$\max_{x^k} u^k(x^k)$$

$$\sum_{i\le r}\tau_i^k x_i^k + \sum_{i>r} p_i x_i^k \le \sum_{i>r} p_i \omega_i^k + \theta^k \pi_j(p).$$

Введение персонифицированных цен можно мыслить как создание отдельного рынка для каждого потребителя по всем общественным благам и, таким образом, в модифицированной экономике общественные блага выступают как обычные частные блага. Для того чтобы в результате все потребители потребляли одинаковое количество каждого общественного блага, введем ограничения на технологии производства этих благ, т.е. на индивидуализированные рынки будет поступать одинаковое количество модифицированных «частных» благ каждого типа. В результате задача каждой фирмы должна быть изменена следующим образом:

$$\max\left(\sum_{i\le r}\sum_{k}\tau_i^k y_{ij}^k + \sum_{i>r} p_i y_{ij}\right)$$

$$F_j(y_j)\le 0;$$

$$y_{ij}^k = y_{ij} \quad \forall \quad i \le r.$$

Однако если подставить ограничения по производству общественных благ в целевую функцию, то задача производителя примет стандартный вид:

$$\max\left(\sum_{i\le r} y_{ij}\sum_k \tau_i^k + \sum_{i>r} p_i y_{ij}\right)$$

$$F_j(y_j)\le 0;$$

или

$$\max \sum_i p_i y_{ij}$$

$$F_j(y_j)\le 0,$$

где $p_i = \sum_k \tau_i^k$ для всех $k \le r$.

Определение

Набор $(\tilde{p}, \tilde{\tau}, \tilde{x}, \tilde{y})$ будем называть *равновесием Линдаля*, если выполнены следующие условия:

1) для любого k набор $\tilde{x}^k$ — решение задачи k-го потребителя при ценах $(\tilde{p}, \tilde{\tau})$;

2) для любого j вектор чистых выпусков $\tilde{y}_j$ — решение задачи производителя при ценах $\tilde{p}$, где $\tilde{p}_i = \sum_k \tilde{\tau}_i^k$ для всех $k \le r$;

3) для любого $i > r$ $\sum_k \tilde{x}_i^k \le \overline{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ji}$ и $\tilde{p}_i(\sum_k \tilde{x}_i^k - \overline{\omega}_i - \sum_j \tilde{y}_{ij}) = 0$

и для любого $i \le r$ $\tilde{x}_i = \sum_j \tilde{y}_{ij}$. □

Почему равновесие по Линдалю позволяет решить проблему неоптимальности при наличии общественных благ? Суть решения Линдаля в том, чтобы трактовать общественное благо для любого потребителя как отдельный товар со своей ценой. Каждое общественное благо заменяется на M частных благ и в экономике становится $rM + (N - r)$ частных благ. Таким образом, создается полная система рынков, и в этой модифицированной экономике имеют место все стандартные результаты теории общего равновесия, а именно первая и вторая теоремы благосостояния.

Утверждение 23.1. Первая теорема благосостояния для равновесия Линдаля.

Если $(\tilde{p}, \tilde{\tau}, \tilde{x}, \tilde{y})$ — равновесие Линдаля в экономике с общественными благами и предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, то $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — Парето-оптимальное распределение.

Утверждение 23.2. Вторая теорема благосостояния для равновесия Линдаля.

Пусть $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — Парето-оптимальное распределение в экономике с общественными благами, в котором $\tilde{x}^k >> 0$ для всех k. Если производственные множества Y_j выпуклы для всех j, предпочтения всех потребителей выпуклы, локально ненасыщаемы и хотя бы для одного потребителя строго монотонны, то существуют цены $(\tilde{p}, \tilde{\tau})$ и трансферты такие, что $(\tilde{p}, \tilde{\tau}, \tilde{x}, \tilde{y})$ — равновесие по Линдалю в экономике с трансфертами.

Мы не будем снова доказывать теоремы благосостояния, поскольку доказательство в точности повторяет доказательство, приведенное ранее, при рассмотрении экономики с частными благами, а лишь убедимся, что равновесие по Линдалю при дифференцируемости соответствующих функций удовлетворяет уравнению Самуэльсона.

Итак, обозначив через α^k множитель Лагранжа, соответствующий бюджетному ограничению задачи k-го потребителя и через β_j множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению j-го производителя, получим следующие условия первого порядка для внутреннего решения $(\tilde{x}^k >> 0)$:

$$\frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)}{\partial x_i^k} = \alpha^k \tilde{p}_i;$$

$$\frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)}{\partial x_i} = \alpha^k \tilde{\tau}_i^k;$$

$$\tilde{p}_i = \beta_j \frac{\partial F_j(\tilde{y}_j)}{\partial y_{ij}}.$$

Пусть s — частное благо, желаемое любым потребителем k, тогда $\frac{\partial u^k(\cdot)}{\partial x_s^k} > 0$, следовательно, $\alpha^k > 0$ и равновесная цена такого блага положительна $\tilde{p}_s > 0$. Отсюда:

$$\sum_k MRS_{is}^k(\tilde{x}) = \sum_k \frac{\partial u^k(\tilde{x}^k)/\partial x_i}{\partial u^k(\tilde{x}^k)/\partial x_s^k} = \sum_k \frac{\alpha^k \tilde{\tau}_i^k}{\alpha^k \tilde{p}_s} = \frac{\sum_k \tilde{\tau}_i^k}{\tilde{p}_s} =$$

$$= \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_s} = \frac{\beta_j\left(\partial F_j(\tilde{y}_j)/\partial y_{ij}\right)}{\beta_j\left(\partial F_j(\tilde{y}_j)/\partial y_{sj}\right)} = MRT_{is}^j(\tilde{y}).$$

Как мы видим, в этом случае равновесное распределение удовлетворяет уравнению Самуэльсона.

Итак, равновесие по Линдалю позволяет решить проблему неэффективности равновесия при наличии общественных благ, но предложенный Линдалем механизм является скорее теоретическим, нежели практическим решением проблемы, поскольку его крайне сложно реализовать. Итак, обратимся к проблемам, с которыми мы столкнемся при реализации данного механизма.

Прежде всего, модель индивидуальных рынков предполагает конкурентное поведение участников рынка, но на индивидуальном рынке будет только один покупатель, и в этих условиях предпосылка о конкурентном поведении не оправдана.

Кроме того, чтобы решение работало, мы должны обеспечить исключаемость из потребления неплательщиков: любой должен быть уверен, что получит товар ровно в том объеме, в каком он его оплатил, и что, не оплатив товар, он не получит к нему доступа.

Трудно реализовать и механизм (централизованного) назначения персонифицированных цен. Согласно условиям первого порядка эти цены должны быть пропорциональны предельным нормам замещения индивидов в соответствующем Парето-оптимальном распределении:

$$\tilde{\tau}_i^k = MRS_{is}^k(\tilde{x})\tilde{p}_s \quad \text{или} \quad \frac{\tilde{\tau}_i^k}{\sum_k \tilde{\tau}_i^k} = \frac{MRS_{is}^k(\tilde{x})}{\sum_k MRS_{is}^k(\tilde{x})}.$$

Для того чтобы установить цены на нужном уровне, необходимо иметь информацию о предпочтениях потребителя, а те, в свою очередь, не заинтересованы в правдивом сообщении этой информации.

Ввиду всех этих проблем попытаемся проанализировать некие альтернативные механизмы финансирования общественных благ. Из рассмотренного решения следует позаимствовать идею о том, что каждый участник должен оплачивать лишь некую долю в общей цене единицы общественного блага. Итак, рассмотрим равновесие с долевым финансированием общественных благ.

Долевое финансирование общественных благ

Будем предполагать, что вклад каждого участника в финансирование общественного блага устанавливается априорно на основе определения доли каждого потребителя в покрытии любой возможной величины общественных расходов: δ_i^k — доля k-го потребителя в финансировании i-го блага (будем предполагать, что доли не зависят от объема производства общественного блага) и $\sum_k \delta_i^k = 1$ для каждого общественного блага i. В результате взнос k-го потребителя на финансирование i-го общественного блага составит $\delta_i^k p_i x_i$.

Желаемый объем потребления общественного блага для каждого участника находится из решения следующей задачи:

$$\max_{x^k \geq 0} u^k(x^k)$$

$$\sum_{i \leq r} \delta_i^k p_i x_i^k + \sum_{i > r} p_i x_i^k \leq p\omega^k + \sum_j \theta_j^k \pi_j(p).$$

Определение

Равновесием с долевым финансированием называется набор $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$ такой, что:

1) для любого k набор $\tilde{x}^k$ — решение задачи потребителя при ценах $\tilde{p}$;

2) для любого j вектор $\tilde{y}_j$ — решение задачи производителя: $\max\limits_{y_j \in Y_j} \tilde{p} y_j$;

3) выполнены балансы по частным и общественным благам:

$$\text{для любого } i > r \quad \sum_k \tilde{x}_i^k \le \bar{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ij} \quad \text{и} \quad \tilde{p}_i \left(\sum_k \tilde{x}_i^k - \bar{\omega}_i - \sum_j \tilde{y}_{ij}; \right)$$

$$\text{для любого } i \le r \quad \tilde{x}_i^k = \tilde{x}_i = \sum_j \tilde{y}_{ij}. \ \square$$

Если бы в результате решения своих задач все потребители предъявили бы спрос на одинаковый объем общественных благ, то экономика оказалась бы в равновесии, но при произвольно выбранных долях δ_i^k вряд ли спрос разных потребителей на каждое общественное благо окажется одинаковым.

Следует отметить, что при некоторых специальным образом подобранных долях финансирования консенсус между участниками относительно объемов производства общественных благ все же возможен. Заметим, что если доли выбраны таким образом, чтобы $\delta_i^k p_i = \tau_i^k$, где τ_i^k — индивидуализированные цены Линдаля, то равновесие Линдаля будет и равновесием при долевом финансировании и, следовательно, при долевом финансировании мы получим консенсус по отношению к объемам производства общественных благ. Но это возможно лишь при специальных долях, а именно:

$$\delta_i^k = \frac{\delta_i^k p_i}{\sum_k \delta_i^k p_i} = \frac{\tilde{\tau}_i^k}{\sum_k \tilde{\tau}_i^k} = \frac{MRS_{is}^k(\tilde{x})}{\sum_k MRS_{is}^k(\tilde{x})},$$

т.е. доли должны быть пропорциональны предельным нормам замещения. Как мы обсуждали ранее, реализовать такое равновесие будет проблематично: у участников нет стимулов выявлять свои истинные предпочтения, потому что именно те потребители, которые больше ценят общественное благо, вынуждены будут нести и большие расходы по его финансированию.

Итак, долевое финансирование позволяет решить проблему «безбилетника», возникающую при добровольном финансировании, но сталкивается с проблемой выявления предпочтений (в ситуации, когда экономические агенты могут быть заинтересованы в манипулировании доступной им частной информацией).

Лекция 24

Равновесие с долевым финансированием при голосовании. Механизм Гровса — Кларка

Механизм голосования

Как было показано в предыдущей лекции, при произвольных долях вряд ли удастся достичь равновесия (консенсуса) относительно объемов производства общественных благ, а потому встает вопрос: каким же образом в данном случае будут выбираться эти величины? Один из самых распространенных механизмов принятия общественных решений — это механизм голосования.

Итак, будем рассматривать равновесие с долевым финансированием, где для согласования мнений потребителей относительно объемов потребления общественных благ используется механизм голосования. При голосовании потребители исходят из своих предпочтений относительно наборов общественных благ (при заданных рыночных ценах и структуре общественных расходов). Для того чтобы определить предпочтения потребителей на редуцированном множестве, включающем лишь общественные блага, поступим следующим образом. Зафиксируем потребление общественных благ на некоторых допустимых величинах $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r)$ и найдем при данных ценах максимум полезности потребителя k относительно частных благ, решив следующую задачу:

$$\max_{x_{r+1}^k, \ldots, x_N^k} u^k(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r, x_{r+1}^k, \ldots, x_N^k)$$

$$\sum_{i \le r} \delta_i^k p_i \bar{x}_i + \sum_{i > r} p_i x_i^k \le p\omega^k + \sum_j \theta_j^k p y_j.$$

В результате, рассматривая всевозможные наборы общественных благ, мы получим редуцированную функцию полезности $\tilde{u}^k(x_1, \ldots, x_r)$, которая сопоставляет любому набору общественных благ максимальное достижимое значение полезности в данной задаче.

Далее, используя предпочтения потребителей относительно общественных благ, представимые редуцированными функциями полезности $\tilde{u}^k(x_1, ..., x_r)$, рассмотрим наиболее распространенную процедуру коллективного выбора: голосование по правилу простого большинства.

Определение

Пусть $\bar{X}$ — множество альтернатив (в нашей задаче это различные наборы общественных благ) и $\{\overset{k}{\succsim}\}_{k=1}^{M}$ — набор предпочтений потребителей (в данном случае представимый редуцированными функциями полезности $\tilde{u}^k(x_1, ..., x_r)$). Альтернатива $\bar{x} \in \bar{X}$ называется *равновесием при голосовании по правилу простого большинства*, если не существует такой альтернативы $x' \in \bar{X}$, которую большинство потребителей предпочитает альтернативе $\bar{x}$.

Равновесием с долевым финансированием при голосовании на основе правила простого большинства называется набор $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$ такой, что:

1) для любого k набор $(\tilde{x}_{r+1}, ..., \tilde{x}_N)$ — решение задачи потребителя при ценах $\tilde{p}$ и объемах потребления общественных благ $(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_r)$;

2) $(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_r)$ — равновесие при голосовании по правилу простого большинства для допустимых альтернатив, заданных множеством наборов общественных благ $X_1, ..., X_r$, и набора предпочтений, заданных функциями $\tilde{u}^k(\cdot)$;

3) для любого j вектор затрат-выпусков $\tilde{y}_j$ — решение задачи производителя $\max_{y_j \in Y_j} \tilde{p}y_j$;

4) выполнены балансы по частным и общественным благам:

$$\sum_k \tilde{x}_i^k \le \bar{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ij} \quad \text{и} \quad \tilde{p}_i \left(\sum_k \tilde{x}_i^k - \bar{\omega}_i - \sum_j \tilde{y}_{ij} \right) \forall i > r;$$

$$\tilde{x}_i = \sum_j \tilde{y}_{ij} \quad \forall i \le r. \ \square$$

Выбор количества общественных благ с помощью голосования простым большинством сталкивается со следующей проблемой. Такое равновесие существует только при довольно ограничительных предположениях. Известный парадокс Кондорсе показывает, что даже в экономике с тремя участниками равновесие при голосовании может не существовать и при конечном числе альтернатив. Кроме того, даже если равновесие существует, оно может быть не Парето-оптимально.

Введем условия, гарантирующие отсутствие парадокса Кондорсе. Для этого наложим ограничения на предпочтения участников, а именно: потребуем, чтобы предпочтения были однопиковыми. (Известно, что однопиковость предпочтений позволяет гарантировать существование равновесия при голосовании).

Рассмотрим далее случай одного общественного товара, так что множество альтернатив $\overline{X}$ — это множество неотрицательных действительных чисел.

Определение

Отношение предпочтения $\overset{k}{\succsim}$ потребителя k, представленное функцией $\tilde{u}^k(\cdot)$, определенной на множестве альтернатив $\overline{X}$, *однопиковое*, если выполнены два условия:

1) существует наилучшая с точки зрения предпочтений $\overset{k}{\succsim}$ альтернатива $\hat{x}^k \in \overline{X} : \tilde{u}^k(\hat{x}^k) \geq \tilde{u}^k(x)\ \forall\ x \in \overline{X}$;

2) если от этой наилучшей альтернативы двигаться в каком-то определенном направлении (либо в сторону увеличения x, либо в сторону его уменьшения), то предпочтения должны изменяться монотонно: $\tilde{u}^k(x)$ не убывает на $[0,\ \hat{x}^k]$ и не возрастает на $[\hat{x}^k,\ +\infty)$. □

Пример 24.1. Долевое финансирование с равновесием при голосовании в квазилинейной экономике.

Пусть предпочтения потребителей представимы квазилинейной функцией полезности вида $u^k(x,\ m^k) = v^k(x) + m^k$, где x — объем потребления общественного блага, а m^k — потребление агрегированного частного блага, причем $v^{k'}(x) \geq 0$. Пусть производственные возможности экономики описываются функцией издержек $c(q) = cq$. Будем считать, что цена частного блага равна единице и обозначим через p цену общественного блага.

Определим предпочтения участника k относительно общественного блага x из решения следующей задачи:

$$\max_{m^k}\left(v^k(x)+m^k\right)$$
$$\delta^k px+m^k \le \omega_m^k+\theta^k\pi(p)$$

при заданной цене p и потреблении общественного блага x. Поскольку бюджетное ограничение потребителя в точке выбора всегда выполняется как равенство, выразим спрос на частное благо из бюджетного ограничения (это можно сделать при условии положительности спроса) и подставим в целевую функцию. В результате получим редуцированную функцию полезности, задающую предпочтения участника относительно общественного блага:

$$\tilde{u}^k(x)= v^k(x)-\delta^k px+\left(\omega_m^k+\theta^k\pi(\tilde{p})\right),$$

причем слагаемое, стоящее в скобках, представляет собой константу и не влияет на предпочтительность общественного блага. В дальнейшем мы будем считать, что предпочтения участника k на множестве возможных уровней потребления общественного товара задается функцией $\tilde{u}^k(x)=v^k(x)-\delta^k px$.

Поскольку для существования равновесия нам требуется, чтобы предпочтения были однопиковыми, то мы будем считать, что для любого потребителя k функция $\tilde{u}^k(\cdot)$ достигает максимума на множестве неотрицательных чисел при любых p (это можно гарантировать, предположив, что $v^{k'}(x^k)\to 0$ в точке при $x^k\to\infty$). Обозначим оптимальный с точки зрения k-го участника объем общественного блага через $\hat{x}^k$. Такие предпочтения являются однопиковыми на множестве альтернатив $X=[0,\infty)$, поскольку $v^{k'}(x)$ не возрастает по x.

По определению $\hat{x}^k$ доставляет максимум функции $\tilde{u}^k(\cdot)$, а значит, если $\tilde{u}^k(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, то $\hat{x}^k$ удовлетворяет условию первого порядка:

$$v^{k'}(\hat{x}^k)\le\delta^k p;\quad v^{k'}(\hat{x}^k)=\delta^k p,\ \text{если}\ \hat{x}^k>0.$$

Если число участников нечетное, то в равновесии при голосовании $\tilde{x}$ — это медиана из объемов $\hat{x}^k$, т.е. $(s+1)$-й по порядку возрастания объем, где $s=\dfrac{M-1}{2}$ (т.е. половина оставшихся потребителей хочет больше общественного блага, а половина — меньше, что с учетом этого участника дает простое большинство). Выбор медианного участника изображен на рис. 24.1. В изображенной экономике всего три участника, соответственно голоса двух участников составляют простое большинство. В данном случае выбор второго участника будет соответствовать равновесию при голосовании, так как один участник (третий) хочет больше общественного блага, а один (первый) хочет, чтобы производилось меньшее количество общественного блага.

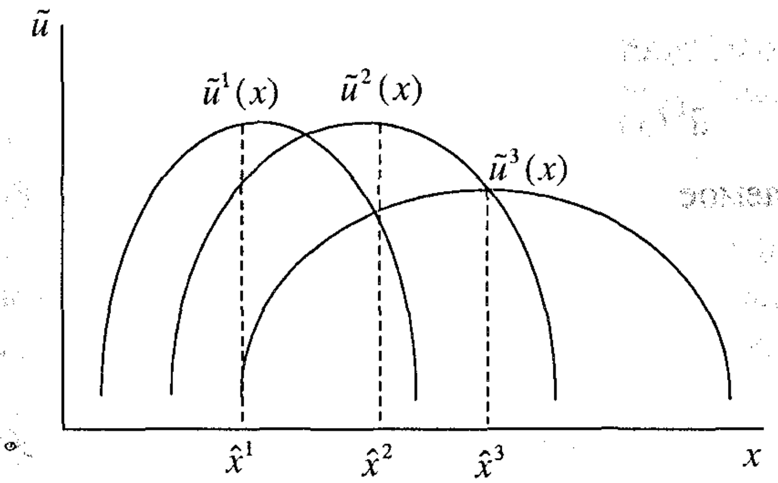


Рис. 24.1. Выбор медианного участника (равновесие при голосовании)

Заметим, что номер медианного участника зависит от цены общественного блага, поскольку редуцированные функции $\tilde{u}^k(\cdot)$ получены при некоторой заданной цене общественного блага p. Пусть $\tilde{q}$ — равновесный выпуск общественного блага, а $\tilde{p}$ — равновесная цена, тогда из условия максимизации прибыли: $\tilde{p} = c'(\tilde{q}) = c$, и из условия равновесия: $\tilde{x}^k = \tilde{q}$ и $\hat{x}^k = \tilde{q}$, где k — медианный избиратель при цене $\tilde{p}$.

Сравним для данного примера оптимальное количество общественного блага и его объем в равновесии при голосовании с долевым финансированием. Это соотношение будет зависеть от долей финансирования общественного блага, поскольку эти доли в свою очередь влияют на равновесную величину выпуска.

Пусть, к примеру, доли финансирования одинаковы для всех участников: $\delta^k = \dfrac{1}{M}$. Тогда для медианного потребителя имеем

$$v^{k'}(\hat{x}^k) = v^{k'}(\tilde{x}) = \frac{1}{M}\tilde{p} = \frac{1}{M}c.$$

Как мы знаем, оптимальный объем общественного блага задается уравнением

$$\sum_k v^{k'}(\bar{x}) = c'(\bar{x}) = c.$$

В общем случае мы можем ожидать как недопроизводство, так и перепроизводство общественного блага.

Например, если при одинаковых долях финансирования для первого участника оценка общественного блага равна $v^k(x) = 2v(x)$, для половины оставшихся участников (это $\frac{M-1}{2}$ участников) — $v^k(x) = v(x)$, а для оставшейся половины — $v^k(x) = 5v(x)$, то первый участник будет медианным и равновесное количество общественного блага находится из условия

$$2v'(\tilde{x}) = \frac{c}{M}.$$

Парето-оптимальное количество общественного блага задается уравнением Самуэльсона, которое примет вид

$$\sum_k v^{k'}(\bar{x}) = \frac{M-1}{2}v'(\bar{x})(1+5) + 2v'(\bar{x}) = v'(\bar{x})(3M-1) = c.$$

Таким образом, $v'(\bar{x}) = \frac{c}{3M-1} < \frac{c}{2M} = v'(\tilde{x})$, откуда с учетом убывания $v'(x)$ получаем, что $\bar{x} > \tilde{x}$, т.е. в равновесии имеет место недопроизводство общественного блага.

Если же мы рассмотрим немного модифицированную экономику, где все участники, кроме первого, имеют те же предпочтения, что и раньше, а для первого участника оценка общественного блага будет равна $v^k(x) = 4v(x)$, то в равновесии при голосовании будет наблюдаться перепроизводство общественного блага, поскольку первый участник останется медианным. Будет производиться

$$4v'(\tilde{x}) = \frac{c}{M},$$

тогда как оптимальное количество определяется из условия $\sum_k v^{k\prime}(\bar{x}) =$ $\frac{M-1}{2} v'(\bar{x})(1+5) + 4v'(\bar{x}) = v'(\bar{x})(3M+1) = c$. В результате: $v'(\bar{x}) =$ $= \frac{c}{3M+1} > \frac{c}{4M} = v'(\tilde{x})$, откуда имеем $\bar{x} < \tilde{x}$.

Таким образом, в равновесии с голосованием удается согласовать решения потребителей относительно объемов производства общественного блага, но полученное решение, скорее всего, как было показано, не будет Парето-оптимальным. Попробуем построить более гибкий механизм принятия решения относительно объемов производства, который приводил бы к оптимальному уровню выпуска общественного блага.

Механизм Гровса — Кларка

В случае квазилинейных функций полезности существует процедура, позволяющая выявить предпочтения и функцию спроса на общественные блага. В этом случае мы можем реализовать решение, которое максимизировало бы общественное благосостояние, а не было бы выгодно лишь одной группе (простому большинству), как в равновесии при голосовании.

Сначала опишем сам механизм, позволяющий выявить истинные предпочтения потребителей, а затем покажем, как этот механизм может быть встроен в модель общего равновесия с долевым финансированием общественных благ.

Для удобства отступим от равновесного подхода, т.е. будем предполагать, что рассматриваемая группа потребителей непосредственно контролирует производство общественного блага, следовательно, при производстве блага в объеме x потребители должны затратить $c(x)$ единиц частного блага.

Рассмотрим следующую игру.

1. Изначально каждому потребителю сообщают, какую долю расходов в финансировании общественного блага δ^k ему придется нести.

2. Потребители сообщают некоему посреднику функции оценки общественного блага $\varphi^k(x)$. Настоящие оценки потребителей равны $\hat{\varphi}^k(x) = v^k(x) - \delta^k(x)c(x)$, но потребители могут искажать информацию.

3. Посредник выбирает уровень производства общественного блага, максимизирующий совокупную ценность блага для данного сообщества:

$$\bar{x} \in \arg\max_x \sum_k \varphi^k(x).$$

4. Каждый участник платит налог за изменение коллективного выбора, равный убыткам остальных потребителей, рассчитанных на основе функции $\varphi^k(x)$, сообщенной на втором этапе (этот налог принято называть *налогом Кларка*):

$$\tau^k = \max_x \left(\sum_{s \neq k} \varphi^s(x) - \sum_{s \neq k} \varphi^s(\bar{x}) \right).$$

Очевидно, что этот налог неотрицателен (т.е. не превращается в субсидию). Сборы от этого налога не должны повлиять на выбор потребителя, поэтому удобно думать, что налог изымается из экономики. (Позже, рассматривая механизм Гровса — Кларка в рамках общего равновесия, будем предполагать, что собранные налоги возвращаются потребителям в виде паушальных субсидий.)

Сообщая свою оценку, потребитель выбирает ее, максимизируя свою полезность с учетом налога Кларка, т.е. потребитель k максимизирует следующую функцию:

$$u^k = v^k(x) - \delta^k(x)c(x) - \tau^k.$$

Таким образом, мы рассматриваем игру, где игроками являются потребители. Стратегии игроков — это оценки общественного блага $\varphi^k(x)$, причем будем считать, что $\varphi^k(x)$ непрерывные функции, которые могут принимать положительные значения лишь на компактном множестве $[0, X]$, причем $\varphi^k(0) = 0$ для любого k (это условие гарантирует существование максимума суммы оценок). Пусть $\varphi^k(x)$ выбираются из некоторого допустимого множества Ф. Далее, поскольку $\max_x \sum_k \varphi^k(x)$ может достигаться не на одном элементе, то нужно указать правило выбора объема общественного блага:

$\bar{x} = G\left(\left\{\varphi^k\right\}_{k=1}^{M}\right) \in \arg\max_x \sum_k \varphi^k(x)$. К примеру, можно считать, что выбирается максимальный объем производства.

Утверждение 24.1. Равновесие в игре Гровса — Кларка.

Истинная функция полезности (оценки) общественного блага $\hat{\varphi}^k(x) = v^k(x) - \delta^k(x)c(x)$ является слабо доминирующей стратегией для любого потребителя в игре Гровса — Кларка, т.е. игра разрешима в доминирующих стратегиях.

Доказательство

Пусть $\bar{x}$ — уровень общественного блага, который будет выбран, если потребители сообщают свою истинную оценку общественного блага, а $\tilde{x}$ — уровень общественного блага, который был бы выбран при сообщении другой функции.

Сравним выигрыши потребителя в этих двух ситуациях. Выигрыш при сообщении своей истинной оценки составит

$$v^k(\bar{x}) - \delta^k(\bar{x})c(\bar{x}) - \left(\max_x \sum_{s\neq k} \varphi^s(x) - \sum_{s\neq k} \varphi^s(\bar{x})\right) =$$
$$= \sum_{s\neq k} \varphi^s(\bar{x}) + \hat{\varphi}^k(\bar{x}) - \max_x \sum_{s\neq k} \varphi^s(x).$$

Выигрыш при сообщении альтернативной оценки будет равен

$$v^k(\tilde{x}) - \delta^k(\tilde{x})c(\tilde{x}) - \left(\max_x \sum_{s\neq k} \varphi^s(x) - \sum_{s\neq k} \varphi^s(\tilde{x})\right) =$$
$$= \sum_{s\neq k} \varphi^s(\tilde{x}) + \hat{\varphi}^k(\tilde{x}) - \max_x \sum_{s\neq k} \varphi^s(x).$$

Поскольку, согласно определению $\bar{x} \in \arg\max_x \left(\sum_{s\neq k} \varphi^s(x) + \hat{\varphi}^k(x)\right)$, то

$\sum_{s\neq k} \varphi^s(\bar{x}) + \hat{\varphi}^k(\bar{x}) \geq \sum_{s\neq k} \varphi^s(x) + \hat{\varphi}^k(x)$ для любого x.

Таким образом, мы заключаем, что

$$\sum_{s\neq k}\varphi^s(\bar{x})+\hat{\varphi}^k(\bar{x})-\max_x\sum_{s\neq k}\varphi^s(x)\geq\sum_{s\neq k}\varphi^s(\tilde{x})+\hat{\varphi}^k(\tilde{x})-\max_x\sum_{s\neq k}\varphi^s(x).$$

Это означает, что сообщение своей истинной оценки дает потребителю не меньший выигрыш, чем любая другая альтернатива и, следовательно, является слабо доминирующей стратегией. ■

Утверждение 24.2. Оптимальность выпуска общественного блага в игре Гровса — Кларка.

Если все потребители сообщили истинные функции оценки общественного блага, т.е. $\hat{\varphi}^k(x)=v^k(x)-\delta^k(x)c(x)$, то уровень потребления общественного блага, определенный посредством механизма Гровса — Кларка, будет Парето-оптимален.

Доказательство

Если все потребители сообщили свои истинные оценки, то согласно механизму Гровса — Кларка объем производства общественного блага определяется из условия

$$\bar{x}\in\arg\max_x\sum_k\hat{\varphi}^k(x),$$

т.е. $\bar{x}$ дает максимум величине $W(x)=\sum_k\hat{\varphi}^k(x)=\sum_k v^k(x)-c(x)$, а эта величина представляет собой совокупный излишек. Это означает, что $\bar{x}$ — Парето-оптимальное количество общественного блага. ■

Равновесие с долевым финансированием и механизмом Гровса — Кларка

Рассмотрим равновесие с долевым финансированием, где объем производства общественного блага определяется с помощью механизма Гровса — Кларка. Будем предполагать, что налоги собираются в денежном выражении и в равновесии сборы от налога Кларка перераспределяются между потребителями посредством трансфертов.

Определим равновесие для случая квазилинейной экономики с одним общественным благом. Задача k-го потребителя в этом случае примет следующий вид:

$$\max_{\varphi^k(x)\in\Phi,\, x,\, m^k}\left(v^k(x)+m^k\right)$$

$$\delta^k px+m^k\le\omega_m^k+\theta^k\pi(p)-\tau^k(\varphi^k,\ \varphi^{-k})+T^k;$$

$$x=G(\varphi^k,\ \varphi^{-k}),$$

где $\tau^k(\varphi^k,\ \varphi^{-k})$ — налог Кларка, $G(\varphi^k,\ \varphi^{-k})$ — правило выбора из механизма Гровса — Кларка, а T^k — величина трансферта.

Поскольку бюджетное ограничение выполняется как равенство, то m^k можно выразить (в случае, когда $m^k>0$) и подставить в функцию полезности. Тогда задача потребителя преобразуется следующим образом (заметим, что величины ω_m^k, $\theta^k\pi(p)$ и T^k можно исключить из целевой функции, поскольку они являются константами):

$$\max_{x,\varphi^k\in\Phi}\left(v^k(x)-\delta^k px-\tau^k(\varphi^k,\varphi^{-k})\right)$$

$$x=G(\varphi^k,\ \varphi^{-k}).$$

Определение

Равновесием с долевым финансированием и механизмом Гровса — Кларка в квазилинейной экономике с одним общественным благом называется набор $\left(\tilde p,\ \tilde x,\ \tilde q,\ \left\{\tilde\varphi^k\right\}_{k=1}^M,\ \tilde T^k\right)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\tilde q$ — решение задачи производителя $\max\limits_{q\ge 0}\left(\tilde pq-c(q)\right)$;

2) для каждого потребителя k набор $(\tilde x,\ \tilde\varphi^k)$ является решением задачи потребителя при $\tilde p$, $\tilde\varphi^{-k}$ и $\tilde T^k$;

3) выполнен баланс по общественному благу: $\tilde x=\tilde q$ и финансовый баланс: $\sum\limits_k\tau^k(\tilde\varphi^k,\ \tilde\varphi^{-k})=\sum\limits_k\tilde T^k$. □

Для данной экономики имеет место аналог второй теоремы благосостояния, т.е. при определенных условиях Парето-оптимальное состояние можно реализовать как равновесие с долевым финансированием и механизмом Гровса — Кларка.

Утверждение 24.3. Парето-оптимум и равновесие с механизмом Гровса — Кларка.

Пусть в квазилинейной экономике с одним общественным благом функция издержек $c(\cdot)$ дифференцируема и выпукла, а функции $v^k(x)$ дифференцируемы и вогнуты. Если $\tilde{q}$ — количество общественного блага, соответствующее Парето-оптимальному распределению, то существуют цена общественного блага $\tilde{p}$ и оценки $\tilde{\varphi}^k(\cdot)$ такие, что набор $\left(\tilde{p},\ \tilde{x}=\tilde{q},\ \left\{\tilde{\varphi}^k\right\}_{k=1}^{M}\right)$ является равновесием с долевым финансированием и механизмом Гровса — Кларка в данной экономике.

Доказательство

Поскольку функция издержек дифференцируема, положим цену общественного блага равной $\tilde{p}=c'(\tilde{q})$. В силу определения $\tilde{p}$ в точке $\tilde{q}$ выполнено условие первого порядка максимизации прибыли. Кроме того, поскольку функция $c(\cdot)$ выпукла, то условие первого порядка является необходимым и достаточным и потому $\tilde{q}$ является решением задачи фирмы при цене $\tilde{p}$.

Положим $\tilde{x}=\tilde{q}$ и $\tilde{\varphi}^k(x)=v^k(x)-\delta^k px$. Покажем, что $\tilde{x}$ и $\tilde{\varphi}^k$ являются решением задачи k-го потребителя при цене $\tilde{p}$. Доказательство этого факта аналогично доказательству утверждения о разрешимости игры Гровса — Кларка в слабо доминирующих стратегиях. Отличие состоит лишь в том, что теперь участники не контролируют производство общественного блага непосредственно, а платят лишь некую долю в расходах на приобретение этого блага и соответственно $c(x)$ следует заменить на px.

Поскольку $\tilde{x}=\tilde{q}$ — Парето-оптимальное количество общественного блага, то $\tilde{x}\in \arg\max\ W(x)=\arg\max\left(\sum_k v^k(x)-c(x)\right)$. Поскольку теперь в механизме Гровса — Кларка $c(x)$ будет заменено на px, то нам нужно показать, что

$$\tilde{x} \in \arg\max\left(\sum_k v^k(x) - \tilde{p}x\right).$$

Поскольку по определению $\tilde{p} = c'(\tilde{q}) = c'(\tilde{x})$, то легко проверить, что условия первого порядка для этих двух задач совпадают, а условия второго порядка выполнены автоматически в силу выпуклости $c(x)$ и вогнутости $v^k(x)$.

Таким образом, проведя рассуждения, аналогичные доказательству утверждения 24.1, мы убедимся в том, что сообщение истинной оценки общественного блага при цене $\tilde{p}$ дает неменьшую полезность потребителю, чем любая другая альтернатива и, следовательно, $\tilde{x}$ и $\tilde{\varphi}^k$ являются решением задачи k-го потребителя при цене $\tilde{p}$. Для этого осталось лишь соответствующим образом подобрать трансферты.

Мы убедились в том, что выполнены все условия равновесия с долевым финансированием и механизмом Гровса — Кларка. ■

Рекомендуемая литература

Основная

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. N.Y.: Oxford University Press, 1995. Ch. 1—4.

Varian H. Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 23.

Дополнительная

Gravelle H., Rees R. Microeconomics. 2nd ed. Longman, 1992. Ch. 18.

Bergstrom T., Blume L., Varian H. On the Private Provision of Public Goods // Journal of Public Economics. 1986. 29(1). P. 25—49.

Clarke E. Multipart Pricing of Public Goods // Public Choice. 1971. 11. P. 17—33.

Groves T. Incentives in Teams // Econometrica. 1973. 41. P. 617—631.

VI

ФИАСКО РЫНКА: ЭКСТЕРНАЛИИ

Лекция 25

Экстерналии

В рассмотренных ранее моделях равновесия решения одних агентов влияют на решения других только опосредованно через рыночные цены и доходы, которые также зависят от цен. Однако зачастую выбор одних индивидов влияет на выбор других непосредственно. В этих случаях говорят о существовании внешних воздействий, или *экстерналий*.

Обсудим классификацию внешних воздействий и способ их отражения при моделировании взаимодействий экономических агентов. С точки зрения источника, порождающего эти воздействия, и стороны, находящейся под их влиянием, можно выделить следующие четыре ситуации.

1. Внешние воздействия порождаются в процессе производства и влияют на потребителей. В этом случае полезность потребителя будет зависеть не только от выбираемого им потребительского набора, но и от производства соответствующих товаров, описываемого вектором чистых выпусков y: $u^k(x^k, y)$.

2. Внешние воздействия порождаются в процессе производства одной фирмы и влияют на производственный процесс другой фирмы. Это приводит к тому, что производственное множество фирмы, нахо-

дящейся под влиянием внешних воздействий других фирм, будет определяться не только ее технологическим процессом, но и чистым выпуском фирм — источников экстерналий: $Y_j = \{y_j : F_j(y_j, y_{-j}) \le 0\}$, где y_{-j} отражает технологии, используемые другими фирмами (за исключением фирмы *j*).

3. Внешние воздействия порождаются в процессе потребления одного агента и влияют на потребление другого (или других). В результате полезность последнего будет зависеть не только от выбираемого им потребительского набора, но и от наборов других агентов, оказывающих на него внешнее влияние: $u^k(x^k, x^{-k})$.

4. Наконец, последний вариант отражает ситуацию, при которой внешние воздействия порождаются в процессе потребления и влияют на производство. Вследствие этого производственные множества агента, находящегося под влиянием этих внешних воздействий, будут зависеть от потребительских наборов агентов — источников экстерналий: $Y_j = \{y_j : F_j(y_j, x) \le 0\}$.

Заметим, что каждое из рассмотренных выше внешних воздействий может быть как положительным, так и отрицательным.

Определение

Будем говорить, что имеет место *положительное внешнее воздействие на потребителя k со стороны потребителя r* при потреблении им товара *i*, если полезность *k*-го потребителя возрастает при увеличении количества *i*-го блага в наборе *r*-го потребителя $\left(\frac{\partial u^k(\cdot)}{\partial x_i^r} > 0 \right)$.

В случае убывания полезности *k*-го потребителя по x_i^r будем говорить о наличии *отрицательного внешнего воздействия.* Аналогично определяются отрицательные и положительные экстерналии, порождаемые производством и влияющие на потребителей. □

В случае внешнего воздействия не на потребителей, а на производителей, положительные экстерналии моделируются как расширяющие производственные возможности фирмы.

Определение

Будем говорить, что имеет место *положительное (отрицательное) внешнее воздействие на фирму j со стороны потребителя r* при потреблении товара *i*, если функция $F_j(\cdot)$ убывает (возрастает) по x_i^r.

Будем говорить, что имеет место *положительное (отрицательное) внешнее воздействие на фирму j со стороны фирмы l* при производстве товара *i*, если функция $F_j(\cdot)$ убывает (возрастает) по y_{il}. □

Дифференциальные характеристики Парето-оптимальных распределений при наличии экстерналий

Рассмотрим экономику, где имеют место все четыре вида внешних воздействий. Это означает, что в данной экономике полезность потребителя *k* зависит не только от своего набора, x^k, но и от потребительских наборов других участников, x^{-k}, а также от векторов затрат-выпусков y: $u^k(x^k, x^{-k}, y)$. Для фирм наличие экстерналий как со стороны потребления, так и со стороны производства влечет следующий вид производственного множества: $Y_j = \{y_j : F_j(y_j, y_{-j}, x) \le 0\}$.

Выведем характеристики Парето-оптимальных состояний для экономики с экстерналиями. Нетрудно показать, что распределение $(\hat{x}, \hat{y})$ Парето-оптимально тогда и только тогда, когда оно является решением задачи максимизации полезности каждого из *M* потребителей при фиксированных полезностях остальных и при выполнении технологических и ресурсных ограничений. В частности, для первого потребителя соответствующая оптимизационная задача примет следующий вид:

$$\max_{x,\,y} u^1(x^1, x^{-1}, y)$$

$$u^k(x^k, x^{-k}, y) \ge u^k(\hat{x}^k, \hat{x}^{-k}, \hat{y}), \quad k = 2, \ldots, M;$$

$$\sum_k x_i^k \le \sum_j y_{ij} + \overline{\omega}_i, \quad i = 1, \ldots, N;$$

$$F_j(y_j, y_{-j}, x) \le 0 \quad j = 1, \ldots, J.$$

Обозначим через λ^k множители Лагранжа для ограничений по уровням полезности, через μ_i — множители Лагранжа для ресурсных ограничений и через γ_j — множители Лагранжа для технологических ограничений. Тогда соответствующая рассматриваемой задаче функция Лагранжа примет вид

$$L = \sum_k \lambda^k u^k(x^k, x^{-k}, y) - \sum_j \gamma_j F_j(y_j, y_{-j}, x) +$$

$$+ \sum_i \mu_i \left(\sum_j y_{ij} - \sum_k (x_i^k - \overline{\omega}_i) \right).$$

Заметим, что мы для удобства не выделяем участника, полезность которого стоит в целевой функции, полагая $\lambda^1 = 1$. Будем полагать, что в данной экономике выполнены условия регулярности, обеспечивающие применимость к данной ситуации теоремы Куна — Таккера. Потому можно считать, что соответствующий множитель Лагранжа (в рассматриваемой задаче это λ^1) равен единице. Для выполнения условий регулярности достаточно потребовать, чтобы для каждого потребителя k в любом состоянии экономики существовало благо i: $\dfrac{\partial u^k(\hat{x})}{\partial x_i^k} > 0$ и, кроме того, для каждой фирмы j в любом состоянии экономики существовало благо i: $\dfrac{\partial F_j(\hat{y})}{\partial y_{ij}} > 0$. Далее всегда предполагаем, что эти условия имеют место.

Если распределение $(\hat{x}, \hat{y})$ внутреннее, т.е. $\hat{x}^k >> 0$ для всех k, то для любой из рассматриваемых оптимизационных задач найдутся неотрицательные (и не все равные нулю) множители $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ и $\gamma \geq 0$ такие, что будут выполнены следующие условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^k} = \sum_{r=1}^{M} \lambda^r \frac{\partial u^r(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_i^k} - \sum_j \gamma_j \frac{\partial F_j(\hat{y}, \hat{x})}{\partial x_i^k} - \mu_i = 0 \quad \forall\, i,\, k; \qquad (25.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_{ij}} = \sum_k \lambda^k \frac{\partial u^k(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y_{ij}} - \sum_s \gamma_s \frac{\partial F_s(\hat{y}, \hat{x})}{\partial y_{ij}} + \mu_i = 0 \quad \forall\, j,\, i. \qquad (25.2)$$

Предположим, что существует благо i_0, не порождающее внешних влияний (далее для удобства будем считать, что $i_0 = 1$), и хотя бы для одного потребителя предельная полезность этого блага положительна. Без ограничения общности можно считать, что это первый потребитель, т.е. $\frac{\partial u^1(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_1^1} > 0$. Тогда можно представить дифференциальную характеристику Парето-оптимального распределения в терминах предельных норм замещения.

Действительно, если первое благо не порождает внешних воздействий, то $\frac{\partial u^s(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_1^k} = 0$ для всех $s \neq k$ и $\frac{\partial F_j(\hat{y}, \hat{x})}{\partial x_1^k} = 0$ для всех j. В результате условие первого порядка по x_1^1 примет вид

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^1} = \frac{\partial u^1(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_1^1} - \mu_1 = 0,$$

откуда заключаем, что $0 < \frac{\partial u^1(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_1^1} = \mu_1$. Таким образом, $\mu_1 > 0$.

Аналогично $\frac{\partial L}{\partial x_1^k} = \lambda^k \frac{\partial u^k(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_1^k} - \mu_1 = 0$ или $\lambda^k \frac{\partial u^k(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_1^k} = \mu_1 > 0$, откуда, учитывая неотрицательность множителей Лагранжа, находим, что $\frac{\partial u^k(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_1^k} > 0$ и $\lambda^k > 0$ для всех k.

Поскольку первый товар не порождает внешних воздействий и в производстве, то условия первого порядка по примут вид

$$\frac{\partial L}{\partial y_{j1}} = -\gamma_j \frac{\partial F_j(\hat{y}, \hat{x})}{\partial y_{j1}} + \mu_1 = 0.$$

Это означает, что $0 < \mu_1 = \gamma_j \frac{\partial F_j(\hat{y}, \hat{x})}{\partial y_{1j}}$ и, следовательно, с учетом неотрицательности γ_j, имеем $\frac{\partial F_j(\hat{y}, \hat{x})}{\partial y_{1j}} > 0$ и $\gamma_j > 0$ для всех j.

Таким образом, поскольку $\mu_1 \neq 0$, мы можем поделить условия первого порядка (25.1) и (25.2) на μ_1 и перейти к предельным нормам замещения:

$$\sum_r \frac{\lambda^r}{\mu_1}\frac{\partial u^r(\hat{x},\hat{y})}{\partial x_i^k} - \sum_j \frac{\gamma_j}{\mu_1}\frac{\partial F_j(\hat{y},\hat{x})}{\partial x_i^k} = \frac{\mu_i}{\mu_1} \quad \forall i,\ k; \tag{25.3}$$

$$\sum_k \frac{\lambda^k}{\mu_1}\frac{\partial u^k(\hat{x},\hat{y})}{\partial y_{ij}} - \sum_s \frac{\gamma_s}{\mu_1}\frac{\partial F_s(\hat{y},\hat{x})}{\partial y_{ij}} = -\frac{\mu_i}{\mu_1}\ \forall j,\ i. \tag{25.4}$$

Из условий первого порядка для первого блага находим, что

$$\frac{\lambda^k}{\mu_1} = \frac{1}{\partial u^k(\hat{x},\hat{y})/\partial x_1^k} \qquad \forall k;$$

$$\frac{y_j}{\mu_1} = \frac{1}{\partial F_j(\hat{y},\hat{x})/\partial y_{1j}} \qquad \forall k;$$

После подстановки в (25.3) и (25.4) получаем:

$$\frac{\mu_i}{\mu_1} = \sum_r \frac{\partial u^r(\hat{x},\hat{y})/\partial x_i^k}{\partial u^r(\hat{x},\hat{y})/\partial x_1^r} - \sum_j \frac{\partial F_j(\hat{y},\hat{x})/\partial x_i^k}{\partial F_j(\hat{y},\hat{x})/\partial y_{1j}}; \tag{25.5}$$

$$-\frac{\mu_i}{\mu_1} = \sum_k \frac{\partial u^k(\hat{x},\hat{y})/\partial y_{ij}}{\partial u^k(\hat{x},\hat{y})/\partial x_1^k} - \sum_s \frac{\partial F_s(\hat{y},\hat{x})/\partial y_{ij}}{\partial F_s(\hat{y},\hat{x})/\partial y_{1s}}. \tag{25.6}$$

В результате из условия (25.5) для каждой пары потребителей k и k' и любого блага i получаем *условие эффективности потребления*:

$$\sum_r \frac{\partial u^r(\hat{x},\hat{y})/\partial x_i^k}{\partial u^r(\hat{x},\hat{y})/\partial x_1^r} - \sum_j \frac{\partial F_j(\hat{y},\hat{x})/\partial x_i^k}{\partial F_j(\hat{y},\hat{x})/\partial y_{1j}} =$$

$$= \sum_r \frac{\partial u^r(\hat{x},\hat{y})/\partial x_i^{k'}}{\partial u^r(\hat{x},\hat{y})/\partial x_1^r} - \sum_j \frac{\partial F_j(\hat{y},\hat{x})/\partial x_i^{k'}}{\partial F_j(\hat{y},\hat{x})/\partial y_{1j}},$$

или

$$\sum_r MRS^r_{x_i^k,\,x_1^r} - \sum_j MRT^j_{x_i^k,\,y_{1j}} = \sum_r MRS^r_{x_i^{k'},\,x_1^r} - \sum_j MRT^j_{x_i^{k'},\,y_{1j}}. \tag{25.7}$$

Из условия (25.6) для каждой пары производителей j и j' и любого блага i получаем *условие эффективности производства*:

$$\sum_k \frac{\partial u^k(\hat{x}, \hat{y})/\partial y_{ij}}{\partial u^k(\hat{x}, \hat{y})/\partial x_1^k} - \sum_s \frac{\partial F_s(\hat{y}, \hat{x})/\partial y_{ij}}{\partial F_s(\hat{y}, \hat{x})/\partial y_{1s}} =$$

$$= \sum_k \frac{\partial u^k(\hat{x}, \hat{y})/\partial y_{ij'}}{\partial u^k(\hat{x}, \hat{y})/\partial x_1^k} - \sum_s \frac{\partial F_s(\hat{y}, \hat{x})/\partial y_{ij'}}{\partial F_s(\hat{y}, \hat{x})/\partial y_{1s}},$$

или

$$\begin{aligned}&\sum_k MRS^k_{y_{ij},\, x_1^k} - \sum_s MRT^s_{y_{ij},\, y_{1s}} = \\ &= \sum_k MRS^k_{y_{ij'},\, x_1^k} - \sum_s MRT^s_{y_{ij'},\, y_{1s}}.\end{aligned} \qquad (25.8)$$

Наконец, комбинация условий (25.5) и (25.6) дает условие эффективности производимого ассортиментного набора для любых k, j и любого блага i:

$$\sum_r \frac{\partial u^r(\hat{x}, \hat{y})/\partial x_i^k}{\partial u^r(\hat{x}, \hat{y})/\partial x_1^r} - \sum_s \frac{\partial F_s(\hat{y}, \hat{x})/\partial x_i^k}{\partial F_s(\hat{y}, \hat{x})/\partial y_{1s}} =$$

$$= \sum_s \frac{\partial F_s(\hat{y}, \hat{x})/\partial y_{ij}}{\partial F_s(\hat{y}, \hat{x})/\partial y_{1s}} - \sum_r \frac{\partial u^r(\hat{x}, \hat{y})/\partial y_{ij}}{\partial u^r(\hat{x}, \hat{y})/\partial x_1^r}$$

или

$$\sum_r MRS^r_{x_i^k,\, x_1^r} - \sum_s MRT^s_{x_i^k,\, y_{1s}} = \sum_s MRT^s_{y_{ij},\, y_{1s}} - \sum_r MRS^r_{y_{ij},\, x_1^r}. \qquad (25.9)$$

Заметим, что рассмотренные в прошлой лекции общественные блага, по сути, являются специальным видом экстерналий в потреблении и условие эффективности производимого ассортиментного набора для общественных благ (уравнение Самуэльсона) может быть легко получено из уравнения (25.9). Будем рассматривать первое благо (не создающее внешних воздействий) как частное благо, а товар i будем считать общественным благом. Тогда в силу отсутствия влияния производства на потребление $\sum_r MRS^r_{y_{ij},\,x_1^r} = 0$, а в силу отсутствия влияния потребления на производство $\sum_s MRT^s_{x_i^k,\,y_{1s}} = 0$. Кроме того, поскольку предполагается отсутствие экстерналий в производстве, то $MRT^s_{y_{ij},\,y_{1s}} = 0$ для всех $j \neq s$ и в результате условие (25.9) примет вид уравнения Самуэльсона

$$\sum_r MRS^r_{x_i^k,\,x_1^r} = MRT^j_{y_{ij},\,y_{1j}}.$$

Лекция 26

Равновесие при наличии экстерналий

Рассмотрим равновесие в экономике с внешними воздействиями и проанализируем, будет ли равновесное распределение Парето-оптимальным. В равновесии каждый участник выбирает лишь свои переменные, воспринимая выбор остальных участников как данный.

Итак, задача потребителя k при наличии внешних воздействий, создаваемых как другими потребителями, так и производителями, примет следующий вид:

$$\max_{x^k \geq 0} u^k(x^k,\, x^{-k},\, y)$$

$$\sum_i p_i x_i^k \leq \sum_i p_i \omega_i^k + \sum_j \theta_j^k \pi_j(p).$$

В задаче производителя изменится лишь производственное множество:

$$\max_{y_j} p y_j$$

$$F_j(y_j,\, y_{-j},\, x) \leq 0.$$

Определение

Равновесием в экономике с экстерналиями будем называть набор $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$ такой, что:

1) для любого k вектор $\tilde{x}^k$ является решением задачи k-го потребителя при ценах $\tilde{p}$ и данном выборе остальных участников $\tilde{x}^{-k}$ и $\tilde{y}$;

2) для любого j вектор затрат-выпусков $\tilde{y}_j$ — решение задачи фирмы j при ценах $\tilde{p}$ и данном выборе остальных участников $\tilde{y}_{-j}$ и $\tilde{x}$;

3) все рынки уравновешены:

$$\sum_k \tilde{x}_i^k \leq \overline{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ij} \text{ и } \tilde{p}_i\left(\sum_k \tilde{x}_i^k - \overline{\omega}_i - \sum_j \tilde{y}_{ij}\right) = 0 \text{ для всех } i. \ \square$$

Рассмотрим дифференциальные характеристики внутреннего равновесия с экстерналиями и сравним их с найденными выше дифференциальными характеристиками Парето-оптимальных состояний.

Обозначив через α^k множитель Лагранжа, соответствующий бюджетному ограничению задачи потребителя k, мы можем выписать следующие условия первого порядка:

$$\frac{\partial u^k(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x_i^k} - \alpha^k \tilde{p}_i \leq 0; \quad \frac{\partial u^k(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x_i^k} - \alpha^k \tilde{p}_i = 0, \text{ если } \tilde{x}_i^k > 0.$$

Будем по-прежнему предполагать, что первое благо не порождает экстерналий и желаемо первым потребителем, т.е. $\dfrac{\partial u^1(\cdot)}{\partial x_1^1} > 0$. Следовательно, $\alpha^1 > 0$ и равновесная цена такого блага положительна: $\tilde{p}_1 > 0$.

Получим предельную норму замещения для потребителя k произвольного блага i на первое благо для внутренней точки $\tilde{x}^k \gg 0$, поделив условия первого порядка:

$$MRS^k_{x_i^k, x_1^k}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial u^k(\tilde{x}, \tilde{y}) / \partial x_i^k}{\partial u^k(\tilde{x}, \tilde{y}) / \partial x_1^k} = \frac{\alpha^k \tilde{p}_i}{\alpha^k \tilde{p}_1} = \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_1}. \tag{26.1}$$

Обратимся к задаче максимизации прибыли. Обозначив через β_j множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению задачи j-й фирмы, выпишем условие первого порядка:

$$\tilde{p}_i - \beta_j \frac{\partial F_j(\tilde{y}, \tilde{x})}{\partial y_{ij}} = 0.$$

Поскольку $\tilde{p}_1 > 0$, то, поделив условия первого порядка для блага i и первого блага, получим выражение для соотношения цен через предельную норму трансформации:

$$\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_1} = \frac{\beta_j\left(\partial F_j(\tilde{y}, \tilde{x})/\partial y_{ij}\right)}{\beta_j\left(\partial F_j(\tilde{y}, \tilde{x})/\partial y_{1j}\right)} = \frac{\partial F_j(\tilde{y}, \tilde{x})/\partial y_{ij}}{\partial F_j(\tilde{y}, \tilde{x})/\partial y_{1j}} = MRT^j_{y_{ij}, y_{1j}}(\tilde{y}, \tilde{x}). \qquad (26.2)$$

Из условий (26.1) и (26.2) следует, что в равновесии:

$$MRS^k_{x_i^k, x_1^k}(\tilde{x}, \tilde{y}) = MRS^{k'}_{x_i^{k'}, x_1^{k'}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ для всех } k \text{ и } k'; \qquad (26.3)$$

$$MRT^j_{y_{ij}, y_{1j}}(\tilde{y}, \tilde{x}) = MRT^{j'}_{y_{ij'}, y_{1j'}}(\tilde{y}, \tilde{x}) \text{ для всех } j \text{ и } j'; \qquad (26.4)$$

$$MRS^k_{x_i^k, x_1^k}(\tilde{x}, \tilde{y}) = MRT^j_{y_{ij}, y_{1j}}(\tilde{y}, \tilde{x}) \text{ для всех } k \text{ и } j. \qquad (26.5)$$

Эти условия существенно отличаются от характеристик Парето-оптимальных распределений (25.7)—(25.9). Можно вывести следующие варианты условий, при которых соотношения (26.3)—(26.5) и (25.7)—(25.9) оказываются несовместными:

$$\sum_{r \neq k} MRS^r_{x_i^k, x_1^r} - \sum_j MRT^j_{x_i^k, y_{1j}} \neq \sum_{r \neq k'} MRS^r_{x_i^{k'}, x_1^r} - \sum_j MRT^j_{x_i^{k'}, y_{1j}};$$

или

$$\sum_k MRS^k_{y_{ij}, x_1^k} - \sum_{s \neq j} MRT^s_{y_{ij}, y_{1s}} \neq \sum_k MRS^k_{y_{ij'}, x_1^k} - \sum_{s \neq j'} MRT^s_{y_{ij'}, y_{1s}};$$

или

$$\sum_{r \neq k} MRS^r_{x_i^k, x_1^r} - \sum_s MRT^s_{x_i^k, y_{1s}} \neq \sum_{s \neq j} MRT^s_{y_{ij}, y_{1s}} - \sum_r MRS^r_{y_{ij}, x_1^r}.$$

Если хотя бы для какого-то товара имеет место одно из приведенных выше соотношений, то условия (26.3)—(26.5) и (25.7)—(25.9) оказываются несовместными и соответственно равновесие не будет Парето-оптимально. Ниже мы рассмотрим экономику, в которой эти условия несовместны.

Утверждение 26.1. Теорема о неэффективности в экономике с экстерналиями.

Рассмотрим экономику с экстерналиями, где все функции полезности, $u^k(\cdot)$, и функции, представляющие трансформационные кривые, $F_j(\cdot)$, дифференцируемы. Пусть первый товар не создает внешних воздействий и является желаемым для первого потребителя. Предположим, кроме того, что потребление i-го товара первым потребителем не создает экстерналий, а производство первой фирмой товара i влечет лишь неотрицательные экстерналии, причем хотя бы одно из этих внешних воздействий положительно, тогда:

1) если $(\hat{x}, \hat{y})$ является внутренним Парето-оптимальным распределением для данной экономики, то ни при каких ценах и трансфертах оно не может быть реализовано как равновесие;

2) если $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$ — равновесие в рассматриваемой экономике и $\tilde{x}^k \gg 0$ для всех k, то распределение $(\tilde{x}, \tilde{y})$ не будет Парето-оптимальным.

Доказательство

Выпишем условие эффективности производимого ассортиментного набора для $k=1$, $j=1$ и товара i:

$$\sum_r MRS^r_{x_i^1,\, x_1^r} - \sum_s MRT^s_{x_i^1,\, y_{1s}} = \sum_s MRT^s_{y_{i1},\, y_{1s}} - \sum_r MRS^r_{y_{i1},\, x_1^r}. \qquad (26.6)$$

Поскольку потребление первым потребителем i-го блага не создает внешних воздействий, то $\dfrac{\partial u^r}{\partial x_i^1} = 0$ для всех $r \neq 1$ и $\dfrac{\partial F_s}{\partial x_i^1} = 0$ для всех s, откуда получаем, что $MRT^r_{x_i^1,\, x_1^r} = 0$ для всех $r \neq 1$ и $MRT^s_{x_i^1,\, y_{1s}} = 0$ для всех s. Следовательно,

$$\sum_r MRS^r_{x_i^1,\, x_1^r} = MRS^1_{x_i^1,\, x_1^1} \text{ и } \sum_s MRT^s_{x_i^1,\, y_{1s}} = 0.$$

Как было показано ранее (при выводе дифференциальных характеристик Парето-оптимальных распределений) в данной экономике для Парето-оптимальных распределений имеем $\dfrac{\partial u^k(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_1^k} > 0$ для всех k и $\dfrac{\partial F_j(\hat{y},\hat{x})}{\partial y_{1j}} > 0$ для всех j. Поскольку мы предположили, что производство первой фирмой товара i влечет лишь неотрицательные экстерналии, то $\dfrac{\partial u^r(\cdot)}{\partial y_{i1}} \geq 0$ для всех r и $\dfrac{\partial F_s(\cdot)}{\partial y_{i1}} \leq 0$ для всех $s \neq 1$, причем одно из этих неравенств строгое. Отсюда получаем, что $MRS^r_{y_{i1},\,x^r_1} \geq 0$ для всех r и $MRS^s_{y_{i1},\,y_{1s}} \leq 0$ для всех $s \neq 1$. Поскольку хотя бы одно из этих неравенств строгое, то

$$\sum_{s\neq 1} MRT^s_{y_{il},\,y_{1s}} - \sum_r MRS^r_{y_{i1},\,x^r_1} < 0.$$

Таким образом, равенство (26.6) примет вид

$$MRS^1_{x^1_i,\,x^1_1} = MRT^1_{y_{i1},\,y_{11}} + \left(\sum_{s\neq 1} MRT^s_{y_{i1},\,y_{1s}} - \sum_r MRS^r_{y_{i1},\,x^r_1}\right) < MRT^1_{y_{il},\,y_{11}}. \quad (26.7)$$

Теперь, сопоставляя полученную для данной экономики одну из характеристик Парето-оптимальных распределений (26.7) и характеристику равновесных распределений (26.5), мы видим, что они не могут иметь место одновременно для одного и того же состояния экономики. Это доказывает, что в данной экономике равновесие не будет Парето-оптимальным, поскольку, как было показано выше, равновесное распределение не удовлетворяет условию эффективности производимого ассортиментного набора и, наоборот, Парето-оптимальное распределение не может быть реализовано как равновесное. ■

Доказанная теорема говорит о том, что в рассмотренной экономике не имеют места теоремы благосостояния. Проанализируем, может ли вмешательство государства способствовать устранению неэффективности рыночных равновесий при наличии экстерналий.

Регулирование экстерналий

Среди возможных вариантов регулирования внешних воздействий выделим следующие:

• количественные ограничения на производство (потребление) продукта, приводящего к внешнему воздействию (эти ограничения называют нормативами или квотами);

• налоги (субсидии) на экстерналии (такие налоги принято называть *налогами Пигу*);

• создание рынков экстерналий.

Продемонстрируем первый из этих вариантов преодоления рыночной несостоятельности на примере экономики с экстерналиями в производстве, т.е. будем считать, что экстерналии возникают лишь в производстве и влияют только на производство.

Регулирование экстерналий посредством нормативов (квот)

Поскольку мы будем рассматривать только экстерналии в производстве, то задача потребителя принимает стандартный вид:

$$\max_{x^k \geq 0} u^k(x^k)$$

$$px^k \leq p\omega^k + \sum_j \theta_j^k p y_j.$$

Введем экзогенно устанавливаемые нормативы (квоты) на производство (использование) всех товаров, которые порождают внешние воздействия. Это приведет к дополнительным ограничениям на производственные возможности фирм, порождающих эти внешние воздействия. Обозначим через E_j множество благ, производство (использование которых j-й фирмой порождает внешние воздействия. Тогда задачу j-й фирмы можно записать следующим образом:

$$\max_{y_j} py_j$$

$$F_j(y_j, y_{-j}) \leq 0;$$

$$y_{ij} = \overline{y}_{ij} \quad \forall \quad i \in E_j,$$

где $\overline{y}_{ij}$ — норматив (квота) на выпуск (использование) товара i фирмой j.

Сформулируем определение равновесия для экономики, где экстерналии регулируются посредством нормативов (квот).

Определение

Набор $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y})$ является равновесием в рассматриваемой экономике при квотах $\overline{y}$, если:

1) для любого k вектор $\tilde{x}^k$ — решение задачи потребителя при ценах $\tilde{p}$;

2) для любого j вектор затрат-выпусков $\tilde{y}_j$ — решение задачи производителя при ценах $\tilde{p}$, $y_{-j} = \tilde{y}_{-j}$ и квотах $\overline{y}_j$ на товары из множества E_j;

3) выполнены балансы по всем рынкам: $\sum_k \tilde{x}_i^k \leq \overline{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ij}$ и $\tilde{p}_i\left(\sum_k \tilde{x}_i^k - \overline{\omega}_i - \sum_j \tilde{y}_{ij}\right) = 0$ для всех i. □

Покажем, что для данной экономики имеет место аналог второй теоремы благосостояния, т.е. при некоторых условиях любое внутреннее Парето-оптимальное распределение можно реализовать как равновесие при наличии квот.

Утверждение 26.2. Вторая теорема благосостояния для равновесия с квотами на экстерналии.

Пусть функции полезности $u^k(\cdot)$ дифференцируемые и вогнутые для любого k, а функции $F_j(\cdot)$ дифференцируемые и выпуклые по y_j для любого j. Кроме того, будем считать, что существует благо, не порождающее внешних воздействий (пусть это первое благо) и оно желаемо хотя бы одним потребителем. Пусть $(\hat{x}, \hat{y})$ — Парето-оптимальное распределение в рассматриваемой экономике, где $\hat{x}^k \gg 0$ для любого k, причем для этого распределения выполнены условия регулярности. Тогда существуют цены $\hat{p}$, квоты $\overline{y}$ и трансферты T^k такие что $(\hat{p}, \hat{x}, \hat{y})$ — равновесие при квотах $\overline{y}$ и трансфертах T^k.

Доказательство

1. Поскольку $(\hat{x}, \hat{y})$ — Парето-оптимальное распределение, то оно является решением задачи максимизации полезности каждого

из M потребителей при фиксированных полезностях остальных и при выполнении технологических и ресурсных ограничений. В частности, для первого потребителя соответствующая оптимизационная задача примет следующий вид:

$$\max_{x\geq 0, y} u^1(x^1)$$

$$u^k(x^k) \geq u(\hat{x}^k),\ k = 2,\ \ldots,\ M;$$

$$\sum_k x_i^k \leq \sum_j y_{ij} + \overline{\omega}_i,\ i = 1,\ \ldots,\ N;$$

$$F_j(y_j,\ y_{-j}) \leq 0 \quad j = 1,\ \ldots,\ J.$$

Запишем лагранжиан для данной задачи:

$$L = \sum_k \lambda^k u^k(x^k) - \sum_j \gamma_j F_j(y_j,\ y_{-j}) + \sum_i \mu_i \left(\sum_j y_{ij} - \sum_k (x_i^k - \overline{\omega}_i) \right).$$

Поскольку мы предполагали, что для распределения $(\hat{x},\ \hat{y})$ выполнены условия регулярности, то можно считать, что $\lambda^1 = 1$.

Выпишем условия первого порядка для внутреннего решения $(\hat{x}^k >> 0)$:

$$\lambda^k \frac{\partial u^k(\hat{x})}{\partial x_i^k} = \mu_i \text{ для всех } k,\ i; \tag{26.8}$$

$$\gamma_j \frac{\partial F_j(\hat{y})}{\partial y_{ij}} = \mu_i \text{ для всех } i \notin E_j; \tag{26.9}$$

$$\sum_s \gamma_s \frac{\partial F_s(\hat{y})}{\partial y_{ij}} = \mu_i \text{ для всех } i \in E_j; \tag{26.10}$$

$$F_j(\hat{y}_j,\ \hat{y}_{-j}) \leq 0 \text{ и } \gamma_j F_j(\hat{y}_j, \hat{y}_{-j}) = 0 \text{ для всех} j; \tag{26.11}$$

$$\sum_k \hat{x}_i^k \leq \sum_j \hat{y}_{ij} + \overline{\omega}_i \text{ и } \mu_i \left(\sum_k \hat{x}_i^k - \sum_j \hat{y}_{ij} - \overline{\omega}_i \right) = 0 \text{ для всех } i. \tag{26.12}$$

Заметим, что в силу предположения о том, что первое благо желательно для первого потребителя, мы получаем, что $\mu_1 > 0$, а отсюда заключаем, что $\lambda^k > 0$ для всех k. Поскольку первое благо не создает экстерналий в производстве, то и $\gamma_j > 0$ для всех j.

2. Теперь выпишем дифференциальные характеристики равновесия с квотами. Пусть α^k — множитель Лагранжа для бюджетного ограничения, тогда

$$\frac{\partial u^k(x^k)}{\partial x_i^k} = \alpha^k p_i, \text{ если } x_i^k > 0. \tag{26.13}$$

Пусть β_j — множитель Лагранжа для технологического ограничения, а ограничения по квотам подставим в целевую функцию, тогда

$$\beta_j \frac{\partial F_j(y)}{\partial y_{ij}} = p_i \quad \text{для всех } i \notin E_j. \tag{26.14}$$

3. Выберем в качестве цен благ множители Лагранжа: $\hat{p}_i = \mu_i$. Введем квоты, положив $\bar{y}_i = \hat{y}_i$ для всех $i \in E_j$. Покажем, что $\hat{y}_j$ является решением задачи производителя при ценах $\hat{p}_i = \mu_i$ и квотах $\bar{y}_i = \hat{y}_i$ $(i \in E_j)$.

Поскольку Парето-оптимальное распределение является допустимым, то $\hat{y}_j$ принадлежит производственному множеству j-й фирмы (из условия (26.11)) при данных выпусках остальных фирм $\hat{y}_{-j}$. Кроме того, условие (26.9) совпадает с условием первого порядка задачи производителя j при $\beta_j = \gamma_j$. В силу выпуклости функции $F_j(\cdot)$ условия первого порядка являются необходимыми и достаточными.

4. Покажем, что при ценах $\hat{p}_i = \mu_i$ набор $\hat{x}^k$ является решением задачи потребителя при доходах $I^k = \hat{p}\hat{x}^k$.

Действительно, условие (26.8) будет совпадать с условием первого порядка для задачи потребителя (26.13) при $\alpha^k = \frac{1}{\lambda^k}$. Заметим, что в силу вогнутости функций полезности $u^k(\cdot)$ условия первого порядка являются необходимыми и достаточными.

Бюджетные ограничения будут выполнены при соответствующем подборе трансфертов: $T^k = \hat{p}\hat{x}^k - \hat{p}\omega^k - \sum_j \theta_j^k \hat{p}\hat{y}_j$. Покажем, что сумма трансфертов равна нулю:

$$\sum_k T^k = \sum_k \hat{p}\hat{x}^k - \sum_k \hat{p}\omega^k - \sum_{k,j} \theta_j^k \hat{p}\hat{y}_j = \sum_k \hat{p}\hat{x}^k - \hat{p}\overline{\omega} - \sum_j \hat{p}\hat{y}_j =$$

$$= \sum_i \hat{p}_i \left(\sum_k \hat{x}_i^k - \overline{\omega}_i - \sum_j \hat{y}_{ij} \right) = \left(\sum_i \mu_i \sum_k \hat{x}_i^k - \overline{\omega}_i - \sum_j \hat{y}_{ij} \right) = 0,$$

поскольку в силу условия (26.12) каждое слагаемое последней суммы равно нулю.

5. Осталось убедиться в том, что все рынки уравновешены. Это следует из условий (26.12), которые при $\hat{p}_i = \mu_i$ эквивалентны условиям уравновешенности рынков. ■

Два других варианта преодоления несостоятельности рынка в случае экстерналий будут рассмотрены в следующей лекции.

Лекция 27

Регулирование экстерналий: налоги и торговля экстерналиями

Мы рассмотрели регулирование экстерналий посредством нормативов или квот. Теперь рассмотрим возможность более гибкого влияния на источники внешних воздействий путем не количественных ограничений, а регулирования посредством механизма цен. Начнем рассмотрение с механизма, где внешние воздействия корректируются посредством экзогенно устанавливаемых налогов (субсидий). Такие корректирующие экстерналии налоги, как мы уже говорили, называют налогами Пигу.

Равновесие с налогами

Поскольку мы рассматриваем ситуацию с экстерналиями в производстве, то налогами будут облагаться лишь производители, причем эти налоги будут для каждого производителя индивидуальны. Налоги будут взиматься с каждой единицы блага, производство которого влечет внешний эффект. Будем считать, что налог платит производитель, который это благо производит. Заметим: отрицательные налоги означают, что агенту выплачивается субсидия за производство товара.

Введем следующие обозначения: пусть t_{ij} — налог на экстерналии, создаваемые j-й фирмой при производстве i-го товара (t_{ij} может быть как больше, так и меньше нуля; в последнем случае мы имеем дело не с налогом, а с субсидией). Как и ранее, через E_j будем обозначать множество благ, производство которых j-й фирмой порождает экстерналии.

В результате введения налогов задача j-го производителя примет следующий вид:

$$\max_{y_j}\left(\sum_{i\notin E_j} p_i y_{ij} + \sum_{i\in E_j}(p_i - t_{ij})y_{ij}\right)$$

$$F_j(y_j,\, y_{-j}) \le 0.$$

Будем считать, что доходы от налогов Пигу возвращаются потребителям в виде паушальных субсидий.

Определение

Набор $(\tilde{p},\, \tilde{x},\, \tilde{y},\, \tilde{T})$ называется *равновесием в экономике с налогами Пигу* t, если:

1) для любой фирмы j вектор чистых выпусков $\tilde{y}_j$ является решением задачи производителя при ценах $\tilde{p}$, налогах t_{ij} $(i\in E_j)$ и выпусках остальных фирм $y_{-j} = \tilde{y}_{-j}$;

2) для любого k набор $\tilde{x}^k$ — решение задачи потребителя k:

$$\max_{x^k\ge 0} u^k(x^k)$$

$$\tilde{p}x^k \le \tilde{p}\omega^k + \sum_j \theta_j^k \pi_j(\tilde{p},t) + \tilde{T}^k;$$

3) все рынки уравновешены:

$$\sum_k \tilde{x}_i^k \le \bar{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ij} \text{ и } \tilde{p}_i\left(\sum_k \tilde{x}_i^k - \bar{\omega}_i - \sum_j \tilde{y}_{ij}\right) = 0 \text{ для всех } i;$$

4) имеет место финансовый баланс: $\sum_k \tilde{T}^k = \sum_j \sum_{i \in E_j} t_{ij} \tilde{y}_{ij}$.

Покажем, что при определенных условиях любое Парето-оптимальное распределение может быть получено как равновесие с налогами на экстерналии.

Утверждение 27.1. Вторая теорема благосостояния для равновесия с налогами Пигу.

Пусть функции полезности $u^k(\cdot)$ дифференцируемые и вогнутые для любого k, а функции $F_j(\cdot)$ дифференцируемые и выпуклые по y_j для любого j и y_{-j}. Кроме того, будем считать, что существует благо, не порождающее внешних воздействий (пусть это первое благо) и оно желаемо хотя бы одним потребителем. Пусть $(\hat{x}, \hat{y})$ — Парето-оптимальное распределение в рассматриваемой экономике, где $\hat{x}^k >> 0$ для любого k, причем для этого распределения выполнены условия регулярности. Тогда существуют цены $\hat{p}$, налоги $\hat{t}$ и трансферты $\hat{T}$ такие, что набор $(\hat{p}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{T})$ будет являться равновесием с налогами Пигу $\hat{t}$.

Доказательство

1. Воспользуемся характеристиками внутреннего Парето-оптимального распределения $(\hat{x}, \hat{y})$, полученными в предыдущей лекции. Пусть λ^k, μ_i, γ_j — множители Лагранжа при ограничениях соответственно по уровням полезности, ресурсных и технологических, тогда $(\hat{x}, \hat{y})$ удовлетворяет условиям (27.1)—(27.5):

$$\lambda^k \frac{\partial u^k(\hat{x})}{\partial x_i^k} = \mu_i \text{ для всех } k, i; \tag{27.1}$$

$$\gamma_j \frac{\partial F_j(\hat{y})}{\partial y_{ij}} = \mu_i \text{ для всех } i \notin E_j; \tag{27.2}$$

$$\sum_s \gamma_s \frac{\partial F_s(\hat{y})}{\partial y_{ij}} = \mu_i \text{ для всех } i \in E_j; \tag{27.3}$$

$$F_j(y_j,\ y_{-j}) \leq 0 \text{ для всех } j; \tag{27.4}$$

$$\sum_k x_i^k \leq \sum_j y_{ij} + \overline{\omega}_i \text{ и } \mu_i\left(\sum_k x_i^k - \sum_j y_{ij} - \overline{\omega}_i\right) = 0 \text{ для всех } i. \tag{27.5}$$

Как показано ранее, $\mu_1 > 0$, $\lambda^k > 0$ для всех k и $\gamma_j > 0$ для всех j.

2. Обратимся к дифференциальным характеристикам равновесия с налогами Пигу. Пусть α^k — множитель Лагранжа для бюджетного ограничения потребителя k, тогда

$$\frac{\partial u^k(x^k)}{\partial x_i^k} = \alpha^k p_i, \text{если } x_i^k > 0. \tag{27.6}$$

Если β_j — множитель Лагранжа для технологического ограничения, то условия первого порядка для задачи максимизации прибыли j-й фирмы при наличии налогов примут следующий вид:

$$\beta_j \frac{\partial F_j(y)}{\partial y_{ij}} = p_i \quad \text{для всех } i \notin E_j; \tag{27.7}$$

$$\beta_j \frac{\partial F_j(y)}{\partial y_{ij}} = p_i - t_{ij} \text{ для всех } i \in E_j. \tag{27.8}$$

3. Выберем в качестве цен благ множители Лагранжа: $\hat{p}_i = \mu_i$, а налоги положим равными

$$\hat{t}_{ij} = \begin{cases} \sum_{s \neq j} \gamma_s \dfrac{\partial F_s(\hat{y}_s, \hat{y}_{-s})}{\partial y_{ij}}, & \text{если } i \in E_j \\ 0, \text{ если } i \notin E_j \end{cases}.$$

Покажем, что $\hat{y}_j$ является решением задачи фирмы j при ценах $\hat{p}_i = \mu_i$, налогах $\hat{t}$ и выпусках остальных участников $\hat{y}_{-j}$.

Заметим, что $\hat{y}_j$ принадлежит производственному множеству j-й фирмы в силу условия (27.4). Кроме того, условие (27.2) при $\beta_j = \gamma_j$ совпадает с условием первого порядка задачи максимизации прибыли (27.7).

Покажем, что условие (27.3) при определенных выше налогах будет эквивалентно условию первого порядка фирмы по благам, порождающим внешние воздействия (условие (27.8)). Действительно, в силу определения цен и налогов имеем

$$\hat{p}_i - \hat{t}_{ij} = \mu_i - \sum_{s \neq j} \gamma_s \frac{\partial F_s(\hat{y}_s,\ \hat{y}_{-s})}{\partial y_{ij}} = \gamma_j \frac{\partial F_j(\hat{y}_j,\ \hat{y}_{-j})}{\partial y_{ij}},$$

что при $\beta_j = \gamma_j$ эквивалентно условию (27.3).

В силу выпуклости $F_j(\cdot)$ условия первого порядка являются необходимыми и достаточными. Таким образом, мы доказали, что $\hat{y}_j$ является решением задачи фирмы j при $(\hat{p}_i,\ \hat{t},\ \hat{y}_{-j})$.

4. Покажем, что при ценах $\hat{p}_i = \mu_i$ набор $\hat{x}^k$ является решением задачи потребителя при доходах $I^k = \hat{p}\hat{x}^k$.

Условие (27.2) совпадает с условием первого порядка задачи максимизации полезности (27.6) при $\alpha^k = \dfrac{1}{\lambda^k}$, а в силу вогнутости функций $u^k(\cdot)$ условия первого порядка являются необходимыми и достаточными. Бюджетные ограничения будут выполнены при соответствующем подборе трансфертов: $\hat{T}^k = \hat{p}\hat{x}^k - \hat{p}\omega^k - \sum_j \theta_j^k \pi_j(\hat{p},\ \hat{t})$.

5. Покажем, что сумма трансфертов равна совокупным сборам от налогов, т.е. выполнен финансовый баланс:

$$\sum_k \hat{T}^k = \sum_k \hat{p}\hat{x}^k - \sum_k \hat{p}\omega^k - \sum_{k,j} \theta_j^k \pi_j(\hat{p},\hat{t}) = \sum_k \hat{p}\hat{x}^k - \hat{p}\overline{\omega} - \sum_j \pi_j(\hat{p},\ \hat{t}) =$$

$$= \sum_k \hat{p}\hat{x}^k - \hat{p}\overline{\omega} - \sum_{j,\ i \in E_j} (\hat{p}_i - \hat{t}_{ij})\hat{y}_{ij} - \sum_{j,\ i \notin E_j} \hat{p}_i \hat{y}_{ij} =$$

$$= \sum_i \hat{p}_i \left(\sum_k \hat{x}_i^k - \overline{\omega}_i - \sum_j \hat{y}_{ij} \right) + \sum_{j,\ i \in E_j} \hat{t}_{ij} \hat{y}_{ij} =$$

$$= \sum_i \mu_i \left(\sum_k \hat{x}_i^k - \overline{\omega}_i - \sum_j \hat{y}_{ij}\right) + \sum_{j,\ i \in E_j} \hat{t}_{ij} \hat{y}_{ij} = \sum_{j,\ i \in E_j} \hat{t}_{ij} \hat{y}_{ij},$$

поскольку в силу условия (27.5) каждое слагаемое

$\mu_i\left(\sum_k x_i^k - \sum_j y_{ij} - \overline{\omega}_i\right) = 0$. Наконец, все рынки будут уравновешены в силу условия (27.5). ■

Итак, мы показали, что для равновесия с налогами на экстерналии имеет место аналог второй теоремы благосостояния. Поскольку налоги устанавливаются экзогенно, вряд ли стоит ожидать, что равновесие с произвольными налогами приведет к Парето-оптимальному распределению ресурсов, однако при соответствующим образом подобранных налоговых ставках мы сможем гарантировать оптимальность равновесия с налогами Пигу.

Утверждение 27.2 Аналог первой теоремы благосостояния для равновесия с налогами Пигу.

Пусть функции полезности $u^k(\cdot)$ дифференцируемые и вогнутые для любого k, а функции $F_j(\cdot)$ дифференцируемые и выпуклые для любого j. Пусть $(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{T})$ — равновесие с налогами Пигу $\tilde{t}$, причем $\tilde{x}^k \gg 0$ для всех k. Кроме того, будем считать, что существует благо, не порождающее внешние воздействия (пусть это первое благо) такое, что $\dfrac{\partial u^k(\tilde{x})}{\partial x_1^k} > 0$ для всех k и $\dfrac{\partial F_j(\tilde{y})}{\partial y_{1j}} > 0$ для всех j. Если налоги удовлетворяют условию $\tilde{t}_{ij} = \sum_{s \neq j} \dfrac{\partial F_s(\hat{y}_s, \hat{y}_{-s})/\partial y_{ij}}{\partial F_s(\hat{y})/\partial y_{1s}} \tilde{p}_1$ для всех $i \in E_j$ и $\tilde{t}_{ij} = 0$ для всех $i \notin E_j$, то рассматриваемое равновесие будет Парето-оптимальным.

Доказательство

Покажем, что равновесие удовлетворяет дифференциальным характеристиками Парето-оптимума (27.1)—(27.5). При вогнутости (выпуклости) соответствующих функций необходимые условия Парето-оптимума будут одновременно и достаточными.

Воспользуемся дифференциальными характеристиками равновесия с налогами, полученными при доказательстве утверждения (27.1). Положим $\lambda^k = \dfrac{1}{\alpha^k}$, $\mu_i = \tilde{p}_i$ и $\gamma_j = \beta_j$. Заметим, что $\lambda^k = \dfrac{1}{\alpha^k} = \dfrac{\tilde{p}_1}{\partial u^k(\tilde{x}^k)/\partial x_1^k} > 0$, $\gamma_j = \beta_j = \dfrac{\tilde{p}_1}{\partial F_j(\tilde{y})/\partial y_{1j}} > 0$. Тогда условие первого порядка по x^k (27.6) в задаче потребителя будет эквивалентно условию (27.1) в задаче поиска Парето-оптимума. Аналогично условие первого порядка (27.7) в задаче фирмы по благам, не создающим экстерналии, будет эквивалентно условию (27.2) в задаче поиска Парето-оптимальных распределений.

Покажем, что аналогичное условие выполняется по благам, порождающим внешние воздействия, т.е. условие (27.3). Из задачи максимизации прибыли по этим благам имеем

$$\tilde{p}_i - \tilde{t}_{ij} = \beta_j \frac{\partial F_j(\tilde{y}_j, \tilde{y}_{-j})}{\partial y_{ij}} \text{ для всех } i \in E_j.$$

Подставив выражения для налогов $\tilde{t}_{ij}$ с учетом того, что $\gamma_j = \beta_j$ и $\mu_i = \tilde{p}_i$, получаем

$$\tilde{p}_i = \mu_i = \gamma_j \frac{\partial F_j(\tilde{y})}{\partial y_{ij}} + \tilde{t}_{ij} = \gamma_j \frac{\partial F_j(\tilde{y})}{\partial y_{ij}} + \sum_{s \neq j} \frac{\partial F_s(\tilde{y})/\partial y_{ij}}{\partial F_s(\tilde{y})/\partial y_{1s}} \tilde{p}_1.$$

Поскольку первое благо по предположению не создает внешних воздействий, то для него условие первого порядка в задаче максимизации прибыли имеет вид $p_1 = \beta_s \dfrac{\partial F_s(\tilde{y}_s, \tilde{y}_{-s})}{\partial y_{1s}}$ для любой фирмы s. Подставляем это выражение для цены первого товара в соотношение (27.8), с учетом $\beta_s = \gamma_s$ находим:

$$\mu_i = \gamma_i \frac{\partial F_j(\tilde{y})}{\partial y_{ij}} + \sum_{s \neq j} \frac{\partial F_s(\tilde{y})/\partial y_{ij}}{\partial F_s(\tilde{y})/\partial y_{1s}} \frac{\partial F_s(\tilde{y})}{\partial y_{1s}} \gamma_s = \sum_s \gamma_s \frac{\partial F_s(\tilde{y})}{\partial y_{ij}}.$$

Таким образом, выполняется условие (27.3).

Условие (27.4) выполнено, поскольку для любого j вектор $\tilde{y}_j$ является решением задачи фирмы j, а следовательно, принадлежит ее производственному множеству.

Наконец, условия равновесия при $\mu_i = \tilde{p}_i$ будут эквиваленты условиям (27.5). Таким образом, мы показали, что в равновесии выполнены условия (27.1)—(27.5), а в силу выпуклости функций $F_j(\cdot)$ и вогнутости функций $u^k(\cdot)$ условия первого порядка являются необходимыми и достаточными условиями Парето-оптимальности. ■

Рынки экстерналий

Экономика с экстерналиями не удовлетворяет одной из предпосылок первой теоремы благосостояния, поскольку в ней отсутствует полная система рынков. Действительно, если бы каждое внешнее воздействие имело свою цену и продавалось на рынке, то сторона, находящаяся под влиянием этого воздействия, не воспринимала бы его как некую экзогенно заданную величину, а имела бы возможность влиять на него, предъявляя спрос на данный товар, а соответствие спроса и предложения достигалось бы за счет определенного подбора цен. Таким образом, внешние воздействия перестали бы быть таковыми: при этой системе рынков экстерналий (в дополнении к рынкам обычных благ) в экономике сложилась бы полная система рынков. Итак, рассмотрим возможность интернализации внешних воздействий за счет создания рынков экстерналий.

Обозначим через τ_{ijr} цену экстерналии, состоящей во влиянии производства i-го блага j-м производителем на r-го производителя. Эта цена может быть как положительной, так и отрицательной. Будем предполагать, что платит сторона, создающая экстерналии. В этих условиях отрицательность цены означает, что фирма получает деньги за создаваемое внешнее воздействие. Это будет иметь место в том случае, когда экстерналия оказывает положительное воздействие на другую фирму.

Заметим, что задача потребителя при введении торговли экстерналиями останется неизменной (изменится лишь величина прибыли, которую получает каждый потребитель):

$$\max_{x^k \geq 0} u^k(x^k)$$

$$px^k \leq p\omega^k + \sum_j \theta_j^k \pi_j(p, \tau).$$

В задаче каждой фирмы j изменится целевая функция, поскольку, с одной стороны, фирма будет вынуждена оплатить создаваемые ею внешние воздействия, но, с другой стороны, она получит компенсацию за воздействия, создаваемые другими фирмами. Заметим, что изменится и набор переменных, выбираемый каждый фирмой. Если ранее фирма j принимала решение лишь относительно своего выпуска y_j, то теперь эта фирма принимает решения относительно спроса на внешние воздействия, создаваемые другими фирмами и влияющие на ее производственное множество. Обозначим через y_{ir}^j спрос фирмы j на внешнее воздействие, создаваемое фирмой r при производстве товара i и влияющее на производственное множество фирмы j. Тогда задача j-го производителя примет следующий вид:

$$\max_{y_j,\, y_{-j}^j} \left(py_j - \sum_{i \notin E_j,\, r \neq j} \tau_{ijr} y_{ij} + \sum_{i \notin E_j,\, r \neq j} \tau_{ijr} y_{ir}^j \right)$$

$$F_j(y_j,\, y_{-j}^j) \leq 0.$$

Определение

Набор $\left(\tilde{p},\, \tilde{\tau},\, \tilde{x},\, (\tilde{y}_j,\, \tilde{y}_{-j}^j)_{j=1}^J\right)$ образует равновесие с торговлей экстерналиями, если выполнены следующие условия:

1) для любой фирмы j набор $(\tilde{y}_j,\, \tilde{y}_{-j}^j)$ — решение задачи производителя при ценах $\tilde{p},\, \tilde{\tau}$;

2) для любого k набор $\tilde{x}^k$ — решение задачи потребителя k при ценах $\tilde{p},\, \tilde{\tau}$;

3) уравновешены рынки обычных благ $\sum_k \tilde{x}_i^k \leq \bar{\omega}_i + \sum_j \tilde{y}_{ij}$ и для

$\tilde{p}_i \left(\sum_k \tilde{x}_i^k - \bar{\omega}_i - \sum_j \tilde{y}_{ij} \right) = 0$ всех i; рынки экстерналий: $\tilde{y}_{ir}^j = \tilde{y}_{ir}$ для всех $i \in E_r$, и для всех r, j. □

Поскольку в построенной экономике имеет место полная система рынков, то для нее будут верны как первая, так и вторая теоремы благосостояния в той форме, в какой они были нами сформулированы при рассмотрении вальрасовского равновесия.

Рекомендуемая литература

Основная

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. N.Y.: Oxford University Press, 1995. Ch. 11.

Varian H. Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 24.

Дополнительная

Gravelle H., Rees R. Microeconomics. 2nd ed. Longman, 1992. Ch. 18.

Coase R. The Problem of Social Cost // Journal of Law and Economics. 1960. 3. P. 1—44.

VII

ФИАСКО РЫНКА: АСИММЕТРИЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Лекция 28

Неэффективность распределения ресурсов при асимметричной информации. Проблема неблагоприятного отбора

Одна из предпосылок первой теоремы благосостояния состоит в наличии у экономических агентов полной симметричной информации о товарах и услугах. Нарушение этого условия может приводить к исчезновению рынков некоторых товаров, поскольку товары с разными характеристиками становятся неразличимыми для одной из сторон рынка. В результате распределение ресурсов при асимметричной информации может быть неоптимальным. С асимметричной информацией мы сталкиваемся в различных ситуациях. Приведем несколько классических примеров:

- продавец подержанного автомобиля имеет больше информации о состоянии автомобиля, нежели его потенциальный покупатель;
- заемщик, обратившийся в банк, лучше оценивает степень риска невозврата кредита, нежели банк, выдающий этот кредит;
- страхователь, покупающий медицинскую страховку, имеет больше информации о состоянии своего здоровья и соответственно о вероятности обращения за медицинской помощью, нежели страховая компания;

• автомобилист, приобретающий страховку от автогражданской ответственности, значительно лучше представляет себе, насколько осторожно он водит машину, нежели страховая компания;

• работник, нанимающийся на работу, владеет большей информацией о своих способностях, нежели фирма, его нанимающая.

Ситуации, где имеет место асимметричная информация, принято разделять на две категории: со скрытой информацией и со скрытыми действиями. Под ситуацией со *скрытой информацией* понимается ситуация, при которой одна сторона рынка располагает какой-то информацией о продаваемом на данном рынке товаре или услуге, которая не доступна другой стороне рынка.

Когда одна из сторон рынка может предпринять некое действие, влияющее на другую сторону, но ненаблюдаемое другой стороной, мы говорим о наличии *скрытых действий.*

Сначала обратимся к анализу ситуаций со скрытой информацией. Наличие скрытой информации зачастую приводит к *проблеме неблагоприятного отбора.*

Определение

Неблагоприятным отбором называют такую ситуацию со скрытой информацией, при которой происходит самоотбор информированных агентов, неблагоприятно влияющий на положение неинформированной стороны. □

Классическим примером неблагоприятного отбора является модель рынка подержанных автомобилей Акерлофа[7]. Поскольку подержанные автомобили, находящиеся в хорошем состоянии, владельцы готовы продать по более высокой цене, нежели машины в плохом состоянии, то при каждой данной цене в первую очередь на рынке появятся плохие автомобили. Потенциальные покупатели не могут различить хорошие и плохие машины и потому готовы (в случае, если

[7] См.: *Akerlof G.* The Market for Lemons: Quality and the Market Mechanism // Quarterly Journal of Economics. 1970. 89. P. 488—500 (*Акерлоф Дж.* Рынок «лимонов»: неопределенность качества и рыночный механизм // THESIS. 1994. Вып. 5. С. 91—104).

они нейтральны к риску) предложить за машину лишь цену, равную ожидаемой цене среднего автомобиля. Если данная цена оказывается достаточно низкой, то в результате на рынке продаются лишь автомобили низкого качества. Таким образом, в данном случае рынок качественных подержанных автомобилей оказался полностью разрушенным. Однако следует отметить, что асимметричная информация далеко не в каждом случае приводит к проблеме неблагоприятного отбора. Как будет показано далее на примере рынка труда, наличие скрытых характеристик не всегда порождает данную проблему.

Неблагоприятный отбор на рынке труда

Рассмотрим рынок труда, где множество одинаковых конкурентных фирм нанимают работников. Технологии фирм характеризуются постоянной отдачей от масштаба, причем труд является единственным фактором производства. Будем считать, что фирмы нейтральны к риску, и потому их целью является максимизация ожидаемой прибыли. В силу предпосылки о совершенной конкуренции фирмы принимают цены как данные. Пронормируем их, положив цену готовой продукции равной единице.

Предположим, что работники различаются по производительности. Будем считать, что есть два типа работников: высокопроизводительные и низкопроизводительные. Обозначим через v_H производительность высококвалифицированного работника (от англ. high) и через v_L — производительность низкоквалифицированного работника (от англ. low); $v_H > v_L$. Предполагается, что каждый работник, если будет нанят, работает фиксированное количество времени (например, 8-часовой рабочий день). Пусть доля высококвалифицированных работников равна λ_H, а доля низкоквалифицированных — λ_L; $\lambda_H + \lambda_L = 1$ и $0 < \lambda_L < 1$. Каждый работник может не работать вовсе, и тогда он будет иметь альтернативную полезность $\overline{u}_t$, $t = L, H$. Каждый работник максимизирует свою полезность, которая растет с ростом вознаграждения за работу (s_t). Будем предполагать, что работа не связана для работника ни с какими усилиями и, таким образом, не ведет к снижению полезности.

Начнем анализ с равновесия при симметричной информации, поскольку, как известно, в этом случае выполнены все предпосылки первой теоремы благосостояния и потому равновесное распределение будет Парето-оптимальным.

Равновесие при симметричной информации

Поскольку технология характеризуется постоянной отдачей от масштаба, то в равновесии прибыль фирмы от каждого типа работника должна быть нулевой, и соответственно мы получаем, что заработная плата работника типа t должна быть равна стоимости создаваемой им продукции: $s_t = v_t,\ \forall t = L,\ H$. Поскольку все фирмы одинаковы, то в результате, если бы работники были наняты, то мы бы имели два рынка труда: рынок высокопроизводительных работников, где установится заработная плата $s_H = v_H$, и рынок низкопроизводительных работников с заработной платой $s_L = v_L$. Вопрос в том, согласятся ли работники на данные условия. Это зависит от соотношения заработной платы, v_t, и полезности при альтернативной занятости, $\bar{u}_t$, для любого типа работников. В результате возможны разные равновесия в зависимости от соотношения v_t и $\bar{u}_t$. Если $\bar{u}_H > v_H$, то высокопроизводительные работники выберут альтернативную занятость, а если $\bar{u}_H \le v_H$, то все высокопроизводительные работники предпочтут данный вариант занятости (предполагается, что если работникам все равно работать или нет, то они будут работать). Аналогично если $\bar{u}_L > v_L$, то низкопроизводительные работники выберут альтернативную занятость, а если $\bar{u}_L \le v_L$, то все низкопроизводительные работники предпочтут работать в данной отрасли.

Равновесие при асимметричной информации

Пусть работники обоих типов имеют одинаковую альтернативную полезность: $\bar{u}_L = \bar{u}_L = \bar{u}$, причем $v_L < \bar{u} < v_H$. Возвращаясь к случаю симметричной информации, отметим, что в равновесии низкопроизводительные работники не были бы наняты, поскольку $\bar{u} < v_L$, а всем высокопроизводительным работникам, наоборот, было бы выгоднее работать в данной отрасли, так как $\bar{u} < v_H$. Таким образом, в этой ситуации эффективное распределение таково: все высокопроизводительные работники работают в данной отрасли, а низкопроизводительные — выбирают альтернативную занятость.

Перейдем к случаю асимметричной информации. Будем считать, что наниматели знают, что на рынке имеются работники обоих типов, и располагают информацией о численности каждой группы работников, но они не могут отличить высокопроизводительных работников от низкопроизводительных. Рассмотрим *равновесие с рациональными ожиданиями*, т.е. предположим, что заработная плата, предлагаемая на рынке, — это средняя заработная плата (математическое ожидание заработной платы), но не по всем работникам, а только по тем, которые согласились работать при данном уровне заработной платы (так что ожидаемая прибыль фирмы равна нулю).

Таким образом, равновесная заработная плата определяется следующим образом: $s^* = \{Ev_t \mid t : \bar{u}_t \le s^*\}$. Но эта формула имеет смысл только в том случае, если хотя бы кто-то соглашается работать. Если же никто из участников не соглашается работать, то неизвестно, какая заработная плата установится на рынке. Поэтому доопределим равновесную заработную плату для случая, когда ни одному типу работников невыгодно работать, считая, что в этом случае заработная плата будет соответствовать среднему значению по всем работникам: $s^* = Ev_t = \lambda_L v_L + \lambda_H v_H$, если $\bar{u}_t > s^*$ для всех t.

Учитывая, что в рассматриваемом примере альтернативная полезность для всех работников одинакова, возможны два варианта:

1) $s^* \ge \bar{u}$ и работники обоих типов работают;

2) $s^* < \bar{u}$ и никто не работает.

Рассмотрим каждый из этих вариантов в отдельности.

Пусть $Ev_t = \lambda_L v_L + \lambda_H v_H \ge \bar{u}$. Такая ситуация возможна, если доля высокопроизводительных работников достаточно велика, поскольку мы предполагали, что $v_L < \bar{u} < v_H$. Тогда в данной отрасли будут работать работники обоих типов, но это распределение не будет оптимальным, поскольку, как было показано выше, в оптимальном распределении должны быть заняты только высокопроизводительные работники.

Теперь обратимся ко второму варианту, когда $Ev_t < \bar{u}$. Такая ситуация возможна, если доля низкопроизводительных работников достаточно велика. В этом случае все предпочтут альтернативную занятость, но это распределение также не будет эффективным, так как в оптимуме все высокопроизводительные работники должны быть заняты в данной отрасли.

Таким образом, никакое из возможных равновесий в данной модели не будет Парето-оптимальным, т.е. на данном примере мы продемонстрировали, что наличие асимметричной информация может порождать проблему неэффективности. Причина неэффективности в том, что в силу асимметричной информации о типах работников фирма не в состоянии отличить высокопроизводительных от низкопроизводительных, и в результате два рынка становятся неразличимыми.

Теперь рассмотрим случай, когда асимметрия информации порождает не только неэффективность равновесного распределения, но и создает проблему неблагоприятного отбора.

Неблагоприятный отбор при асимметричной информации

Модифицируем рассмотренный выше пример, перейдя к случаю различной альтернативной полезности. Пусть $\bar{u}_L < \bar{u}_H$ и $\bar{u}_t < v_t$ для $t = L, H$. В этой ситуации при симметричной информации в данной отрасли будут заняты как высокопроизводительные, так и низкопроизводительные работники. Пусть доли работников каждого типа таковы, что $\bar{u}_L < Ev < \bar{u}_H$. Заметим: это означает, что $\bar{u}_L < v_L < Ev < v_H$.

Поскольку альтернативная полезность у низкоквалифицированных работников ниже, то, начиная с заработной платы, равной $\bar{u}_L$, низкоквалифицированные работники согласятся работать в данной отрасли. С высококвалифицированными работниками ситуация обстоит сложнее: их можно привлечь, лишь существенно повысив заработную плату, т.е. установив заработную плату на уровне не ниже альтернативной полезности, $s \geq \bar{u}_H$. Таким образом, при любой заработной плате, лежащей не ниже $\bar{u}_L$, в первую очередь на рынке будут появляться низкопроизводительные работники. Ситуация, когда работают только высокопроизводительные работники, невозможна.

Возможна ли ситуация, при которой в равновесии в данной отрасли будут заняты работники обоих типов? Для того чтобы это имело место, равновесная зарплата должна оказаться не ниже $\overline{u}_H$, т.е. должны выполняться условия $s^* = Ev$ и $s^* \geq \overline{u}_H$. Но эти условия несовместны, поскольку по предположению $Ev < \overline{u}_H$. Отсюда мы можем заключить, что в равновесии в данной отрасли будут работать только низкопроизводительные работники, и тогда равновесная заработная плата установится на уровне их производительности: $s^* = v_L$.

В результате рынок высокопроизводительных работников оказался полностью разрушен, т.е. в данном примере мы столкнулись с проблемой неблагоприятного отбора.

Подходы к решению проблемы неблагоприятного отбора

Поскольку, как мы видели выше, в случае скрытых характеристик равновесие может быть неоптимальным, возникает вопрос, могут ли участники сделок самостоятельно или же при помощи вмешательства государства что-то сделать для решения проблемы неэффективности. Мы рассмотрим два возможных подхода.

Один подход предполагает некие дополнительные действия, предпринимаемые информированной стороной рынка, которые служат сигналом истинного типа работников. Пример подобной модели с рыночными сигналами на рынке труда будет приведен в лекции 29.

Другой подход к решению проблемы неблагоприятного отбора связан с реакцией неинформированной стороны рынка. Этот подход называют *скринингом* (от англ. screening). В данном случае неинформированная сторона (фирма) пытается выявить тип информированной стороны (работника), предлагая разные наборы контрактов, которые привлекательны для одного типа работников и непривлекательны для другого. Примеры модели со скринингом будут рассматриваться в лекциях 30 и 31.

Оба подхода будут моделироваться в теоретико-игровых терминах. В связи с этим следует перевести на язык теории игр и приведенную выше модель с неблагоприятным отбором на рынке труда. Итак, предполагалось, что фирмы совершенно конкурентны. Теперь изменим гипотезу о поведении фирм. Будем полагать, что, нанимая работников, фирмы конкурируют по Бертрану, одновременно предлагая работникам условия найма. Заметим, что данное изменение никак не отразится на равновесии в случае симметричной информации, поскольку для симметричных технологий конкуренция по Бертрану приводит к нулевой прибыли, как и совершенная конкуренция. Заметим также, что при конкуренции по Бертрану можно ограничиться рассмотрением случая, когда в отрасли действуют лишь две фирмы, поскольку с увеличением количества фирм результирующие цены и прибыли никак не изменятся.

Лекция 29

Рыночные сигналы на рынке труда (модель Спенса)

Рассмотрим реакцию информированной стороны рынка на проблему асимметрии информации, возникающую в силу наличия скрытых характеристик. Рассмотрим, как работает система рыночных сигналов на примере рынка труда, где в качестве сигналов используется уровень образования. Идея данного подхода, принадлежащая А. Спенсу[8], состоит в следующем. Если для низкопроизводительных работников получение образования связано с большими усилиями, чем для высокопроизводительных, то фирмы могут трактовать уровень образования работника как сигнал о его типе и привязать заработную плату к уровню образования.

Описание модели

Пусть на рынке труда есть два типа работников: высокопроизводительные, их мы будем обозначать, как и ранее, индексом H, и низко-

[8] *Spence A.M.* Job Market Signaling // Quarterly Journal of Economics. 1973. 87. P. 355—374.

производительные работники, которых будем обозначать индексом L. Тогда, если через v_t обозначить производительность работника типа $t = H$, L, то мы предполагаем, что $v_H > v_L$. Пусть доля работников типа t равна λ_t, $t = H$, L, где $\lambda_H + \lambda_L = 1$.

В отличие от рассмотренной ранее модели будем считать, что, прежде чем выйти на рынок труда, работники могут получить образование и величина (качество) полученного образования является наблюдаемой величиной. Предполагается, что уровень образования — величина непрерывная, $e \geq 0$. Пусть образование непродуктивно, т.е. не влияет на производительность труда, но для работников образование связано с издержками, которые выше для низкопроизводительных работников: $c_L(e) > c_H(e)$ для всех $e > 0$ и $c_t(0) = 0$. Кроме того, получение дополнительной единицы образования влечет большие издержки для низкопроизводительного работника: $c'_L(e) > c'_H(e)$ для всех $e \geq 0$. Пусть $c_t(e)$ — дважды непрерывно дифференцируемая, возрастающая, строго выпуклая функция.

Функция полезности работника типа t имеет вид $u_t = s_t - c_t(e_t)$. Кроме того, будем считать, что альтернативная полезность работника типа t составляет $\bar{u}_t = 0$.

Пусть в экономике действуют две фирмы, конкурирующие путем одновременного предложения заработных плат (т.е. конкурирующие по Бертрану), которые обладают одинаковыми технологиями с постоянной отдачей от масштаба, используя в качестве фактора производства только труд.

Опишем *структуру игры*.

1. Сначала работники обоих типов выбирают уровень образования e_t.

2. Фирмы видят выбранные работниками уровни образования и одновременно делают предложения относительно заработной платы $s(e)$, привязывая заработную плату к уровню образования, поскольку тип работников фирмам не известен.

3. Работники выбирают между данной отраслью и альтернативной занятостью, и в случае предпочтения данной отрасли работники решают, на какой фирме работать.

Заметим, что это игра с несовершенной информацией, поскольку, формируя предложения о заработной плате, фирмы так и не знают тип работников. В качестве концепции равновесия для такой игры будем использовать совершенное байесовское равновесие. Это означает, что равновесие определяется не только набором стратегий игроков, но и соответствующей системой вер (beliefs) фирм относительно того, к какому типу принадлежит каждый работник. Обозначим эти веры через $\mu_t^j(e)$, где $\mu_t^j(e)$ — вера фирмы j в то, что работник, выбравший уровень образования e, имеет тип t: $\mu_L = Pr\{t = L|e\}$ и $\mu_H = Pr\{t = H|e\}$.

Определение

Равновесием в чистых стратегиях в модели с рыночными сигналами на рынке труда называется набор $\left(e^*,\ s(e),\ \mu(e)\right)$ такой, что:

1) для каждого типа $t = L,\ H$ уровень образования e_t^* максимизирует полезность работника типа t при данных стратегиях фирм $s(e)$ и данной системе вер $\mu(e)$: $u_t\left(s(e_t^*), e_t^*\right) \geq u_t\left(s(e'), e'\right)\ \forall e'$;

2) системы вер фирм удовлетворяют следующим условиям:

- $\mu_t^j(e) \in [0,\ 1]$ для всех $e \geq 0$,

- $\mu_t^1(e) = \mu_t^2(e)$ для любого t, т.е. после того как фирмы увидели уровень образования e, они имеют одинаковые веры относительно типа работника,

- для равновесных уровней образования веры определяются по правилу Байеса:

$$\text{если } e_L^* \neq e_H^*, \text{ то } \mu_L^j(e_L^*) = 1,\ \mu_H^j(e_L^*) = 0;$$

$$\text{если } e_L^* = e_H^* = e^*, \text{ то } \mu_t^j(e^*) = \lambda_t;$$

3) стратегии фирм $\left\{s^j(e)\right\}$, $i = 1,\ 2$ являются равновесием по Нэшу в одновременной игре фирм, где вероятность того, что работник относится к типу t, равна $\mu_t(e)$. □

В данной игре можно выделить следующие типы равновесий:

разделяющие равновесия, при которых работники каждого типы выбирают свой уровень образования, $e_L^* \neq e_H^*$;

объединяющие равновесия, при которых работники разного типа выбирают один и тот же уровень образования $e_L^* = e_H^*$;

гибридные равновесия, которые, в отличие от вышерассмотренных равновесий, являются равновесиями в смешанных стратегиях и представляют собой смесь первого и второго типа равновесий.

Прежде чем приступить к анализу вышеуказанных равновесий, обратимся к анализу модели в случае симметричной информации.

Равновесие при симметричной информации

При симметричной информации фирмы точно знают тип работников и потому предлагают каждому типу свою заработную плату. Поскольку тип работника известен, то заработная плата напрямую зависит от типа и не зависит от уровня образования. Ценовая конкуренция между фирмами приведет к тому, что обе фирмы будут предлагать каждому типу работников одинаковую заработную плату, соответствующую их производительности. Действительно, если одна из фирм отклонится и предложит работникам типа t заработную плату $\tilde{s}_t$, отличную от v_t, то возможны два варианта. В случае, если $\tilde{s}_t < v_t$, все работники пойдут к фирме-конкуренту, а если $\tilde{s}_t > v_t$, то все работники типа t предпочтут работать на данной фирме, но при зарплате выше производительности фирма понесет убытки. Таким образом, как мы видим, ни у одной из фирм нет стимула отклоняться от зарплаты, равной производительности. Более того, любое другое сочетание заработных плат не является равновесием.

Работники, в свою очередь, выбирают уровень усилий e, который максимизирует их полезность $u_t(s,\ e) = s - c_t(e)$. Учитывая, что заработная плата не зависит от e, максимальная полезность для работника каждого типа соответствует нулевому уровню образования.

Итак, в случае симметричной информации в равновесии имеем $e_t^* = 0$, а $s_t(e) = v_t$ для любого $e \geq 0$, где $t = L,\ H$, как показано на рис. 29.1.

Заметим, что кривые безразличия потребителей в осях $(e,\ s)$ являются графиками возрастающих выпуклых функций (в силу соответствующих свойств издержек от получения образования):

$s = c_t(e_t) + u_t$. Заметим, что кривые безразличия работников разного типа пересекаются не более одного раза, в силу того что наклон кривой безразличия работника типа t равен $\left.\frac{ds}{de}\right|_{u=const} = \frac{dc_t(e)}{de}$, а по предположению модели $c'_H(e) < c'_L(e)$ для всех $e \geq 0$. Это свойство играет ключевую роль в модели Спенса и носит название *свойства единственности пересечения* (single crossing property).

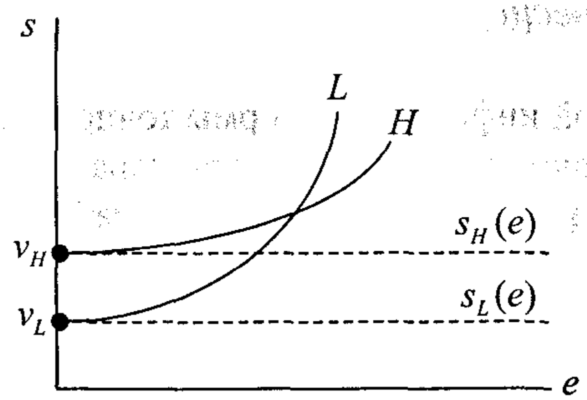


Рис. 29.1. Равновесие в модели Спенса в случае симметричной информации

Равновесие при асимметричной информации

Утверждение 29.1. Равновесные схемы заработной платы. В модели Спенса равновесные схемы заработной платы имеют вид $s(e) = \mu_H(e)v_H + \mu_L(e)v_L$ для любого $e \geq 0$.

Доказательство

Если образование не влияет на производительность, то ожидаемая производительность работника с уровнем образования e равна $\mu_H(e)v_H + \mu_L(e)v_L$.

В силу конкуренции по Бертрану в равновесии фирмы будут предлагать одинаковые схемы заработной платы такие, что $s(e) = \mu_H(e)v_H + \mu_L(e)v_L$. Действительно, ни одной из фирм невыгодно отклоняться от данной заработной платы, поскольку при более высокой заработной плате ожидаемая прибыль будет отрицательна, а при более низкой — работники уйдут к конкуренту. ■

Итак, рассмотрим отдельно разделяющие равновесия, где работники разных типов выбирают разные уровни образования, и объединяющие равновесия, где все работники выбирают один и тот же уровень образования.

Разделяющие равновесия

Пусть e_t^* — уровень образования, выбираемый в разделяющем равновесии работником типа t.

Утверждение 29.2. Заработная плата в разделяющем равновесии.

В разделяющем равновесии модели Спенса, если работник выбрал уровень образования e_t^*, он получит заработную плату, равную производительности работника типа t: $s(e_t^*) = v_t$.

Доказательство

Если работник выбрал уровень образования e_t^*, то в соответствии с правилом Байеса фирмы будут полагать, что этот работник и есть работник типа t и соответственно $\mu_t(e_t^*) = 1$. Поскольку, как было показано выше, для любого уровня образования $s(e) = \mu_H(e)v_H + \mu_L(e)v_L$, то $s(e_t^*) = v_t$. ■

Утверждение 29.3. Уровень образования низкопроизводительных работников в разделяющем равновесии.

В любом разделяющем равновесии в модели Спенса низкопроизводительные работники будут выбирать такой же уровень образования, как и при симметричной информации, т.е. $e_L^* = 0$.

Доказательство

Предположим, что это не так и низкопроизводительные работники выбирают уровень образования $e_L^* > 0$. Согласно утверждению 29.2 работники каждого типа в равновесии получают заработную плату, равную своей производительности, т.е. $s(e_L^*) = v_L$. Однако низкопроизводительный работник мог бы получать не меньшую заработную плату, выбрав нулевой уровень образования, поскольку для любого $e \geq 0$ имеем $s(e) = \mu_H(e)v_H + \mu_L(e)v_L$, а следовательно, $v_L \leq s(e) \leq v_H$. Итак, низкопроизводительный работник сочтет выгодным отклониться, выбрав вместо $e_L^* > 0$ нулевой уровень образования, поскольку его заработная плата при этом не упадет, а издержки, связанные с получением образования, снизятся, что приведет к росту полезности. Таким образом, в равновесии $e_L^* = 0$. ■

Утверждение 29.4. Уровень образования высокопроизводительных работников в разделяющем равновесии.

В разделяющем равновесии в модели Спенса равновесные уровни образования для высокопроизводительных работников могут лежать только на отрезке $e_H^* \in [\underline{e}, \overline{e}]$, где $\underline{e}$ и $\overline{e}$ определяются из условий $u_L(v_L, 0) = u_L(v_H, \underline{e})$ и $u_H(v_L, 0) = u_H(v_H, \overline{e})$ соответственно.

Доказательство

Покажем, что уровни образования $e_H^* < \underline{e}$ не могут быть равновесными. Если бы $e_H^* < \underline{e}$ соответствовал равновесному уровню образования для высокопроизводительных работников, то согласно утверждению 29.2 $s(e_H^*) = v_H$. В этом случае низкопроизводительный работник также предпочел бы эту точку, поскольку $u_L(v_L, 0) = u_L(v_H, \underline{e}) < u_L(v_H, e_H^*)$ в силу убывания полезности по уровню образования. Это означает, что работники разных типов выбрали бы одинаковый уровень образования, что противоречит концепции разделяющего равновесия.

Аналогично убедимся, что e_H^* не может лежать правее $\overline{e}$. Предположим противное: пусть $e_H^* > \overline{e}$. Тогда согласно утверждению 29.2 имеем $s(e_H^*) = v_H$. В таком случае высокопроизводительный работник предпочел бы ту точку, где находится низкопроизводительный, поскольку $u_H(v_L, 0) = u_H(v_H, \overline{e}) > u_H(v_H, e_H^*)$ для $e_H^* > \overline{e}$. ■

Учитывая, что правило Байеса определяет веры лишь для тех уровней образования, которые выбираются в равновесии, для остальных уровней образования веры можно определить произвольно и, таким образом, получить в равновесии любой уровень образования высокопроизводительных работников на отрезке $e_H^* \in [\underline{e}, \overline{e}]$. К примеру, рассмотрим следующие системы вер:

$$\mu_H(e) = \begin{cases} 0, & e < e_H^* \\ 1, & e \geq e_H^* \end{cases}$$

и

$$\mu_L(e) = 1 - \mu_H(e) = \begin{cases} 1, & e < e_H^* \\ 0, & e \geq e_H^* \end{cases}.$$

Тогда схема заработной платы в равновесии задается как:

$$s^*(e) = \begin{cases} v_L, & e < e_H^* \\ v_H, & e \geq e_H^* \end{cases}.$$

В результате набор стратегий

$$\left(e_L^* = 0,\ e_H^* \in [\underline{e}, \overline{e}],\ s^*(e) = \begin{cases} v_L, & e < e_H^* \\ v_H, & e \geq e_H^* \end{cases} \right)$$ и система вер

$$\mu_H(e) = \begin{cases} 0, & e < e_H^* \\ 1, & e \geq e_H^* \end{cases}$$ образуют разделяющее совершенное байесовское равновесие в модели Спенса с непроизводительным образованием.

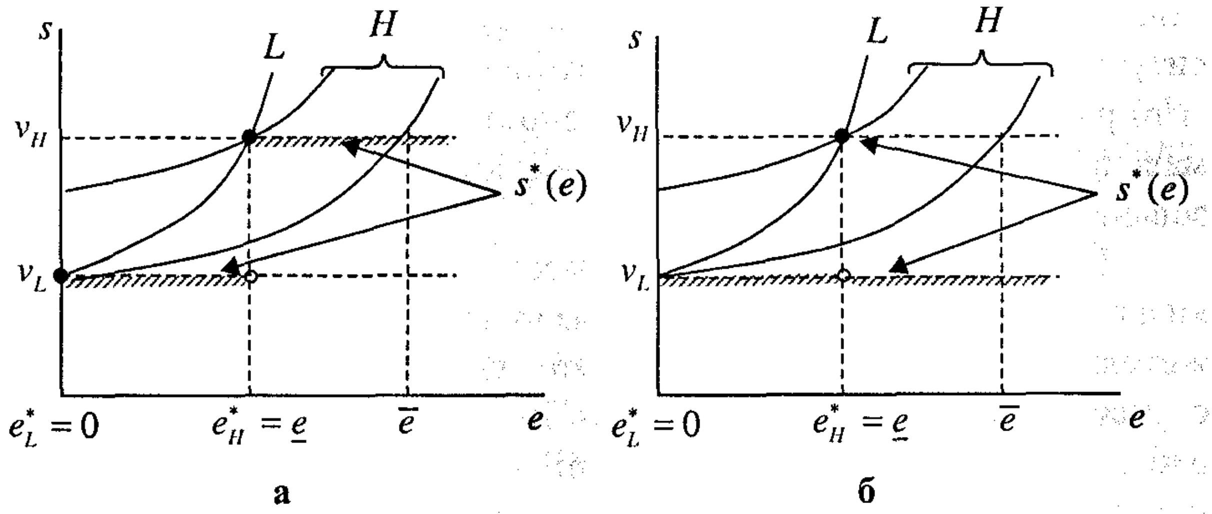


Рис. 29.2. Примеры разделяющего равновесия в модели Спенса с одинаковыми равновесными уровнями образования, но разными системами вер

Заметим, что работникам действительно выгодно работать на данных фирмах, поскольку полезность каждого работника при этом выше альтернативной, так как мы предполагаем, что альтернативная полезность равна нулю.

Следует также отметить, что разделяющее совершенное байесовское равновесие не единственно как в терминах уровня образования для высокопроизводительных работников, так и в терминах соответствующих вер, поскольку веры вне равновесия определяются произвольно. Примеры разделяющего равновесия изображены на рис. 29.2.

Разделяющие равновесия и благосостояние

Сравним разделяющее равновесие в модели с рыночными сигналами с равновесием без сигналов. Поскольку мы предполагали, что альтернативная полезность равна нулю, то в равновесии без сигналов все работники будут работать в данной отрасли и равновесная заработная плата будет равна ожидаемой производительности, которую обозначим через $E[v] = v_L\lambda_L + v_H\lambda_H$. Итак, низкопроизводительные работники проигрывают от рыночных сигналов, поскольку без сигналов они получали бы более высокую заработную плату при таком же (нулевом) уровне образования (см. рис. 29.3). Более того, возможна такая ситуация, при которой даже в наилучшем разделяющем равновесии (том равновесии, при котором полезность работников типа H максимальна) высокопроизводительные работники проигрывают от использования сигналов (рис. 29.3а).

Возникает вопрос: зачем же высокопроизводительные работники в таком случае пытаются сигнализировать свой тип, выбирая положительный уровень образования? Это связано с тем, что в противном случае фирмы будут рассматривать их как низкопроизводительных работников и предлагать им заработную плату $s = v_L$, что снижает их полезность. В целом чем больше доля высокопроизводительных работников λ_H, тем ближе ожидаемая производительность $E[v]$ к v_H и тем больше вероятность проигрыша высокопроизводительных работников от рыночных сигналов.

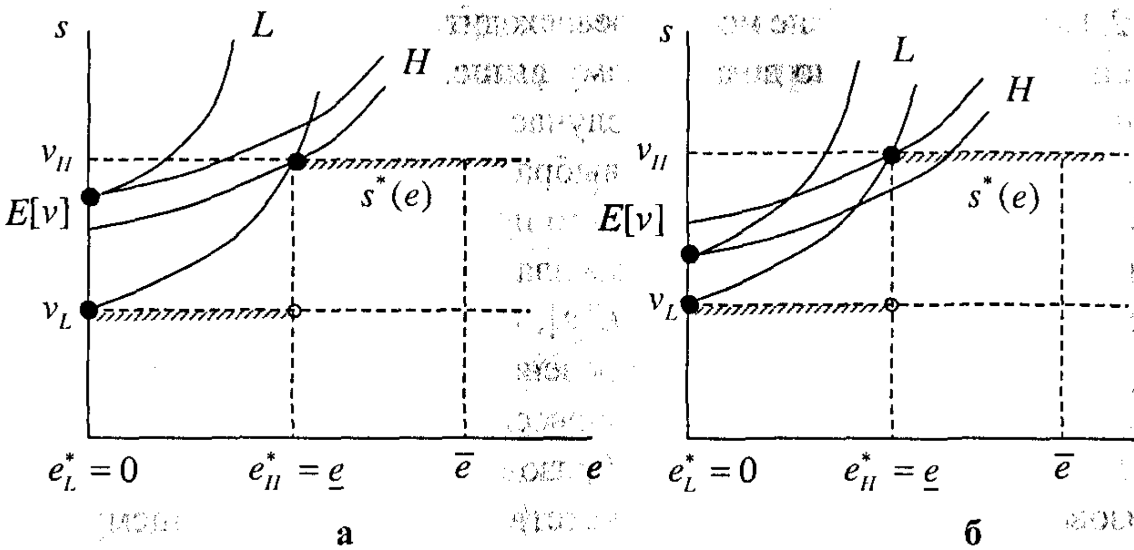


Рис. 29.3. Сравнение благосостояния работников в наилучшем разделяющем равновесии в модели Спенса с благосостоянием при отсутствии рыночных сигналов

Объединяющие равновесия

Утверждение 29.4. Характеристики объединяющего равновесия.

1. Если e^* — равновесный уровень образования в объединяющем равновесии модели Спенса, то $s(e^*) = \lambda_L v_L + \lambda_H v_H$.

2. Равновесный уровень образования, соответствующий объединяющему равновесию модели Спенса, может принимать значения $e^* \in [0, \hat{e}]$, где $\hat{e}$ определяется из условия $u_L(v_L, 0) = u_L(E[v], \hat{e})$.

Доказательство

1. В объединяющем равновесии работники обоих типов выбирают один и тот же уровень образования e^*, а значит, согласно правилу Байеса веры фирм соответствуют долям работников каждого типа:

$$\mu_L(e^*) = \lambda_L;$$

$$\mu_H(e^*) = \lambda_H = 1 - \lambda_L.$$

Следовательно, согласно утверждению 29.1 соответствующая заработная плата будет равна ожидаемой производительности: $s(e^*) = \lambda_L v_L + \lambda_H v_H$.

2. Покажем, что e^* не может превосходить $\hat{e}$. Предположим, что это не так и $e^* > \hat{e}$. Согласно доказанному выше, в любом объединяющем равновесии $s(e^*) = E[v]$. В таком случае низкопроизводительный работник предпочел бы отклониться, выбрав, к примеру, нулевой уровень образования. Это обусловлено тем, что при любом уровне образования (в том числе и при нулевом) заработная плата не может быть ниже, чем v_L, и соответственно мы имеем $u_L(E[v],\ e^*) < u_L(E[v],\ \hat{e}) = u_L(v_L,\ 0) \leq$ $\leq u_L\left(s(e=0),\ 0\right)$. Таким образом, уровень образования $e^* > \hat{e}$ не может соответствовать объединяющему равновесию. ■

Покажем, что любой уровень образования от нулевого до $\hat{e}$ можно реализовать как равновесный, соответствующий объединяющему равновесию модели Спенса при некоторой системе вер. Напомним, что веры для всех $e \neq e^*$ мы можем доопределить произвольно. Итак, специфицируем веры следующим образом:

$$\mu_H(e) = \begin{cases} 0, & e < e^* \\ \lambda_H, & e \geq e^* \end{cases};$$

$$\mu_L(e) = 1 - \mu_L(e) = \begin{cases} 1, & e < e^* \\ \lambda_L, & e \geq e^* \end{cases}.$$

Тогда (согласно утверждению 29.1) получаем следующую схему заработной платы:

$$s^*(e) = \begin{cases} v_L, & e < e^* \\ E[v] = \lambda_L v_L + \lambda_H v_H, & e \geq e^* \end{cases}.$$

Результирующее объединяющее равновесие изображено на рис. 29.4. Как мы видим, при такой спецификации вер (и соответствующей схеме заработной платы) работники обоих типов максимизируют свою полезность в точке $(e^*,\ E[v])$. Напомним, что работникам выгодно работать при данных условиях, поскольку альтернативная полезность для каждого типа предполагается нулевой.

Заметим, что тот же уровень равновесного образования можно получить и при иной системе вер. Таким образом, имеет место множественность объединяющих совершенных байесовских равновесий как в терминах уровня образования, так и в терминах соответствующих вер, поскольку веры вне равновесия определяются произвольно.

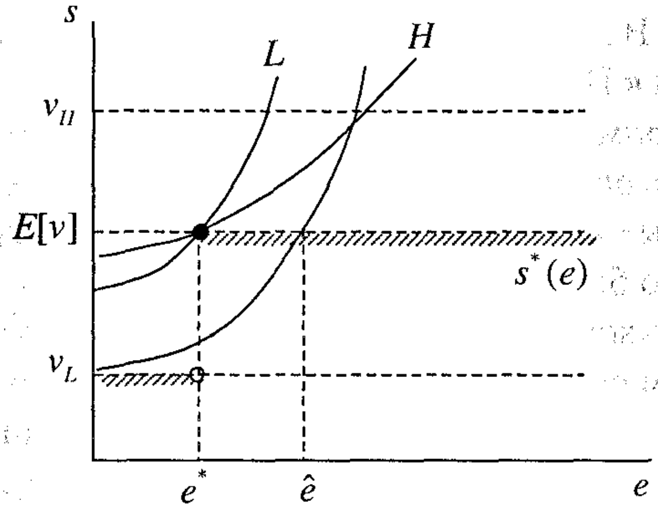


Рис. 29.4. Объединяющее равновесие в модели Спенса

Равновесия в модели Спенса и оптимальность

Рассмотрим разделяющие равновесия. Заметим, что благосостояние низкопроизводительных работников в любом разделяющем равновесии остается неизмененным, а ожидаемая прибыль фирм в любом равновесии равна нулю. Следовательно, совокупный излишек будет максимальным в том равновесии, которое соответствует наибольшему значению полезности высокопроизводительного работника. Таким равновесием будет ситуация, где работники типа H получают минимальный уровень образования $\underline{e}$. В дальнейшем это равновесие будем называть наилучшим разделяющим равновесием.

Заметим, что даже в наилучшем разделяющем равновесии высокопроизводительные работники слишком много инвестируют в образование по сравнению с оптимальным уровнем (оптимальный уровень образования равен нулю, поскольку образование в рассматриваемой модели непроизводительно). Возможно ли улучшить ситуацию с помощью государства, если государство обладает той же информацией, что и фирмы?

Одна из возможностей улучшения кроется в запрещении использования сигналов. Как было показано выше, в некоторых случаях не только низкопроизводительные, но и высокопроизводительные работники при равновесии с рыночными сигналами оказываются в худшем положении, нежели без сигналов (такой пример изображен на рис. 29.3а). В этом случае простой запрет на использование сигналов привел бы к Парето-улучшению.

Рассмотрим обратную ситуацию, когда запрет на использование сигналов невыгоден высокопроизводительным работникам. Покажем, что в некоторых случаях и в этой ситуации государственное вмешательство могло бы привести к улучшению по Парето.

Проанализируем последствия перекрестного субсидирования, а именно введем субсидии в размере τ_L для каждого низкопроизводительного работника и одновременно обяжем каждого высокопроизводительного работника заплатить налог τ_H. В результате субсидирования благосостояние работников типа L растет, и они переходят на более высокую кривую безразличия, как показано на рис. 29.5. Это позволит предложить работникам типа H более низкий уровень образования в комбинации с более низкой заработной платой (снижение заработной платы будет в точности равно вводимому налогу). Условия оплаты труда высокопроизводительных работников не должны быть привлекательны для участников типа L, а потому выберем такую величину налога, при которой работники типа L незаинтересованы в выборе контракта, предназначенного для работников типа H.

Для того чтобы работники типа H не проиграли от этих изменений, контракт не должен лежать левее точки (s', e'). Таким образом, максимальный налог, который можно получить при данном уровне субсидирования, составляет $\tau_H^{\max} = v_H - s'$, где (s', e') определяется из условий $u_L(v_L + \tau_L,\ 0) = u_L(s',\ e')$ и $u_H(v_H, e_H^*) = u_H(s', e')$, как показано на рис. 29.5. Весь вопрос в том, будет ли предложенная схема перекрестного субсидирования нейтральной к бюджету, т.е. существует ли такая ставка субсидирования τ_L, что $\tau_H^{\max}\lambda_H - \tau_L\lambda_L \geq 0$. Очевидно, что возможность осуществления такого нейтрального к бюджету перекрестного субсидирования зависит от численности работников: если низкопроизводительных работников не слишком много (λ_L относительно мало), то, вероятно, эта схема будет работать. Однако следует учитывать тот факт, что рассматривается ситуация, когда запрещение сигналов не ведет к Парето-улучшению, а это означает, что ожидаемая производительность не слишком велика, т.е. доля низкопроизводительных работников не может быть очень мала.

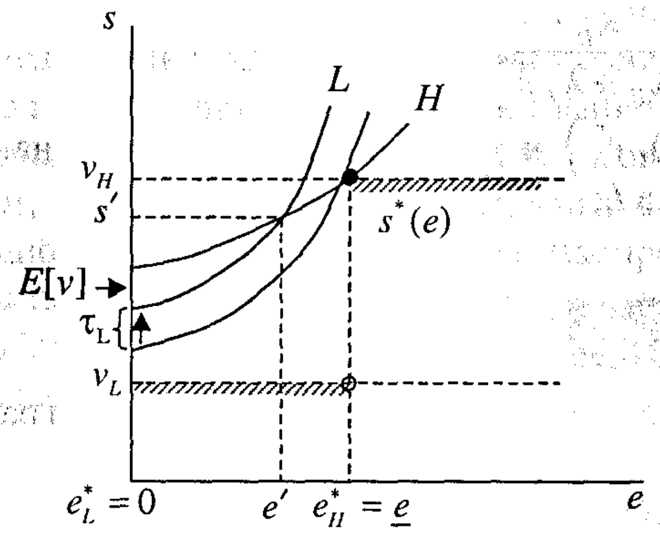


Рис. 29.5. Использование перекрестного субсидирования для достижения Парето-улучшения в наилучшем разделяющем равновесии модели Спенса

Гибридные равновесия

Рассмотрев равновесия в чистых стратегиях, обратимся к ситуации, когда хотя бы один из двух рассматриваемых типов работников рандомизирует между двумя уровнями образования, выбирая то отличный от другого типа уровень образования, то совпадающий с ним. Таким образом, данная линия поведения включает в себя как разделяющую, так и смешанную стратегию.

Рассмотрим случай, когда высокопроизводительный работник выбирает один уровень образования с определенностью, а низкопроизводительный работник использует смешанную стратегию, выбирая тот же уровень образования, что и работник типа H с вероятностью p и отличный уровень образования с вероятностью $1 - p$.

Утверждение 29.5. Характеристики гибридного равновесия.

Пусть в гибридном равновесии модели Спенса высокопроизводительный работник выбирает уровень образования e_H^*, а низкопроизводительный работник рандомизирует, выбирая e_H^* с вероятностью p и e_L^* с вероятностью $1-p$. Тогда:

1) $s(e_L^*)=v_L$ и $s(e_H^*)=v_H\mu_H(e_H^*)+v_L\left(1-\mu_H(e_H^*)\right)$,

где $\mu_H(e_H^*)=\dfrac{\lambda_H}{\lambda_H+\lambda_L p}$;

2) $\left(s(e_H^*),\ e_H^*\right)$ и $\left(s(e_L^*),\ e_L^*\right)$ приносят одинаковую полезность участнику типа L;

3) $e_L^*=0$.

Доказательство

1. Поскольку в рассматриваемом гибридном равновесии уровень образования e_L^* выбирают только работники типа L, то согласно правилу Байеса, если работник выберет уровень образования e_L^*, фирмы будут считать, что это низкопроизводительный работник, т.е. $\mu_L(e_L^*)=\lambda_L$. Это означает, что в соответствии с утверждением 29.1 такому работнику будет предложена зарплата, равная производительности низкоквалифицированного работника $s(e_L^*)=v_L$.

Аналогично, если работник выбирает уровень образования e_H^*, в соответствии с правилом Байеса фирмы будут полагать, что это работник типа H с вероятностью

$$\mu_H(e_H^*)\equiv P\left(t=H\,\middle|\,e=e_H^*\right)=\frac{P(t=H,\ e=e_H^*)}{P(e=e_H^*)}=$$

$$=\frac{P(t=H,\ e=e_H^*)}{P(e_H^*/H)P(H)+P(e_H^*/L)P(L)}=\frac{\lambda_H}{\lambda_H+\lambda_L p}.$$

Заметим, что $\mu_H(e_H^*)=\dfrac{\lambda_H}{\lambda_H+\lambda_L p}>\lambda_H$, поскольку

$\lambda_H+\lambda_L p<\lambda_H+\lambda_L=1$. В результате каждый работник, выбравший образование e_H^*, получит заработную плату, равную $s(e_H^*)=v_H\mu_H(e_H^*)+v_L\left(1-\mu_H(e_H^*)\right)$, причем $s(e_H^*)>E[v]$, так как $\mu_H(e_H^*)>\lambda_H$.

2. Для того, чтобы низкопроизводительный работник смешивал e_L^* и e_H^* с положительными весами, соответствующие точки $\left(s(e_H^*),\ e_H^*\right)$ и $\left(s(e_L^*),\ e_L^*\right)$ должны лежать на одной кривой безразличия, поскольку в противном случае условие максимизации полезности будет выполнено лишь в одной из этих точек и соответственно работник переключится на чистую стратегию, выбирая приносящий максимальную полезность уровень образования с определенностью.

3. Покажем, что $e_L^* = 0$. Предположим, что это не так и $e_L^* > 0$. Как было показано выше, $s(e_L^*) = v_L$. Однако низкопроизводительный работник мог бы получать неменьшую заработную плату, выбрав нулевой уровень образования, поскольку для любого $e \geq 0$ зарплата соответствует ожидаемой производительности $s(e) = \mu_H(e)v_H + \mu_L(e)v_L$, а потому варьируется в пределах от v_L до v_H. В результате, выбрав нулевой уровень образования, работник получит не меньшую зарплату, но в силу снижения издержек от приобретения образования его полезность возрастет. Таким образом, в равновесии $e_L^* = 0$. ■

Итак, согласно вышеперечисленным условиям (в отличие от разделяющего и объединяющего равновесий) в гибридном равновесии каждому уровню p соответствует единственный набор равновесных уровней образования $(e_L^*,\ e_H^*)$, причем $e_L^* = 0$, а e_H^* является функцией от p. Однако равновесие все равно неединственно в терминах вер, поскольку вне равновесных уровней образования мы можем определять эти веры различным образом. Их можно определить, например, так:

$$\mu_H(e) = \begin{cases} 0, & e < e_H^* \\ \alpha, & e \geq e_H^* \end{cases} \qquad \alpha \equiv \frac{\lambda_H}{\lambda_H + \lambda_L P},$$

и соответственно

$$s^*(e) = \begin{cases} v_L, & e < e_H^* \\ \alpha v_H + (1-\alpha)v_L, & e \geq e_H^* \end{cases}.$$

Результирующее гибридное равновесие изображено на рис. 29.6.

Заметим, что рассмотренные выше разделяющее и объединяющее равновесия мы можем получить как частные случаи гибридного равновесия: при $p \to 0$ получим наилучшее разделяющее, а при $p \to 1$ получим объединяющее равновесие.

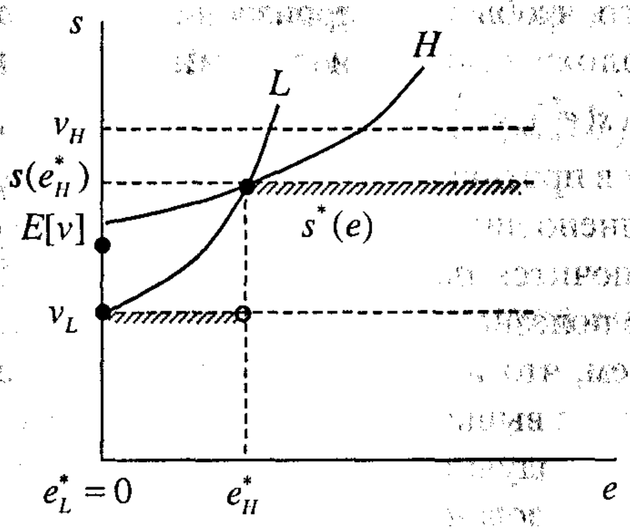


Рис. 29.6. Гибридное равновесие в случае, когда рандомизирует низкопроизводительный участник

Аналогичным образом можно рассмотреть и гибридное равновесие, в котором участник типа L выбирает уровень образования с определенностью, а участник типа H использует смешанную стратегию. Этот случай предлагается проанализировать самостоятельно.

Лекция 30

Скрининг: случай конкуренции

Рассмотрев реакцию информированной стороны рынка на проблему асимметричной информации, перейдем к анализу возможных действий, предпринимаемых неинформированной стороной. Идея этого подхода состоит в том, что фирмы предлагают работникам меню контрактов, построенное таким образом, чтобы для каждого работника свой контракт был привлекательнее чужих. Будем по-прежнему придерживаться гипотезы, что в отрасли действуют две конкурирующие фирмы.

Построим модель со скринингом на рынке труда, внеся изменения в последовательность игры, представленной в предыдущей лекции. Итак, неинформированная сторона предпринимает определенные шаги, чтобы различить высокопроизводительных работников (с производительностью v_H) и низкопроизводительных работников (с производительностью $v_L < v_H$). Доля работников типа H равна λ_H, а доля работников типа L равна λ_L; $\lambda_H + \lambda_L = 1$ и $0 < \lambda_L < 1$. Каждый работник знает свою производительность, но фирмы владеют лишь информацией о характеристиках каждой группы работников и о численности групп.

Как и ранее, будем считать, что образование непродуктивно, но связано с издержками для потребителей. Работник типа t максимизирует свою полезность: $u_t(s,\ e) = s - c_t(e)$, где s — заработная плата, а $c_t(e)$ — издержки, связанные с получением образования e, причем $c_t(e)$ — возрастающая строго выпуклая функция. В данной модели мы можем трактовать образование, к примеру, как некий тренинг или курсы, которые требуют интенсивных занятий, но содержание занятий никак не связано со сферой деятельности рассматриваемых работников, а потому не влияет на их квалификацию. Пусть $c_t(0) = 0$, $c_H(e) < c_L(e)$ для всех $e > 0$, и $c'_H(e) < c'_L(e)$ для всех $e \geq 0$, т.е. имеет место условие единственности точки пересечения кривых безразличия работников двух типов.

В отличие от модели Спенса в данной модели образование более не выступает как сигнал, а, напротив, является условием получения данной заработной платы, так как наряду с ней образование входит в контракты, которые фирмы предлагают работникам. Итак, рассмотрим следующую модификацию игры.

1. Сначала две фирмы одновременно объявляют меню контрактов, где каждый контракт представлен парой $(s,\ e)$. Меню может содержать любое конечное число контрактов.

2. Затем работники решают, соглашаться ли на какой-либо из предложенных контрактов, и если да, то выбирают наилучший контракт согласно своим предпочтениям, т.е. их стратегии состоят в том, чтобы из данного меню контрактов выбрать наилучший или отказаться от всех.

В данном случае мы имеем игру с совершенной информацией, и в качестве решения будем использовать концепцию равновесия по Нэшу, совершенного в подыграх.

Поскольку мы рассматриваем модель с двумя типами работников, фирмам нет смысла включать в меню более двух контрактов. Для того чтобы определить равновесие, введем обозначения для стратегий работников. Пусть σ_t — стратегии работников типа t, причем σ_t включает в себя реакцию на каждый контракт для каждой фирмы. Так, если у нас имеются две фирмы $j = 1,\ 2$ и каждая предлагает по два контракта (где каждый контракт разработан под определенный тип работников, т.е. $t = H,\ L$), то каждая стратегия состоит из четырех потенциальных действий (действие — это принятие или непринятие контракта): $\sigma_t = (\delta_H^1,\ \delta_L^1,\ \delta_H^2,\ \delta_L^2)$, где δ_t^j — реакция на контракт, разработанный фирмой j для участника типа t. Пусть в случае принятия контракта δ_t^j принимает значение, равное единице и в противном случае — нулю, тогда $\delta_t^j = (0,\ 1)$ и причем $\sum\limits_{t,j} \delta_t^j \le 1$, поскольку работник может принять не более одного контракта (он может отвергнуть все, выбрав альтернативную занятость).

$\boxed{\text{Определение}}$

Равновесием в чистых стратегиях в модели со скринингом на рынке труда называется набор стратегий фирм $\left((s_L^*,\ e_L^*),\ (s_L^*,\ e_L^*)\right)$ и набор стратегий работников $\left(\sigma_L^*,\ \sigma_H^*\right)$ такие, что:

1) для каждого работника типа t стратегия σ_t^* приносит максимальную полезность при данном меню контрактов $\left((s_L^*,\ e_L^*),\ (s_L^*,\ e_L^*)\right)$;

2) набор стратегий фирм $\left((s_L^*,\ e_L^*),\ (s_L^*,\ e_L^*)\right)$ является равновесием по Нэшу в одновременной игре фирм, т.е. для каждой фирмы j набор контрактов $\left((s_L^{j*},\ e_L^{j*}),\ (s_L^{j*},\ e_L^{j*})\right)$ приносит максимальную прибыль, если конкурирующая фирма i предлагает набор контрактов $\left((s_L^{i*},\ e_L^{i*}),\ (s_L^{i*},\ e_L^{i*})\right)$ и стратегии работников представлены набором $(\sigma_L^*,\ \sigma_H^*)$. □

Равновесие при симметричной информации

Прежде чем приступить к анализу равновесий при ненаблюдаемости типов работников, рассмотрим в качестве отправной точки равновесие в случае симметричной информации.

Утверждение 30.1. Характеристики равновесия при симметричной информации.

В модели со скринингом на рынке труда в равновесии при симметричной информации фирмы будут предлагать одинаковые контракты с нулевым уровнем образования и заработной платой, соответствующей производительности работника, т.е. $(s_t^*)_j = v_t$ и $(e_t^*)_j = 0$ для любого типа t и любой фирмы j.

Доказательство

Действительно, как известно, в силу конкуренции по Бертрану при одинаковых издержках при каждом данном значении e фирмы будут назначать одинаковые заработные платы, равные производительности соответствующего работника, т.е. $(s_t^*)_j = v_t$ для любого j.

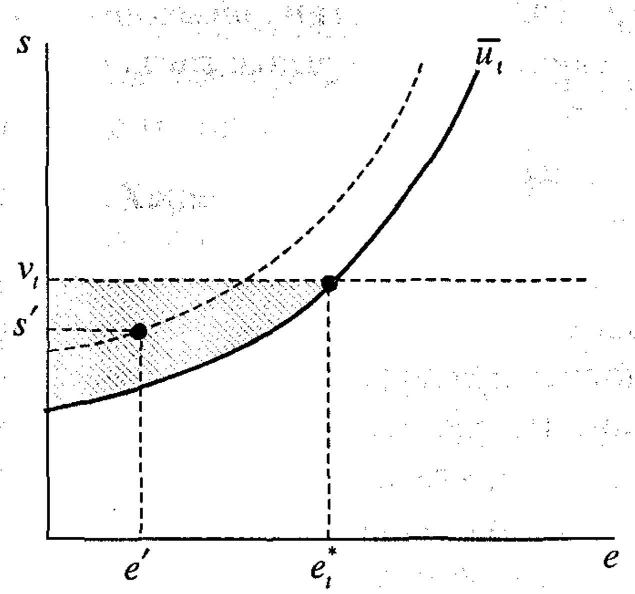


Рис. 30.1. Прибыльное отклонение в случае предложения контракта с положительным уровнем образования при симметричной информации

Покажем, что уровень образования в равновесных контрактах должен быть равен нулю. Предположим, что это не так и одна из фирм в равновесии предлагает контракт $(v_t,\ e_t^*)$, где $e_t^* > 0$. Тогда другая фирма переманит работников этого типа, предложив им контракт $(s',\ e')$ с меньшей зарплатой, но и с меньшим уровнем образования (из заштрихованной на рис. 30.1 области). Такой контракт более привлекателен для работников типа t, и кроме того, он принесет предложившей его фирме положительную прибыль.

Таким образом, единственный контракт, при котором ни у одной из фирм нет стимула отклониться, — это контракт вида $(v_t,\ e_t^* = 0)$, и все работники согласятся на такие контракты, поскольку предполагается, что альтернативная полезность равна нулю. ■

Равновесие при асимметричной информации

При асимметричной информации рассмотрим отдельно равновесия двух видов: объединяющее, при котором работники обоих типов получают одинаковые контракты, и разделяющее, при котором работники разных типов выбирают разные контракты.

Утверждение 30.2. Отсутствие объединяющего равновесия. В модели со скринингом на рынке труда не существует объединяющего равновесия.

Доказательство

Заметим, что, если бы объединяющее равновесие существовало, то равновесный контракт $(s^*,\ e^*)$ в силу конкуренции по Бертрану должен был приносить нулевую ожидаемую прибыль, т.е. $s^* = E[v]$.

Предположим, что фирмы предложили контракт $(s^* = E[v],\ e^*)$ (см. рис. 30.2). Покажем, что эта ситуация не является равновесием. Действительно, если одна из фирм включит в свое меню контракт $(s',\ e')$ из заштрихованной области, то она привлечет всех работников типа H, но не привлечет работников типа L и, поскольку $s' < v_H$, получит положительную прибыль, в то время как при исходном меню прибыль каждой из фирм была равна нулю. Таким образом, у каждой из фирм есть стимул отклониться от $(s^* = E[v],\ e^*)$, и, следовательно, этот контракт не может являться разделяющим равновесием. Поскольку такое прибыльное отклонение существует при любом неотрицательном уровне образования (в силу разных наклонов кривых безразличия), то объединяющего равновесия не существует. ■

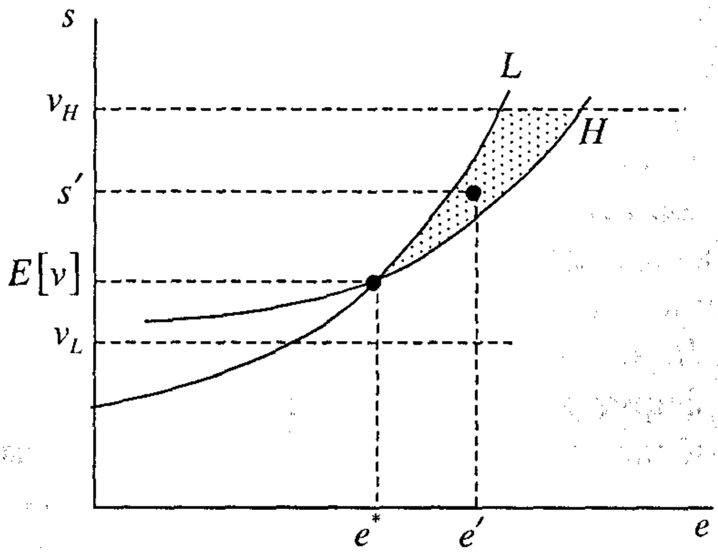


Рис. 30.2. Отсутствие объединяющего равновесия в модели скрининга

Теперь обратимся к анализу разделяющего равновесия. Напомним, что в этом случае работники разных типов выбирают разные контракты. Обозначим эти контракты через $(s_H^*,\ e_H^*)$ и $(s_L^*,\ e_L^*)$.

Утверждение 30.3. Характеристики разделяющего равновесия.

Если $(s_H^*,\ e_H^*)$ и $(s_L^*,\ e_L^*)$ — контракты, соответствующие разделяющему равновесию в модели со скринингом на рынке труда, то

1) оба контракта должны давать нулевую прибыль: $s_H^* = v_H$; $s_L^* = v_L$;

2) $e_L^* = 0$, а e_H^* определяется из условия $u_L(v_H,\ e_H^*) = u_L(v_L,\ 0)$, т.е. ограничение самоотбора для участников типа L должно выполняться как равенство.

Доказательство

1. Покажем, что оба контракта должны давать нулевую прибыль будучи выбранными своим типом, т.е. $s_H^* = v_H$, $s_L^* = v_L$.

Действительно, предположим, что $s_L^* < v_L$, тогда любая фирма могла бы получить положительную прибыль, предложив контракт $(\tilde{s}_L, e_L^*)$, где $v_L > \tilde{s}_L > s_L$. Работники типа L предпочтут этот контракт, и поскольку фирма получит положительную прибыль от любого такого работника, то ее прибыль возрастет. Следовательно, эта ситуация не может быть равновесием, и потому $s_L^* \geq v_L$.

Предположим, что фирмы предлагают контракты, в которых $s_H^* < v_H$ (рис. 30.3). В разделяющем равновесии контракт для работника типа L должен лежать в нижней заштрихованной области, иначе один из участников переключится на чужой контракт. В этой ситуации существует прибыльное отклонение. Действительно, любая фирма может увеличить прибыль, дополнив меню контрактов точкой $(\tilde{s}, \tilde{e})$ из верхней заштрихованной области, где $\tilde{s} < v_H$. Этот контракт предпочтут все работники типа H, но его не предпочтет ни один работник типа L, поскольку данная фирма продолжает предлагать контракт (s_L^*, e_L^*). Таким образом, выбрав контракт $(\tilde{s}, \tilde{e})$ достаточно близко к контракту (s_H^*, e_H^*), отклоняющаяся фирма, лишь немного увеличив заработную плату, получит всех высокопроизводительных работников, которые приносят ей положительную прибыль, т.е. ее прибыль возрастет. Это означает, что в равновесии зарплата высокопроизводительных работников также не может быть ниже их производительности, т.е. $s_H^* \geq v_H$.

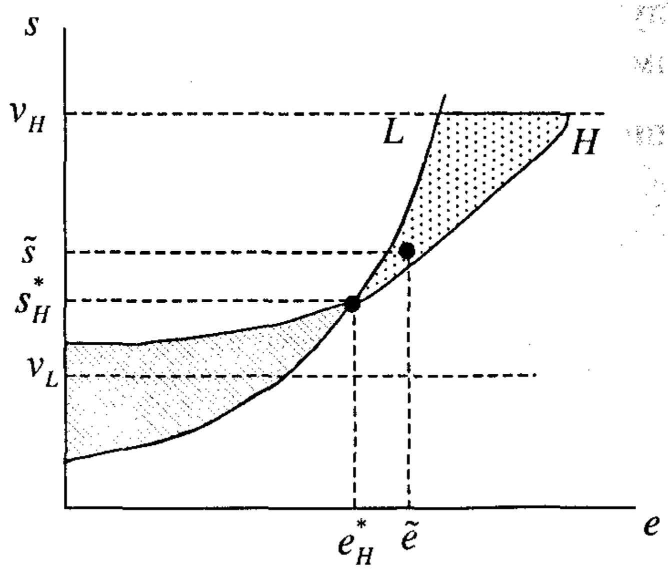


Рис. 30.3. Прибыльное отклонение в модели со скринингом на рынке труда в случае, когда $s_H^* < v_H$

Таким образом, в равновесии любой тип работников должен приносить неположительную прибыль. Однако это означает, что $s_H^* = v_H$ и $s_L^* = v_L$, поскольку в противном случае фирма несет потери на работниках одного типа, которые не компенсируются прибылью от работников другого типа.

2. Проанализируем возможные в равновесии уровни образования. Сначала покажем, что, если разделяющее равновесие существует, то для низкопроизводительного работника уровень образования будет равен нулю: $e_L^* = 0$. Предположим, что это не так и $e_L^* > 0$ (рис. 30.4). Тогда фирма могла бы получить положительную прибыль, предлагая контракт $(\tilde{s},\ \tilde{e})$ из заштрихованной области. Поскольку контракт $(\tilde{s},\ \tilde{e})$ предпочтительнее для работников типа L, то они переключатся на этот контракт, и фирма в результате получит положительную прибыль, так как $\tilde{s} < v_L$. Таким образом, для любого положительного уровня образования $e_L^* > 0$ мы можем найти прибыльное отклонение, а значит, в равновесии $e_L^* = 0$.

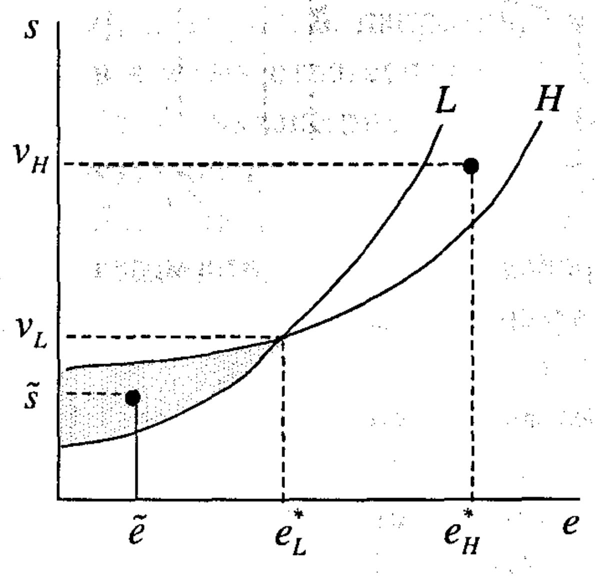


Рис. 30.4. Прибыльное отклонение в модели со скринингом на рынке труда в случае, когда $e_L^* > 0$

Итак, мы знаем, что $s_L^* = v_L$, $e_L^* = 0$ и $s_H^* = v_H$. Осталось найти e_H^*. Заметим, что e_H^* не должно лежать левее кривой безразличия для низкопроизводительного работника, проходящей через точку $(v_L,\ 0)$, поскольку иначе его предпочтут и работники типа L. Покажем, что в действительности контракт для работников типа H должен лежать на кривой безразличия низкопроизводительного работника, проходящей через точку $(v_L,\ 0)$. Предположим, что это не так и $e_H^* > \hat{e}$ (рис. 30.5), где $\hat{e}$ определяется из условия $u_L(v_L,\ 0) = u_L(v_H,\ \hat{e})$. Тогда существует контракт $(s',\ e')$ из заштрихованной области, который предпочтительнее для работника типа H и дает фирме положительную прибыль, так как $s' < s_H^*$. Наличие прибыльного отклонения означает, что в равновесии e_H^* не может быть больше $\hat{e}$, откуда следует, что $e_H^* = \hat{e}$. ■

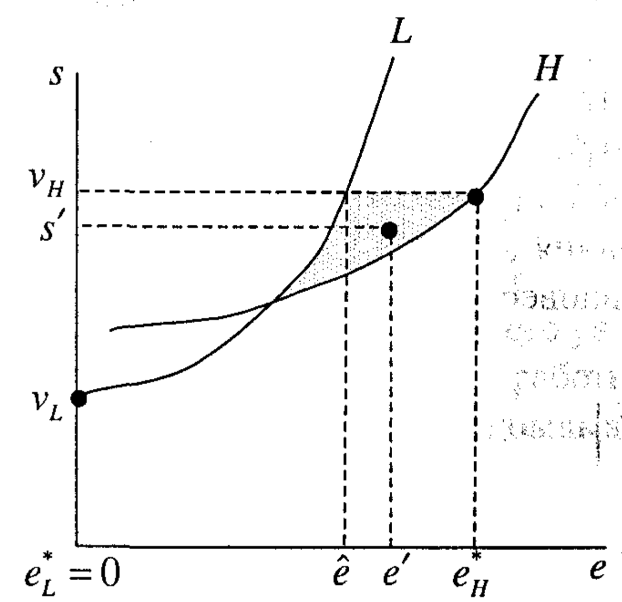


Рис. 30.5. Прибыльное отклонение в модели со скринингом на рынке труда в случае, когда $e_H^* > \hat{e}$

Таким образом, мы показали, что если разделяющее равновесие в модели скрининга на рынке труда существует, то оно представимо парой контрактов, изображенной на рис. 30.6. Заметим, что работники каждого типа действительно согласятся работать на фирму при таких условиях, поскольку полезность у каждого типа выше альтернативной (нулевой) полезности.

Теперь нужно ответить на вопрос, всегда ли существует равновесие в рассматриваемой модели? Для этого проанализируем, в каких случаях фирмы сочтут выгодным отклониться от пары контрактов, изображенной на рис. 30.6.

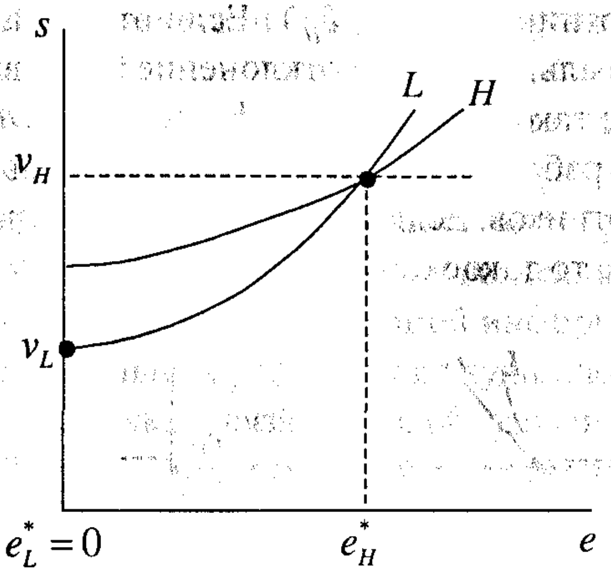


Рис. 30.6. Графическое представление равновесия в модели со скринингом на рынке труда в случае существования такого равновесия

Рассмотрим ситуации, изображенные на рис. 30.7. Различие между ними в том, что на рис. **а** полезность работника H от своего контракта выше, чем $E[v]$, а на рис. **б**, напротив, ниже. Покажем, что в случае **б** равновесия в чистых стратегиях не существует. Для этого рассмотрим контракт $(\tilde{s}, \tilde{e})$ из заштрихованной области на рис. 30.7б. Этот контракт предпочтут как низкопроизводительные, так и высокопроизводительные работники, и, поскольку зарплата в этом контракте ниже ожидаемой производительности ($\tilde{s} < E[v]$), то ожидаемая прибыль будет положительна. Следовательно, такое отклонение фирме выгодно. Таким образом, в этом случае разделяющего равновесия не существует, а значит, равновесия в рассматриваемой модели вообще не существует, поскольку мы доказали, что объединяющего равновесия в данной модели не существует никогда.

Покажем, что и в ситуации, изображенной на рис. 30.7а, т.е. при $\bar{s} > E[v]$, равновесие может не существовать. В этом случае при определенных условиях возможно разрушение потенциального равновесия за счет предложения не одного, а пары контрактов. Итак, предположим, что одна из фирм включит в меню следующие контракты, изображенные на рис. 30.8: $(\hat{s}_L, 0)$ и $(\hat{s}_H, \hat{e}_H)$. В этом случае низкопроизводительные работники предпочтут контракт $(\hat{s}_L, 0)$, а высокопроизводительные работники — $(\hat{s}_H, \hat{e}_H)$. Если эта пара контрактов принесет фирме прибыль, то данное отклонение будет выгодным. Заметим, что в результате такого отклонения фирма несет убытки на низкопроизводительных работниках, но получает прибыль от высокопроизводительных работников. Если высокопроизводительных работников достаточно много, то такое отклонение может быть прибыльным.

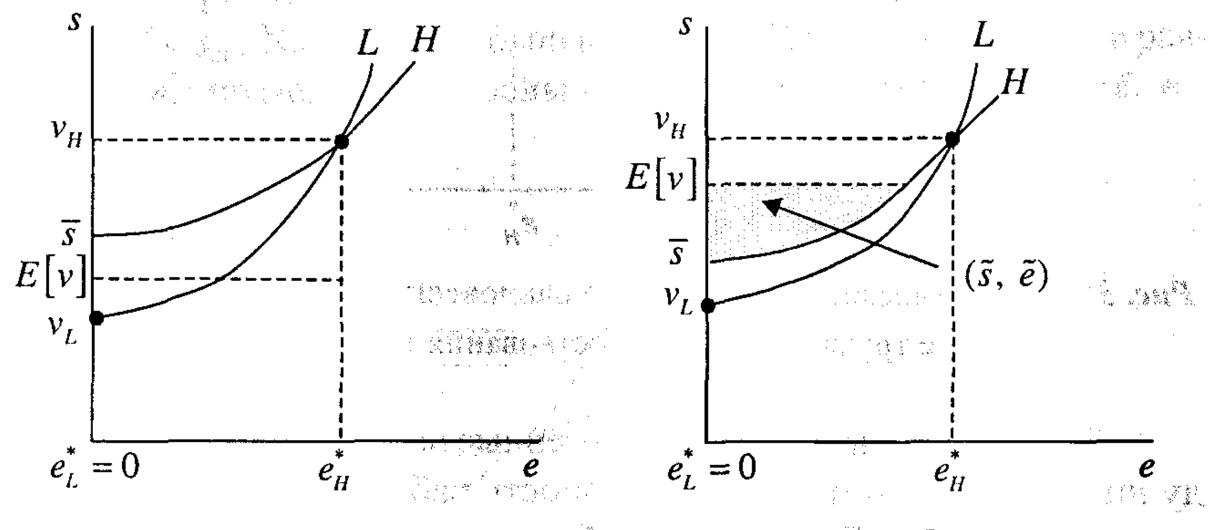


Рис. 30.7. Разделяющие контракты, которые могут представлять равновесие при скрининге (при определенных условиях) (**а**); разделяющие контракты, которые не могут быть равновесными (**б**)

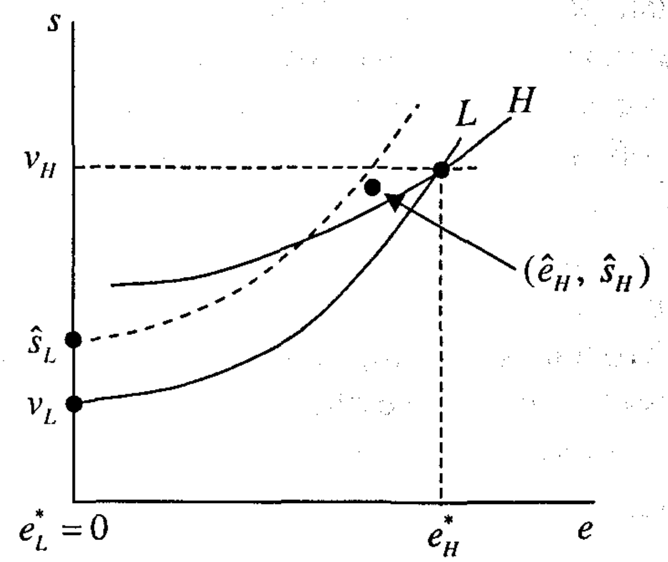


Рис. 30.8. Возможность прибыльного отклонения при предложении пары разделяющих контрактов $(\hat{s}_L, 0)$ и $(\hat{s}_H, \hat{e}_H)$

Равновесие и благосостояние

Если разделяющее равновесие все-таки существует, то что про него можно сказать в терминах благосостояния? По сравнению со случаем симметричной информации благосостояние низкопроизводительных работников не изменилось (они получают в разделяющем равновесии такой же контракт, как и при симметричной информации), а положение высокопроизводительных работников ухудшилось, поскольку им приходится нести издержки, связанные с образованием.

Сравнивая случай асимметричной информации при наличии скрининга и без него, следует отметить, что низкопроизводительным работникам скрининг не выгоден, поскольку без него каждый работник получал бы заработную плату, соответствующую средней производительности $E[v]$, что превышает заработную плату низкопроизводительных работников в разделяющем равновесии при таком же (нулевом) уровне образования. Соответственно полезность работников типа L без скрининга была бы выше. Что касается высокопроизводительных работников, то им скрининг выгоден, поскольку в случае скрининга, если равновесие существует, их уровень полезности выше, чем без скрининга $u_H(s_H^*, e_H^*) = \overline{s} > E[v]$.

Лекция 31

Скрининг: случай монополиста (монопсониста)

В лекции 30 было показано, как неинформированная сторона рынка может реагировать на асимметричность информации в случае, если в отрасли действуют несколько фирм и они конкурируют по Бертрану. Обратимся к анализу ситуации, когда в условиях асимметрии информации на рынке присутствует одна фирма, нанимающая работников. В этой ситуации естественно предположить, что данная фирма попытается использовать свою рыночную власть. Итак, пусть фирма, нанимая работников, предлагает им индивидуальные контракты, в которых специфицированы заработная плата и уровень образования, т.е. рассмотрим монопсониста, осуществляющего совершенную дискриминацию. Как известно, при симметричной информации совершенная ценовая дискриминация приводит к эффективному распределению ресурсов. Однако в условиях асимметричной информации, как будет показано ниже, решение становится неэффективным. Рассмотрим, как изменится решение при использовании скрининга. Идея модели остается прежней: монопсонист будет предлагать работникам набор контрактов, но при этом контракты в наборе будут подобраны таким образом, чтобы каждый работник выбирал контракт, предназначенный именно для него.

В отличие от рассмотренной ранее модели, теперь мы будем полагать, что образование продуктивно. В результате работник типа t с уровнем образования e будет производить продукцию объемом $v_t e$. Все остальные предпосылки остаются в силе. В рассматриваемой игре сначала монопсонист предлагает работникам меню контрактов, где каждый контракт представлен парой $(s_i,\ e_i)$, а затем работники решают, соглашаться ли на какой-либо из предложенных контрактов, и если да, то выбирают наилучший контракт согласно своим предпочтениям.

Разрабатывая контракты, монопсонист принимает во внимание реакцию работников, а потому эти контракты подбираются таким образом, чтобы они приносили работниками полезность не ниже альтернативной и чтобы каждый тип работников выбирал контракт, предназначенный именно для него. Эти условия мы можем формализовать следующим образом. Если $(s_H,\ e_H)$ и $(s_L,\ e_L)$ — контракты, предназначенные для работников типа H и L соответственно, то, для того чтобы работник каждого типа не предпочел альтернативную занятость, эти контракты должны удовлетворять следующим условиям, которые называют *условиями участия*:

$$u_H(s_H,\ e_H) = s_H - c_H(e_H) \geq \bar{u}_H = 0;$$

$$u_L(s_L,\ e_L) = s_L - c_L(e_L) \geq \bar{u}_L = 0,$$

где $\bar{u}$ — полезность при альтернативной занятости, одинаковая (по предположению) для работников обоих типов.

Кроме того, для того чтобы у работников не было стимулов выбирать «чужой» контракт, должны выполняться *условия самоотбора* (иначе их называют *условиями совместимости стимулов*):

$$u_H(s_H,\ e_H)=s_H-c_H(e_H)\geq u_H(s_L,\ e_L)=s_L-c_H(e_L);$$

$$u_L(s_L,\ e_L)=s_L-c_L(e_L)\geq u_L(s_H,\ e_H)=s_H-c_L(e_H).$$

В итоге задача монопсониста примет следующий вид:

$$\max_{e_i\geq 0,\ s_i\geq 0}\big(\lambda_H(v_He_H-s_H)+\lambda_L(v_Le_L-s_L)\big)$$

$$\begin{array}{ll} (1) & s_H-c_H(e_H)\geq 0; \\ (2) & s_L-c_L(e_L)\geq 0; \\ (3) & s_H-c_H(e_H)\geq s_L-c_H(e_L); \\ (4) & s_L-c_L(e_L)\geq s_H-c_L(e_H). \end{array} \qquad (31.1)$$

Покажем, что при решении задачи монопсониста ограничения (1) и (3) можно отбросить, поскольку в решении задачи они будут выполнены автоматически.

Утверждение 31.1. Характеристики равновесия в модели скрининга при монопсонии.

Если набор контрактов $\big((s_L^*,\ e_L^*);\ (s_H^*,\ e_H^*)\big)$ является решением задачи монопсониста в модели скрининга (31.1), то:

1) $\big((s_L^*,\ e_L^*);\ (s_H^*,\ e_H^*)\big)$ будет также являться решением задачи при отбрасывании ограничения участия для высокопроизводительных работников (1);

2) ограничение участия для низкопроизводительных работников (2) будет выполняться как равенство $s_L^*-c_L(e_L^*)=0$;

3) ограничение самоотбора для высокопроизводительных работников (3) будет выполняться как равенство $s_H^*-c_H(e_H^*)=s_L^*-c_H(e_L^*)$;

4) ограничение самоотбора для низкопроизводительных работников (4) не является существенным, т.е. оно не может выполняться как равенство при $(s_L^*,\ e_L^*)\neq(s_H^*,\ e_H^*)$ и выполняется автоматически при $(s_L^*,\ e_L^*)=(s_H^*,\ e_H^*)$.

Доказательство

1. Покажем, что условие (1) задачи (31.1) выполняется автоматически, если имеют место условия (2) и (3). Согласно одной из предпосылок модели $c_H(e) \le c_L(e)$ для любого $e \ge 0$. Это означает, что $-c_H(e) \ge -c_L(e)$ и соответственно $s_L - c_H(e) \ge s_L - c_L(e)$. С учетом условия участия (2) имеем

$$s_L - c_H(e_L) \ge s_L - c_L(e_L) \ge 0.$$

Принимая во внимание условие (3), получаем искомый результат:

$$s_H - c_H(e_H) \ge s_L - c_H(e_L) \ge s_L - c_L(e_L) \ge 0.$$

Таким образом, при выполнении условий (2) и (3) условие (1) будет иметь место автоматически, и, следовательно, его можно отбросить, так как оно не влияет на множество допустимых решений задачи.

2. Покажем, что ограничение участия для низкопроизводительного работника (2) будет выполняться как равенство. Предположим, что это неверно и в оптимальном контракте имеет место строгое неравенство $s_L^* - c_L(e_L^*) > 0$. Рассмотрим другой набор контрактов, при котором уровни образования прежние, а заработная плата для всех работников уменьшена на малую величину ε: $\left((s_L^* - \varepsilon,\ e_L^*);\ (s_H^* - \varepsilon,\ e_H^*)\right)$, где $\varepsilon > 0$. Число ε будем выбирать таким образом, чтобы не нарушилось ограничение (2). В результате условия (3) и (4) не нарушатся, поскольку обе части неравенств будут уменьшены на одну и ту же величину ε. Итак, новый набор контрактов будет удовлетворять всем ограничениям задачи, но при этом принесет большую прибыль:

$$\pi(s_L^* - \varepsilon,\ e_L^*,\ s_H^* - \varepsilon,\ e_H^*) - \pi(s_L^*,\ e_L^*,\ s_H^*,\ e_H^*) = \lambda_H \varepsilon + \lambda_L \varepsilon = \varepsilon > 0.$$

Это означает, что исходный набор контрактов не был оптимальным. Полученное противоречие говорит о том, что сделанное нами предположение неверно и условие (2) должно выполняться как равенство.

3. Покажем, что ограничение самоотбора для высокопроизводительного работника (3) будет выполняться как равенство. Докажем это от противного. Предположим, что это неверно и в оптимальном контракте имеет место строгое неравенство $s_H^* - c_H(e_H^*) > s_L^* - c_H(e_L^*)$.

Рассмотрим другой набор контрактов, при котором уровни образования прежние, заработная плата низкопроизводительных работников также неизменна, а заработная плата высокопроизводительных работников уменьшена на малую величину $\delta > 0$: $\left((s_L^*,\ e_L^*);\ (s_H^* - \delta,\ e_H^*)\right)$, причем δ будем выбирать таким образом, чтобы не нарушилось условие (3). При этом неравенство (2) не изменится, поскольку s_H в него не входит, не нарушится и условие (4), поскольку s_H входит лишь в его правую часть. В результате новый набор контрактов будет удовлетворять ограничениям задачи монопсониста (31.1), но при этом прибыль монопсониста возрастет:

$$\pi(s_L^*,\ e_L^*,\ s_H^* - \delta,\ e_H^*) - \pi(s_L^*,\ e_L^*,\ s_H^*,\ e_H^*) = \lambda_H \delta > 0.$$

Это означает, что набор $\left((s_L^*,\ e_L^*);\ (s_H^*,\ e_H^*)\right)$ не является решением задачи, т.е. мы пришли к противоречию.

4. Покажем, что ограничение самоотбора для низкопроизводительных работников (4) в оптимальных (различных) контрактах не может выполняться как равенство. Из условия (3) имеем

$$s_H^* - s_L^* = c_H(e_H^*) - c_H(e_L^*).$$

Перепишем условие (4) в виде $s_H^* - s_L^* \le c_L(e_H^*) - c_L(e_L^*)$. Таким образом, нам нужно показать, что $c_H(e_H^*) - c_H(e_L^*) \ne c_L(e_H^*) - c_L(e_L^*)$. Убедимся в том, что при выполнении условия (3) это неравенство следует автоматически в силу предпосылки о единственности пересечения. Представим левую и правую части неравенства как интегралы от соответствующих функций предельных издержек:

$$c_H(e_H^*) - c_H(e_L^*) = \int_{e_L^*}^{e_H^*} c_H'(e)de$$

и

$$c_L(e_H^*) - c_L(e_L^*) = \int_{e_L^*}^{e_H^*} c_L'(e)de.$$

Напомним, что согласно предпосылкам модели $c_H'(e) < c_L'(e)$ для любого $e \ge 0$. Это означает, что

$$\int_{e_L^*}^{e_H^*} c_H'(e)de \neq \int_{e_L^*}^{e_H^*} c_L'(e)de \text{ при } e_H^* \neq e_L^*. \blacksquare$$

Итак, мы показали, что лишь два из четырех условий задачи (31.1) будут выполняться как равенства: условия (2) и (3). В результате из (2) имеем $s_L = c_L(e_L)$ и из (3) — $s_H = c_H(e_H) - c_H(e_L) + s_L$, что с учетом условия (2) дает $s_H = c_H(e_H) - c_H(e_L) + c_L(e_L)$. Подставляя найденные выражения для s_L и s_H в целевую функцию монопсониста, имеем

$$\max_{e_L \geq 0, e_H \geq 0} \left(\lambda_L \left(v_L e_L - c_L(e_L) \right) + \lambda_H \left(v_H e_H - c_H(e_H) + c_H(e_L) - c_L(e_L) \right) \right).$$

Осталось решить эту задачу и затем проверить, выполнено ли условие самоотбора (4). Заметим, что в силу предпосылок о выпуклости функций издержек целевая функция задачи вогнута, и потому условие второго порядка выполнено автоматически. Обратимся к условиям первого порядка:

$$\lambda_H \left(v_H - c_H'(e_H^*) \right) \leq 0; \ \lambda_H \left(v_H - c_H'(e_H^*) \right) = 0, \text{ если } e_H^* > 0;$$

$$\lambda_L \left(v_L - c_L'(e_L^*) \right) + \lambda_H \left(c_H'(e_L^*) - c_L'(e_L^*) \right) \leq 0,$$

причем

$$\lambda_L \left(v_L - c_L'(e_L^*) \right) + \lambda_H \left(c_H'(e_L^*) - c_L'(e_L^*) \right) = 0, \text{ если } e_L^* > 0.$$

Проанализируем случай внутреннего решения: $e_L^* > 0$, $e_H^* > 0$. Тогда из условий первого порядка и ограничений (2) и (3) задачи (31.1) получим следующие характеристики оптимального контракта:

$$c_H'(e_H^*) = v_H;$$

$$s_H^* = c_H(e_H^*) - c_H(e_L^*) + c_L(e_L^*);$$

$$c_L'(e_L^*) = v_L + \left(c_H'(e_L^*) - c_L'(e_L^*) \right) \frac{\lambda_H}{\lambda_L};$$

$$s_L^* = c_L(e_L^*).$$

Сопоставим найденный контракт с тем, который имел бы место в случае симметричной информации, и покажем, что уровень образования для высокопроизводительного работника при асимметричной информации остается прежним, а для низкопроизводительного работника — может упасть.

Утверждение 31.2. Отсутствие искажения для высокопроизводительных работников.

Если набор контрактов $\left((s_L^*,\ e_L^* > 0);\ (s_H^*,\ e_H^* > 0)\right)$ является решением задачи монопсониста в модели скрининга, а $\left((\tilde{s}_L,\ \tilde{e}_L > 0);\ (\tilde{s}_H,\ \tilde{e}_H > 0)\right)$ — равновесие при симметричной информации, то:

$$1)\ e_H^* = \tilde{e}_H \text{ и } s_H^* > \tilde{s}_H;$$

$$2)\ e_L^* < \tilde{e}_L \text{ и } s_L^* < \tilde{s}_L.$$

Доказательство

Заметим, что в случае симметричной информации нет необходимости в ограничениях самоотбора, и потому контракты для участников выбираются из решения следующей задачи:

$$\max_{e_i \geq 0,\ s_i \geq 0} \left(\lambda_H (v_H e_H - s_H) + \lambda_L (v_L e_L - s_L)\right);$$

$$s_H - c_H(e_H) \geq 0;$$

$$s_L - c_L(e_L) \geq 0,$$

причем в оптимальных контрактах оба условия участия выполняются как равенства (иначе можно было бы, не изменяя уровни образования, снизить зарплаты и тем самым увеличить прибыль). Таким образом, внутренние решения в случае симметричной информации характеризуются следующим набором условий:

$$c_H'(\tilde{e}_H) = v_H \text{ и } \tilde{s}_H = c_H(\tilde{e}_H)$$

$$c_L'(\tilde{e}_L) = v_L;$$

$$\tilde{s}_L = c_L(\tilde{e}_L),$$

т.е. уровни образования выбираются исходя из равенства предельной выручки предельным издержкам, а зарплата назначается таким образом, чтобы полезность от контракта была равна альтернативной.

1. Поскольку при асимметричной информации (в случае внутреннего решения) уровень образования для работника типа H выбирается из такого же условия, как и при симметричной информации $\left(c'_H(e^*_H)=v_H\right)$, то эти уровни совпадают: $e^*_H=\tilde{e}_H$. Сравним соответствующие заработные платы. Как было показано выше, при асимметричной информации зарплата высокопроизводительного работника составит

$$s^*_H=c_H(e^*_H)+c_L(e^*_L)-c_H(e^*_L)>c_H(e^*_H)=c_H(\tilde{e}_H)=\tilde{s}_H,$$

т.е. при асимметричной информации монопсонисту приходиться перекомпенсировать высокопроизводительных работников для того, чтобы они выбирали свой контракт.

2. Обратимся к анализу контракта для низкопроизводительных работников. Для случая внутреннего решения имеем

$$c'_L(e^*_L)=v_L+\left(c'_H(e^*_L)-c'_L(e^*_L)\right)\frac{\lambda_H}{\lambda_L}<v_L,$$

поскольку по предположениям модели $c'_H(e)-c'_L(e)<0$ для любого $e\geq 0$. Итак, имеем $c'_L(e^*_L)<v_L=c'_L(\tilde{e}_L)$, откуда в силу возрастания предельных издержек следует, что $e^*_L<\tilde{e}_L$. Для соответствующих заработных плат (в силу возрастания издержек) имеем

$$s^*_L=c_L(e^*_L)<c_L(\tilde{e}_L)=\tilde{s}_L. \blacksquare$$

Проиллюстрируем графически оптимальные контракты при симметричной и асимметричной информации (см. рис. 31.1). Для этого изобразим ограничения участия $s_L-c_L(e_L)=0$ и $s_H-c_H(e_H)=0$. Осталось наложить на эту картинку линии постоянной прибыли, чтобы определить оптимальные контракты при симметричной информации. Прибыль от работника типа t составляет $\pi_t=v_te_t-s_t$, соответственно линии постоянной прибыли имеют вид $s_t=v_te_t-\pi_t$, т.е. это прямые с наклоном v_t, и прибыль возрастает, если мы сдвигаемся вниз. Таким образом, прибыль максимальна в точках касания линии постоянной прибыли работника типа t с соответствующей кривой безразличия, отражающей условие участия. В итоге мы находим контракты $\left((\tilde{s}_L,\ \tilde{e}_L);\ (\tilde{s}_H,\ \tilde{e}_H)\right)$. Изобразим на том же рисунке контракт в случае асимметричной информации. Для этого дополним рисунок условием участия для высокопроизводительного работника. Оптимальный контракт при асимметричной информации представлен набором $\left((s_L^*,\ e_L^*);\ (s_H^*,\ e_H^*)\right)$. Как мы видим, благосостояние низкопроизводительных работников при асимметричной информации такое же, как и при симметричной, а благосостояние высокопроизводительных работников при асимметричной информации выше. Однако прибыль монопсониста, как следует из рисунка, снизилась.

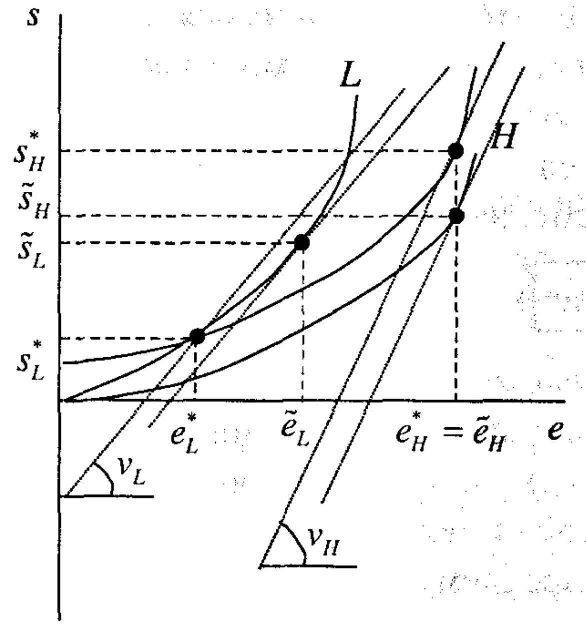


Рис. 31.1. Равновесные контракты в условиях монопсонии при симметричной $\left((\tilde{s}_L,\ \tilde{e}_L);\ (\tilde{s}_H,\ \tilde{e}_H)\right)$ и асимметричной информации $\left((s_L^*,\ e_L^*);\ (s_H^*,\ e_H^*)\right)$

Лекция 32

Моральный риск в задаче «заказчик — исполнитель»

Мы рассмотрели проблемы, возникающие при наличии скрытых характеристик, и возможную реакцию как информированной, так и неинформированной стороны рынка. Теперь обратимся к анализу ситуаций, связанных со скрытыми действиями. Сначала перечислим несколько примеров подобных ситуаций. Со скрытыми действиями мы сталкиваемся, когда:

- кредитор не имеет возможности контролировать, как используется кредит (на проекты, связанные с большим или небольшим риском);
- страховщик, продавший страховку от пожара, не имеет возможности контролировать, какие меры принимаются страхователем для снижения риска пожара (т.е. насколько он осторожен при обращении с огнем и легковоспламеняющимися предметами);
- собственник фирмы, наняв менеджера, не может контролировать, насколько усердно работает менеджер.

Во всех этих случаях ненаблюдаемость действий агентов может привести к проблеме, называемой *моральным риском.*

Определение

Моральным риском называют ситуацию, когда после заключения контракта одна из сторон предпринимает ненаблюдаемые другой стороной действия, которые неблагоприятно влияют на положение неинформированной стороны. □

Рассмотрим проблему морального риска на примере рынка труда, когда собственник нанимает менеджера для выполнения определенной работы, но не может наблюдать, сколько усилий будет прилагать нанятый работник после заключения контракта. Эту задачу в дальнейшем будем называть *задачей найма.*

Описание модели найма

Рассмотрим рынок труда, где спрос на труд предъявляется единственной фирмой, и в результате данная фирма является монопсонистом на данном рынке труда. Будем считать, что рассматриваемая фирма (в лице ее владельца) собирается нанять менеджера для управления фирмой. Валовая прибыль фирмы (без учета вознаграждения нанимаемого менеджера) зависит как от общей ситуации на рынке, так и от усилий, прилагаемых менеджером. Обозначим валовую прибыль фирмы через x. В зависимости от усилий менеджера и ситуации на рынке валовая прибыль может принимать значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Пусть λ_{it} — вероятность того, что при усилиях e_t валовая прибыль равна x_i:

$\lambda_{it} = \mathrm{Prob}\left(\frac{x_i}{e_t}\right)$, причем $\sum_i \lambda_{it} = 1$ для всех t. Рассмотрим случай, где уровень усилий e_t может принимать лишь два значения: e_L и e_H, причем $e_H > e_L$. Будем считать, что имеет место стохастическое доминирование первой степени распределения вероятностей, соответствующего уровню усилий e_H, над распределением, соответствующим уровню усилий e_L, т.е. для любой возрастающей функции $f(x)$:

$\sum_i f(x_i)\lambda_{iH} > \sum_i f(x_i)\lambda_{iL}$. Это, в частности означает, что в среднем валовая прибыль выше при уровне усилий e_H: $\sum_i x_i\lambda_{iH} > \sum_i x_i\lambda_{iL}$.

Рассмотрим контракты, в которых оплата усилий обусловлена наблюдаемыми величинами (в данном случае валовой прибылью). Обозначим через s_i заработную плату менеджера при реализации состояния i (т.е. когда валовая прибыль фирмы равна x_i). Тогда, полагая собственника нейтральным к риску (у него есть большие возможности для диверсифицикации активов путем инвестирования в разные фирмы), мы может записать ожидаемую полезность собственника как ожидаемую прибыль, которая будет равна $\sum_{i=1}^{n}(x_i - s_i)\lambda_{it}$ в случае, если менеджер выбирает уровень усилий e_t.

Будем считать, что предпочтения менеджера представимы функцией ожидаемой полезности вида $\sum_{i=1}^{n} u(s_i)\lambda_{it} - c_t$, где c_t — затраты от уровня усилий e_t. Предполагается, что функция полезности менеджера удовлетворяет следующим свойствам: возрастает по заработной плате, т.е. $u'_s > 0$; затраты растут с уровнем прилагаемых усилий, т.е. $c(e_H) > c(e_L)$. Ниже мы отдельно рассмотрим случай нейтрального к риску менеджера ($u_s'' = 0$) и менеджера-рискофоба ($u_s'' < 0$). Будем считать, что если менеджер откажется от работы на данной фирме, то альтернативная занятость гарантирует ему полезность $\overline{u}$.

Последовательность действий в рассматриваемой модели такова. Сначала собственник фирмы предлагает менеджеру контракт, а затем менеджер решает, согласиться ему на данные условия или нет. Далее мы проанализируем равновесие в данной модели в ситуации, когда усилия менеджера наблюдаемы, а также в ситуации ненаблюдаемости усилий.

Оптимальный контракт при наблюдаемых усилиях

Случай менеджера-рискофоба

Итак, в данной ситуации усилия наблюдаемы и потому в предлагаемом менеджеру контракте уровень вознаграждения жестко привязан к величине прилагаемых усилий. Владелец фирмы выбирает контракт таким образом, чтобы, с одной стороны, менеджер от него не отказался (для этого данный контракт должен давать полезность не меньшую, чем полезность альтернативной занятости), а с другой стороны, из всех таких контрактов собственнику следует выбрать наиболее прибыльный. Таким образом, собственник предлагает менеджеру контракт, в котором специфицируются уровень усилий и соответствующая оплата при каждом возможном уровне выпуска $(e,\ s_i(e))$ исходя из максимизации ожидаемой прибыли:

$$\max_{s_i,\ e_t \in \{e_L,\ e_H\}} \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - s_i(e_t)\big)\lambda_{it}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u\big(s_i(e_t)\big)\lambda_{it} - c(e_t) \geq \overline{u}.$$

Будем решать задачу в два этапа. Сначала при каждом e_t найдем оптимальную схему заработной платы $s(e)$, а затем определим оптимальный уровень e. Заметим, что ограничение участия должно выполняться как равенство, иначе собственник мог бы снизить s_i в каждом состоянии так, чтобы ограничение не нарушилось, ожидаемая прибыль при этом возрастает.

Обозначим через γ множитель Лагранжа при ограничении участия. Тогда из условия первого порядка имеем

$$-\lambda_{it} + \gamma u'(s_i^*)\lambda_{it} = 0$$

или

$$u'(s_i^*) = \frac{1}{\gamma} = const.$$

Поскольку мы рассматриваем менеджера-рискофоба, то $u'(\cdot)$ — убывающая функция, поэтому неизменная предельная полезность может иметь место лишь в том случае, если производная вычисляется в одной и той же точке, т.е. $s_i^* = s^*$. Это означает, что в данном случае заработная плата не зависит от состояния мира.

Заметим, что в задаче целевая функция линейна, а ограничение не линейно. Однако задача может быть преобразована к стандартной задаче выпуклого программирования с линейным ограничением и нелинейной целевой функцией следующим образом. Пусть $u_i = u(s_i)$, тогда $s_i = f(u_i)$, где $f(\cdot)$ — обратная функция к функции полезности $u(\cdot)$, т.е. $f(\cdot) = u^{-1}(\cdot)$. Обратная функция существует, поскольку по предположению $u(\cdot)$ — возрастающая функция. Тогда задача собственника может быть переписана следующим образом:

$$\max_{u_i} \sum_{i=1}^{n} (x_i - f(u_i))\lambda_{iH}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\lambda_{iH} - c(e_H) \geq \bar{u}.$$

Заметим, что поскольку $u(s_i)$ вогнута, то $f(u_i)$ выпукла и, следовательно $-f(u_i)$ вогнута, т.е. мы теперь максимизируем вогнутую функцию при линейных ограничениях, поэтому условия первого порядка являются необходимыми и достаточными.

Подставив $s_i^* = s^*$ в ограничение задачи, находим, что $s^*(e_t) = u^{-1}(\bar{u} + c(e_t))$. Итак, в условиях, когда усилия наблюдаемы (и, следовательно, нет проблемы обеспечения соответствующих стимулов) собственник полностью страхует менеджера от риска, гарантируя ему фиксированную заработную плату, т.е. риск перераспределен от агента-рискофоба к агенту, нейтральному к риску.

Уровень усилий e^* выбирается таким образом, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль:

$$\max_{e_t \in (e_L,\, e_H)} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{it} - s^*(e_t) \right) = \max_{e_t \in (e_L,\, e_H)} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{it} - u^{-1}\left(\bar{u} + c(e_t)\right) \right).$$

Таким образом, мы можем просуммировать найденные нами характеристики оптимального контракта при наблюдаемых усилиях в следующем утверждении.

Утверждение 32.1. Оптимальный контракт для менеджера-рискофоба при наблюдаемых усилиях.

Оптимальным в модели найма с менеджером-рискофобом при наблюдаемых усилиях является контракт $(s_i^*,\, e^*)$, где $s_i^* = s^* = u^{-1}\left(\bar{u} + c(e^*)\right)$ для всех $i = 1,\ \ldots,\ N$ и e^* является решением задачи $\max_{e_t \in \{e_L,\, e_H\}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{it} - u^{-1}\left(\bar{u} + c(e_t)\right) \right)$.

Доказательство этого утверждения приведено выше.

Случай нейтрального к риску менеджера

Рассмотрим как изменится равновесие в случае, если менеджер нейтрален к риску. Для нейтрального к риску менеджера ожидаемая полезность имеет вид $\sum_{i=1}^{n} u\left(s_i(e_t)\right)\lambda_{it} - c(e_t) = \sum_{i=1}^{n} s_i(e_t)\lambda_{it} - c(e_t)$. В результате задача монопсониста может быть переписана как

$$\max_{s_i(e_t),\, e_t \in \{e_L,\, e_H\}} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - s_i(e_t)\right)\lambda_{it}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(e_t)\lambda_{it} - c(e_t) \geq \bar{u}.$$

Учитывая, что условие участия должно выполняться как равенство, мы можем выразить ожидаемые расходы на заработную плату из ограничения и подставить в целевую функцию:

$$\max_{e_t \in \{e_L,\, e_H\}} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{u} - c(e_t)\right)\lambda_{it} = \max_{e_t \in \{e_L,\, e_H\}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{it} - \bar{u} - c(e_t)\right).$$

Таким образом, для агента, нейтрального к риску, заработная плата должна удовлетворять условию $\sum_{i=1}^{n} s_i^*(e_t)\lambda_{it} = \bar{u} + c(e_t)$, но при этом она может различаться в разных состояниях. Заметим, что данное уравнение имеет континуум решений, но в том числе ему удовлетворяет и решение, полученное для агента-рискофоба, где заработная плата одинакова по всем состояниям. Итак, для агента, нейтрального к риску, мы можем сформулировать следующий аналог утверждения 32.1.

Утверждение 32.2. Оптимальный контракт для нейтрального к риску менеджера при наблюдаемых усилиях.

Оптимальным в модели найма с нейтральным к риску менеджером при наблюдаемых усилиях является контракт $(s_i^*,\ e^*)$, где $\{s_i^*\}_{i=1}^{N}$ удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n} s_i^* \lambda_{it^*} = \bar{u} + c(e^*)$ и e^* является решением задачи $\max_{e_t \in \{e_L,\, e_H\}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{it} - \bar{u} - c(e_t)\right)$.

Доказательство этого утверждения приведено выше.

Оптимальный контракт при ненаблюдаемых усилиях

Проанализировав в качестве отправной точки равновесие при наблюдаемых усилиях, перейдем к рассмотрению ситуации ненаблюдаемых усилий. Нас интересуют следующие вопросы: при каких условиях ненаблюдаемость усилий сопряжена с моральным риском; будут ли иметь место потери в эффективности. Заметим, что, несмотря на то что собственник фирмы является монопсонистом, распределение ресурсов при наблюдаемых усилиях было Парето-оптимальным, поскольку мы имели дело со случаем пакетной дискриминации.

С моральным риском собственник столкнется в том случае, если при наблюдаемых усилиях его прибыль была максимальной при уровне усилий e_H. Действительно, если собственник продолжал бы предлагать прежний контракт с уровнем усилий e_H, то менеджер на этот контракт согласился бы, но не стал бы прикладывать надлежащего уровня усилий, так как при прочих равных условиях полезность менеджера будет выше при более низком уровне усилий. Однако, как мы знаем, при более низком уровне усилий в среднем валовая прибыль фирмы будет ниже, и соответственно ожидаемая чистая прибыль фирмы упадет. В результате ненаблюдаемость действий менеджера негативно сказывается на положении неинформированной стороны, т.е. мы имеем дело с ситуацией морального риска.

Рассмотрим, как собственник может улучшить ситуацию в случае нейтрального к риску менеджера и в случае менеджера-рискофоба.

Случай нейтрального к риску менеджера

Покажем, что в этом случае достижимо то же распределение, что и при наблюдаемых усилиях.

Напомним, что при полной информации менеджер получает полезность, равную $\bar{u}$, а ожидаемая прибыль собственника равна

$$\max_{e_t \in \{e_L,\, e_H\}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{it} - \bar{u} - c(e_t) \right).$$

Для того чтобы при ненаблюдаемых усилиях достичь такого же результата, необходимо каким-то образом стимулировать менеджера к выбору оптимального уровня усилий. Один из возможных способов состоит в перераспределении риска от собственника к менеджеру (это не должно создавать дополнительных проблем, поскольку оба нейтральны к риску). Итак, предположим, что собственник предлагает менеджеру остаточный принцип формирования заработной платы:

$s(x_i) = x_i - F$, где F — некоторая определяемая собственником константа. Эту схему можно также интерпретировать как продажу проекта менеджеру по цене F.

Утверждение 32.3. Оптимальный контракт для нейтрального к риску менеджера при ненаблюдаемых усилиях.

В модели найма с нейтральным к риску менеджером при ненаблюдаемых усилиях:

1) оптимальный контракт соответствует оплате труда менеджера по остаточному принципу $\hat{s}_i = x_i - \hat{F}$, где $\hat{F} = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{i\hat{t}} - c_{\hat{t}} - \bar{u}$ и $\hat{t}$ таково, что $e_{\hat{t}}$ является решением задачи $\max\limits_{e_t \in \{e_L,\, e_H\}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{it} - c_t ; \right)$

2) при оплате труда менеджера по остаточному принципу ненаблюдаемость усилий не влечет потерь в эффективности.

Доказательство

1. Если менеджер согласится на предложенную схему, то он будет выбирать уровень усилий e исходя из максимизации следующей функции ожидаемой полезности:

$$e_{\hat{t}} = \arg\max_{e_t \in \{e_L,\, e_H\}} \left(\sum_{i=1}^{n} s(x_i) \lambda_{it} - c(e_t) \right) = \arg\max_{e_t \in \{e_L,\, e_H\}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{it} - c(e_t) - F \right).$$

Поскольку константа F не влияет на выбор e_t, то решение задачи будет совпадать с решением задачи собственника при наблюдаемых усилиях $\max\limits_{e_t \in \{e_L,\, e_H\}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{it} - \bar{u} - c(e_t) \right)$. Осталось выбрать F таким образом, чтобы менеджер согласился на предложенную схему оплаты труда. Для этого ожидаемая полезность должна быть не меньше, чем альтернативная полезность $\bar{u}$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{i\hat{t}} - c_{\hat{t}} - F \geq \bar{u}.$$

Поскольку F — это цена, за которую собственник «продает» свой бизнес, то это и есть прибыль собственника от сделки, и соответственно собственник заинтересован в том, чтобы эта величина была максимальной. Это означает, что равновесная величина $\hat{F}$ будет удовлетворять условию участия менеджера как строгому равенству, т.е. $\hat{F} = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{i\hat{t}} - c_{\hat{t}} - \bar{u}$.

2. Заметим, что $\hat{F}$ в точности совпадает с величиной прибыли собственника при наблюдаемых усилиях. Таким образом, менеджер получает полезность, равную $\bar{u}$, а собственник — тот же уровень прибыли, что и ранее, т.е. в случае нейтрального к риску менеджера путем продажи проекта можно избежать потерь при ненаблюдаемости усилий. ■

Случай менеджера-рискофоба

Перейдем к случаю менеджера-рискофоба. Заметим, что рассмотренный выше способ решения проблемы морального риска нет смысла автоматически переносить на данный случай, поскольку полное перераспределение риска от агента, нейтрального к риску, к агенту-рискофобу не может привести к оптимальному решению.

Разделим, как и ранее при наблюдаемых усилиях, задачу на две части: сначала найдем оптимальную схему заработной платы для любого e_t, а потом определим, какой же уровень усилий максимизирует ожидаемую прибыль собственника.

Предположим сначала, что собственник хочет добиться уровня усилий e_L, и найдем соответствующую заработную плату, которая побудит менеджера выбирать такой уровень усилий. Задача собственника в этом случае должна включать не только условие участия, но и условие совместимости стимулов, согласно которому ожидаемая полезность менеджера при уровне усилий e_L должна быть не меньше, чем при уровне усилий e_H. Итак, собственник для реализации уровня усилий e_L должен назначать заработную плату, определяемую из решения следующей задачи:

$$\max_{s_i} \sum_{i=1}^{n} (x_i - s_i)\lambda_{iL}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u(s_i)\lambda_{iL} - c(e_L) \geq \overline{u};$$

$$\sum_{i=1}^{n} u(s_i)\lambda_{iL} - c(e_L) \geq \sum_{i=1}^{n} u(s_i)\lambda_{iH} - c(e_H).$$

Утверждение 32.4. Реализация низкого уровня усилий.

В модели найма с менеджером-рискофобом при ненаблюдаемых усилиях собственник может добиться максимальной прибыли, соответствующей уровню усилий e_L, установив заработную плату, одинаковую во всех состояниях и равную $\tilde{s}_i = \tilde{s} = u^{-1}\left(\overline{u} + c(e_L)\right)$.

Доказательство

Действительно, если заработная плата не зависит от состояния, то условие совместимости стимулов в этом случае будет выполнено автоматически, поскольку $\sum_{i=1}^{n} u(\tilde{s}_i)\lambda_{it} = u(\tilde{s})\sum_{i=1}^{n} \lambda_{it} = u(\tilde{s})$, и условие совместимости стимулов примет вид $u(\tilde{s}) - c(e_L) \geq u(\tilde{s}) - c(e_H)$. Последнее выполняется всегда в силу предпосылки, согласно которой $c(e_L) < c(e_H)$. Таким образом, менеджер предпочтет низкий уровень усилий. Поскольку заработная плата выбирается таким образом, чтобы полезность была не ниже альтернативной, то менеджер согласится на предложенный контракт. Более того, после заключения контракта менеджер действительно будет прилагать уровень усилий e_L, поскольку он не любит усилия, а на заработной плате величина усилий не отражается. Заметим, что заработная плата $\tilde{s}_i = \tilde{s} = u^{-1}\left(\overline{u} + c(e_L)\right)$ даст нужный уровень усилий e_L и при этом прибыль будет максимально возможной при данном уровне усилий, поскольку она будет в точности соответствовать тому, что мы имели в случае наблюдаемых усилий. ■

Если собственник хочет добиться уровня усилий e_H, то соответствующая схема заработной платы определяется из решения следующей задачи:

$$\max_{s_i} \sum_{i=1}^{n} (x_i - s_i)\lambda_{iH}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u(s_i)\lambda_{iH} - c(e_H) \geq \bar{u};$$

$$\sum_{i=1}^{n} u(s_i)\lambda_{iH} - c(e_H) \geq \sum_{i=1}^{n} u(s_i)\lambda_{iL} - c(e_L).$$

Утверждение 32.5. Реализация высокого уровня усилий.

В модели найма с менеджером-рискофобом при ненаблюдаемых усилиях для достижения уровня усилий e_H собственник для каждого состояния i должен установить заработную плату, описываемую условием $\frac{1}{u'(\tilde{s}_i)} = \rho + \eta\left(1 - \frac{\lambda_{iL}}{\lambda_{iH}}\right)$, где ρ и η — множители Лагранжа при ограничениях участия и совместимости стимулов соответственно, причем $\rho > 0$ и $\eta > 0$.

Доказательство

Покажем, что $\rho > 0$ и, соответственно, ограничение участия для оптимального контракта выполняется как равенство. Выпишем условия первого порядка:

$$-\lambda_{iH} + \rho u'(\tilde{s}_i)\lambda_{iH} + \eta u'(\tilde{s}_i)(\lambda_{iH} - \lambda_{iL}) = 0.$$

Предположим, что $\rho = 0$, тогда $\eta u'(\tilde{s}_i) = \frac{\lambda_{iH}}{\lambda_{iH} - \lambda_{iL}}$. Заметим, что в силу доминирования первой степени хотя бы для каких-то состояний i должно иметь место соотношение $\lambda_{iH} > \lambda_{iL}$. С учетом того, что сумма вероятностей по всем состояниям при любом уровне усилий должна быть равна единице, это означает, что хотя бы для одного состояния будет выполнено обратное соотношение: $\lambda_{iH} < \lambda_{iL}$. Тогда для этого состояния $\eta u'(\tilde{s}_i) = \frac{\lambda_{iH}}{\lambda_{iH} - \lambda_{iL}} < 0$, что невозможно, поскольку $\eta \geq 0$ и по предположению $u'_s > 0$. Итак, мы пришли к противоречию, и, следовательно, $\rho > 0$.

Мы показали, что $\rho > 0$. Покажем, что $\eta > 0$ и, соответственно, условие совместимости стимулов в оптимальном контракте также выполняется как равенство. Пойдем от противного: пусть $\eta = 0$. Тогда условия первого порядка примут вид

$$-\lambda_{iH} + \rho u'(\tilde{s}_i)\lambda_{iH} = 0$$

или

$$u'(\tilde{s}_i) = \frac{1}{\rho},$$

откуда следует, что $\tilde{s}_i = \bar{s}$, т.е. заработная плата не зависит от состояния. Однако при фиксированной заработной плате агент предпочтет низкий уровень усилий e_L, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} u(\bar{s})\lambda_{iH} - c(e_H) = u(\bar{s}) - c(e_H) < u(\bar{s}) - c(e_L) = \sum_{i=1}^{n} u(\bar{s})\lambda_{iL} - c(e_L).$$

Следовательно, ограничение совместимости стимулов будет нарушено, т.е. мы пришли к противоречию, и, значит, $\eta > 0$. ■

Итак, мы установили, что ρ и η строго больше нуля и соответственно оба ограничения задачи собственника будут выполняться как равенства. Теперь вернемся к рассмотрению условий первого порядка:

$$-\lambda_{iH} + \rho u'(\tilde{s}_i)\lambda_{iH} + \eta u'(\tilde{s}_i)(\lambda_{iH} - \lambda_{iL}) = 0.$$

Поделив условия первого порядка на λ_{iH}, находим

$$\left(\rho + \eta\left(1 - \frac{\lambda_{iL}}{\lambda_{iH}}\right)\right)u'(\tilde{s}_i) = 1$$

или

$$\frac{1}{u'(\tilde{s}_i)} = \rho + \eta\left(1 - \frac{\lambda_{iL}}{\lambda_{iH}}\right).$$

Рассмотрим два состояния i_1 и i_2, которые различаются тем, что состояние i_1 скорее наблюдается при высоком уровне усилий, а состояние i_2 — наоборот, т.е. $\lambda_{i_1H} > \lambda_{i_1L}$ и $\lambda_{i_2H} < \lambda_{i_2L}$. Тогда $1-\dfrac{\lambda_{i_1L}}{\lambda_{i_1H}} > 0$ и $1-\dfrac{\lambda_{i_2L}}{\lambda_{i_2H}} < 0$. Таким образом, $\dfrac{1}{u'(\tilde{s}_{i_1})} > \rho$ и $\dfrac{1}{u'(\tilde{s}_{i_2})} < \rho$, и, следовательно, $u'(\tilde{s}_{i_2}) > u'(\tilde{s}_{i_1})$, откуда в силу убывания предельной полезности получаем, что $\tilde{s}_{i_2} < \tilde{s}_{i_1}$. Это означает, что менеджеру заплатят больше в том состоянии, которое скорее ассоциируется с высоким уровнем усилий.

Заметим, что заработная плата менеджера не обязательно монотонно возрастает с ростом валовой прибыли фирмы. Напомним, что условия первого порядка задачи собственника в случае реализации высокого уровня усилий имеют вид

$$\frac{1}{u'(\tilde{s}_i)} = \rho + \eta\left(1-\frac{\lambda_{iL}}{\lambda_{iH}}\right).$$

Увеличение правой части означает увеличение $\dfrac{1}{u'(\tilde{s}_i)}$, следовательно, уменьшение $u'(\tilde{s}_i)$ и в итоге увеличение $\tilde{s}_i$. Таким образом, для монотонного изменения $\tilde{s}_i$ требуется, чтобы величина $\left(1-\dfrac{\lambda_{iL}}{\lambda_{iH}}\right)$ росла с ростом x_i, т.е. отношение $\dfrac{\lambda_{iL}}{\lambda_{iH}}$ должно убывать по x_i. Это условие означает, что с ростом x_i возможность (вероятность) получения валовой прибыли x_i при усилиях e_H по сравнению с возможностью получения прибыли x_i при усилиях e_L должна расти. Это свойство носит название *свойства монотонности отношения правдоподобия* (monotone likelihood ratio property). Однако это свойство никак не следует из предпосылок модели (например, не следует из стохастического доминирования первой степени).

Утверждение 32.6. Издержки асимметрии информации.

В модели найма с менеджером-рискофобом при ненаблюдаемых усилиях для достижения уровня усилий e_H собственник должен предложить более высокую ожидаемую заработную плату по сравнению со случаем наблюдаемых усилий.

Доказательство

Как было показано выше, оптимальная схема заработной платы, соответствующая уровню усилий e_H, должна удовлетворять условию участия как равенству:

$$\sum_{i=1}^{n} u(\tilde{s}_i)\lambda_{iH} = c(e_H) + \bar{u}.$$

Поскольку $u''(\cdot) < 0$, то в силу неравенства Йенсена справедливо следующее соотношение:

$$c(e_H) + \bar{u} = \sum_{i=1}^{n} u(\tilde{s}_i)\lambda_{iH} < u\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i\lambda_{iH}\right).$$

Кроме того, мы знаем, что в случае наблюдаемых усилий заработная плата одинакова во всех состояниях и удовлетворяет условию $u\left(s_H^*\right) = c(e_H) + \bar{u}$, откуда с учетом полученного выше неравенства следует, что

$$u(s_H^*) = c(e_H) + \bar{u} = \sum_{i=1}^{n} u(\tilde{s}_i)\lambda_{iH} < u\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i\lambda_{iH}\right),$$

а это с учетом возрастания означает, что

$$s_H^* < \sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i\lambda_{iH}. \blacksquare$$

Таким образом, чтобы осуществить уровень усилий e_H при ненаблюдаемых усилиях, собственнику придется столкнуться с более высокими ожидаемыми затратами на заработную плату. Это легко понять интуитивно: собственник должен обеспечить менеджеру полезность не меньше $\bar{u}$, а при изменяющейся заработной плате полезность меньше, чем при фиксированной, равной ожидаемой величине, поскольку менеджер — рискофоб, а следовательно, ему нужна компенсация за риск.

Осталось ответить на последний вопрос: какой же уровень усилий предпочтет собственник — e_L или e_H, и приведет ли ненаблюдаемость усилий к каким-либо потерям в эффективности?

Выбирая уровень усилий, собственник сравнивает прибыль при e_L и e_H:

$$E\pi(e_L) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{s}_i(e_L)\right)\lambda_{iL} = \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_{iL} - \tilde{s}(e_L);$$

$$E\pi(e_H) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{s}_i(e_H)\right)\lambda_{iH},$$

где $\tilde{s}(e_L) = u^{-1}\left(\bar{u} + c(e_L)\right)$, $\tilde{s}_i(e_H)$ определяется из условия

$$\frac{1}{u'(\tilde{s}_i)} = \rho + \eta\left(1 - \frac{\lambda_{iL}}{\lambda_{iH}}\right).$$

По условию стохастического доминирования $\sum_i x_i\lambda_{iH} > \sum_i x_i\lambda_{iL}$, а с другой стороны, $\tilde{s}(e_L) = s^*(e_L) < s^*(e_H) < \sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i\lambda_{iH}$. Следовательно,

$$-\tilde{s}(e_L) > -\sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i(e_H)\lambda_{iH},$$

т.е. при уровне усилий e_L ожидаемая валовая выручка меньше, но и ожидаемые издержки ниже.

Утверждение 32.7. Ненаблюдаемость усилий и потери в эффективности.

Если в модели найма с менеджером-рискофобом при ненаблюдаемых усилиях оптимальным уровнем усилий является e_L, то в этом случае ненаблюдаемость не влечет никаких потерь в эффективности. Если в модели найма с менеджером-рискофобом при ненаблюдаемых усилиях оптимальным уровнем усилий является e_H, то в этом случае ненаблюдаемость неизбежно приводит к потерям в эффективности.

Доказательство

Если собственник выбирает уровень усилий e_L при их наблюдаемости, то будет выбирать его и при ненаблюдаемости, поскольку в случае уровня усилий e_H ожидаемая прибыль будет ниже по сравнению со случаем наблюдаемости усилий за счет увеличения ожидаемых издержек на оплату труда. В этом случае при ненаблюдаемых усилиях решение будет точно такое же, как и при наблюдаемых, т.е. ненаблюдаемость не влечет никаких потерь в эффективности.

Если же при наблюдаемых усилиях собственник выбирал уровень усилий e_H, то возможна одна из следующих двух ситуаций:

1) собственник по-прежнему будет выбирать e_H, но его прибыль будет ниже за счет увеличения ожидаемых выплат, а полезность менеджера остается на уровне альтернативной. Таким образом, потери в прибыли означают потери в эффективности;

2) плата за риск будет так высока, что собственник предпочтет низкий уровень усилий e_L, так что снова ненаблюдаемость ведет к снижению ожидаемой прибыли.

Другими словами, в обоих случаях прибыль собственника будет меньше, чем при наблюдаемых усилиях, а значит, ненаблюдаемость приведет к потерям для общества, поскольку полезность менеджера осталась прежней (равной $\bar{u}$). ■

Рекомендуемая литература

Основная

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. N.Y.: Oxford University Press, 1995. Ch. 13—14.

Varian H. Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 25.

Дополнительная

Akerlof G. The Market for Lemons: Quality Uncertainty and the Market Mechanism // Quarterly Journal of Economics. 1970. 89. P. 488—500 (*Акерлоф Дж.* Рынок «лимонов»: неопределенность качества и рыночный механизм // THESIS. 1994. Вып. 5. С. 91—104).

Bester H. Screening vs Rationing in Credit Markets with Imperfect Infor-mation / / American Economic Review. 1985. 75. P. 850—855.

Cho I.K., Kreps D.M. Signaling Games and Stable Equilibria // Quarterly Journal of Economics. 1987. 102. P. 179—221.

Freixas X., Rochet J.-Ch. Microconomics of Banking. MIT Press, 1997. Ch. 2, 5.

Grossman S.J., Hart O.D. An Analysis of the Principal-agent Problem // Econometrica. 1983. 51. P. 7—45.

Jehle G., Reny Ph. Advanced Microeconomic Theory. 2nd ed. Addison-Wesley, 2000. Ch. 8.

Rothschild M., Stiglitz J.E. Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay in the Economics of Imperfect information // Quarterly Journal of Economics. 1976. 80. P. 629—649.

Spence A.M. Job Market Signaling // Quarterly Journal of Economics. 1973. 87. P. 355—374.

ОБЩИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Ф88 **Фридман, А. А.** Лекции по курсу микроэкономики продвинутого уровня [Текст] / А. А. Фридман ; Гос. ун-т — Высшая школа экономики. — М. : Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007. — 375, [1] с. — 3000 экз. — ISBN 978-5-7598-0335-5 (в пер.).

Курс лекций включает все основные разделы современной микроэкономики. Он построен на нескольких вариативных курсах, читающихся в магистратуре Государственного университета — Высшей школы экономики для различных специальностей экономического факультета. Изложение предполагает знание основ микроэкономического анализа в пределах программы бакалавриата, основных понятий теории игр, а также необходимые математические знания (математический анализ, теория нелинейной оптимизации, теория вероятностей). В курсе учтено все лучшее из западных учебников по микроэкономике, а также опыт преподавания этой дисциплины в отечественных вузах.

Для студентов, аспирантов и преподавателей экономических вузов, факультетов и специальностей.

УДК 330.101.542(075)
ББК 65.012.1

Учебное издание

Фридман Алла Александровна

Лекции по курсу микроэкономики продвинутого уровня

Зав. редакцией *О.А. Шестопалова*
Редактор *Е.Н. Ростиславская*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *Н.Е. Пузанова*
Корректор *Е.Е. Андреева*

Подписано в печать 23.07.2007 г. Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,8.
Уч.-изд. л. 17,76. Тираж 3000 экз. (1-й завод – 1000 экз.)
Заказ № 1014. Изд. № 523.

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел./факс: (495) 772-95-71

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП МО “Орехово-Зуевская типография”.
г. Орехово-Зуево, Моск. обл., ул. Дзержинского, д. 1.