С.А. Минюк, Е.А. Ровба,
К.К. Кузьмич

Математические методы и модели в экономике

*Допущено Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для
студентов экономических специальностей
высших учебных заведений*

Минск
ТетраСистемс
2002

УДК 517(075.8)
ББК 22.161
М62

Авторы:

зав. кафедрой дифференциальных уравнений и оптимального управления ГГУ, доктор физ.-мат. наук, профессор **С.А. Минюк;**

первый проректор ГГУ, доктор физ.-мат. наук, профессор **Е.А. Ровба;**

научный сотрудник Института надежности машин НАН РБ **К.К. Кузьмич**

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор каф. высшей математики Белорусского национального технического университета **И.В. Белько;**

зав. кафедрой экономической информатики и математической экономики Белорусского государственного университета, доктор физ.-мат. наук, профессор **М.М. Ковалев;**

кафедра высшей математики № 2 Белорусского национального технического университета, зав. кафедрой, кандидат физ.-мат. наук, доцент **А.Д. Корзников**

Минюк С. А.

М62 Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие / Минюк С. А., Ровба Е. А., Кузьмич К. К. — Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.

ISBN 985-470-010-0.

Книга состоит из 47 лекций, которые включают в себя: методы оптимизации и детерминированные экономические модели, теорию вероятностей и стохастические экономические модели, математическую статистику и экономические модели. Учебное пособие отражает содержание курсов "Теория вероятностей и математическая статистика", "Математическое программирование" и родственных им по названию, которые традиционно читаются на экономических специальностях вузов. Краткость и сжатость, а также достаточный уровень математической строгости характеризуют данную книгу.

Предназначено для преподавателей и студентов экономических вузов и факультетов, колледжей.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161

ISBN 985-470-010-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие “Высшая математика и экономические модели” является фактически вторым томом учебного пособия С.А. Минюка, Е.А. Ровба “Высшая математика” и основано на педагогических принципах, изложенных в предисловии к [42]. Пособие состоит из трех основных частей, списка литературы и приложения в виде вероятностных таблиц. Оно содержит 47 лекций по методам оптимизации, теории вероятностей, математической статистике и их экономическим приложениям.

Данное пособие отражает математическое содержание курсов “Математическое программирование”, “Теория вероятностей и математическая статистика” или родственных им по названию, которые традиционно читаются на экономических специальностях вузов. Наибольшее влияние на содержание книги оказали добротные учебники и учебные пособия различных авторов [7, 10, 11, 13, 14, 20, 22, 23, 25, 29, 32, 37, 39, 40, 41, 50, 54, 57], в частности, односекторная модель оптимального экономического роста заимствована из книги В.А. Колемаева [26], экономические ситуации и их модели, приведенные в лекциях 21 и 29, изложены в соответствии с учебным пособием В.И. Малыхина [39], для анализа финансового рынка использованы книги [24, 26, 39, 41, 45, 57].

Отметим еще раз, что данная книга является прежде всего математической, и здесь содержатся далеко не все экономические модели, где применяются математические методы. В частности, не достаточно представлены экономические модели, которые описываются дифференциальными и разностными уравнениями, экономические модели исследования операций и теории игр, прикладной статистики и т.д. По некоторым из указанных направлений к настоящему времени разработаны целые математические теории, например, математические основы менеджмента [43], синергетическая экономика [21] и т.д. В данной книге не ставилась цель охватить экономические модели в полном объеме.

В пособии используется следующая нумерация и система ссылок. Каждая лекция имеет свою нумерацию теорем, утверждений, лемм и соотношений. При ссылке на соответствующий результат другой лекции используется двойная нумерация, где первая цифра указывает номер лекции. В нумерации рисунков первая цифра также соответствует номеру лекции.

Идейный организатор по написанию этой книги – профессор С.А. Минюк, который фактически является также и ее научным редактором.

Научно-методическую помощь по написанию многих лекций первой части пособия и по формированию списка литературы оказала О.С. Минюк, автором лекций 44-46, является Н.С. Минюк, лекция 47 фактически написана Л.Е. Ровба. Особо отметим Т.С. Игнатчик, которая оказала неоценимую помощь при подготовке рукописи к печати. Всем этим людям мы выражаем искреннюю признательность и благодарность.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам – профессорам И.В Белько, М.М. Ковалеву и коллективу кафедры высшей математики № 2 Белорусской государственной политехнической академии, особенно ее заведующему доценту А.Д. Корзникову за ценные советы и замечания, способствующие улучшению данной книги.

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Лекция 1

Выпуклые множества в пространстве R^n

Даны основные свойства выпуклых множеств; изучены угловые точки выпуклых многогранных областей и выпуклая оболочка системы точек.

Среди геометрических понятий, связанных с R^n, важную роль в экономических приложениях играет понятие выпуклого множества.

1°. Свойства выпуклых множеств. Множество $X \subset R^n$ называется *выпуклым*, если наряду с любыми двумя своими точками оно содержит соединяющий их отрезок. Другими словами, если x^1, $x^2 \in X$, то $x(\lambda) = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X \ \forall \lambda \in [0,1]$.

Примеры выпуклых множеств: квадрат, круг, куб; невыпуклые множества, например, – дуга окружности, кольцо и т.д.

Важным примером выпуклого множества в R^n является *полупространство*, которое определяется как множество всех точек $x = \mathrm{col}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *) координаты которых удовлетворяют заданному неравенству первой степени

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \geq 0, \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b$ – фиксированные числа, причем $a_1, \ldots, a_n$ не все равны нулю.

Теорема 1.

Любое полупространство в R^n есть выпуклое множество.

*) всюду далее символ «col» используется для обозначения вектор-столбца

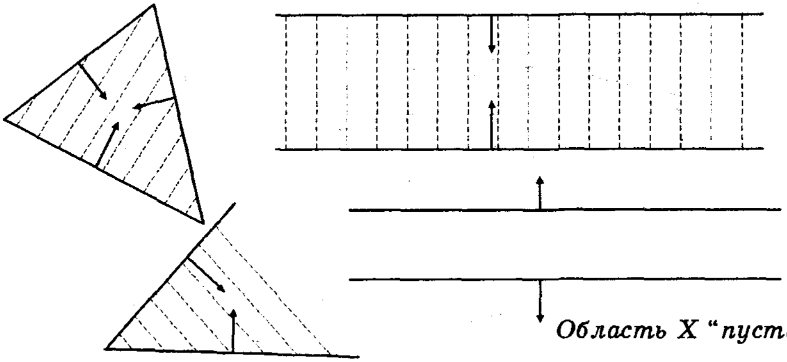


Рис. 1.1

Доказательство. Пусть полупространство Π задано с помощью неравенства (1) и $x^1 = \mathrm{col}\left(x_1^{(1)};\ldots;x_n^{(1)}\right)$, $x^2 = \mathrm{col}\left(x_1^{(2)};\ldots;x_n^{(2)}\right)$ какие-либо две точки из Π.

Рассмотрим произвольную точку $x(\lambda) = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, $\lambda \in [0,1]$ из соединяющего их отрезка. В координатах получим:

$$x_1(\lambda) = \lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}, \ldots, x_n(\lambda) = \lambda x_n^{(1)} + (1-\lambda)x_n^{(2)}.$$

Подставляя эти выражения в левую часть (1), будем иметь

$$\begin{aligned} &a_1\left(\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}\right) + \ldots + a_n\left(\lambda x_n^{(1)} + (1-\lambda)x_n^{(2)}\right) + b = \\ &= \lambda\left(a_1 x_1^{(1)} + \ldots + a_n x_n^{(1)} + b\right) + (1-\lambda)\left(a_1 x_1^{(2)} + \ldots + a_n x_n^{(2)} + b\right) \geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

так как, в силу $x^1 \in \Pi$ и $x^2 \in \Pi$, обе суммы, заключенные в скобки, неотрицательны. Из (2) следует $x(\lambda) \in \Pi$.

Теорема 1 доказана. □

Часто используется следующее свойство: *пересечение любого числа выпуклых множеств – выпуклое множество.*

Проверим это свойство для случая двух множеств X, Y. Пусть $Z = X \cap Y$ и z^1, z^2 – произвольные точки из Z. Ясно, что $z^1, z^2 \in X$; $z^1, z^2 \in Y$. Рассмотрим точку $z(\lambda) = \lambda z^1 + (1-\lambda)z^2$, $\lambda \in [0,1]$. Из выпуклости X и Y вытекает $z(\lambda) \in X$, $z(\lambda) \in Y$ $\forall \lambda \in [0,1]$ и, значит, $z(\lambda) \in Z$.

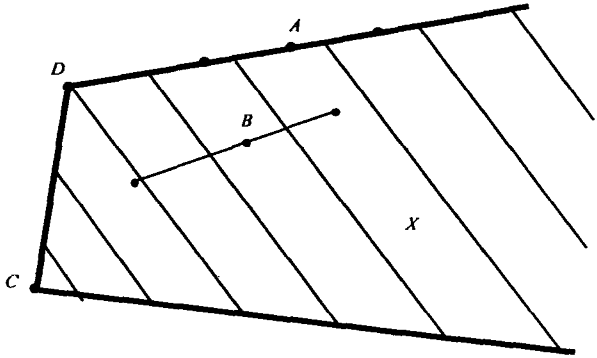


Рис. 1.2

Отсюда следует, что пересечение нескольких полупространств в R^n является выпуклым множеством.

Важнейшими примерами выпуклых множеств являются выпуклые многогранные области в R^n (полиэдральные множества), или просто полиэдры. *Полиэдр* – это множество решений некоторой системы конечного числа линейных неравенств $\left(a_i'x+b_i \geq 0,\ i=\overline{1,m}\right)$, или, что то же самое, пересечение конечного число полупространств.

Напомним, что здесь $a_i'x = (\vec{a}_i, \vec{x})$ – скалярное произведение n-векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{x}$ (a_i и x).

Примеры выпуклых многогранных областей изображены на рис. 1.1.

▷ ***Упражнение 1.*** Показать, что любая гиперплоскость $\left(X=\left\{x\in R^n : a'x=b\right\}\right)$ – выпуклое множество в R^n. □

Отметим, что ограниченная выпуклая многогранная область X в R^n называется выпуклым многогранником в R^n.

Говорят, что множество $X \subset R^n$ ограничено, если существует такое положительное c, что координаты любой точки x из X по модулю не превосходят c, т.е. $|x_1| \leq c, |x_2| \leq c, \ldots, |x_n| \leq c$.

2°. Угловые точки полиэдров. Рассмотрим выпуклую многоугольную область на плоскости, т.е. в R^2. Как правило, такие области

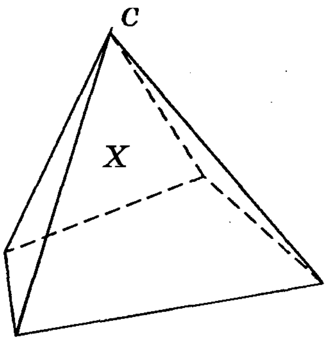


Рис. 1.3

имеют вершины, или по-другому, угловые точки. Выясним точный смысл понятия вершины.

Для области X, изображенной на рис. 1.2, точки A и B не являются вершинами, так как для каждой из них есть отрезок, проходящий через эту точку и целиком содержащийся в X. В то же время для вершин C и D такого отрезка найти нельзя.

Говорят, что точка C выпуклой многогранной области $X \subset R^n$ является *вершиной* или *угловой точкой области* X, если не существует представления C в виде

$$C = \lambda C_1 + (1 - \lambda) C_2,$$

где $C_1 \in X$, $C_2 \in X$ и $0 < \lambda < 1$.

При практическом способе нахождения вершин в случае многоугольной области на плоскости отметим следующее: *для любой вершины C найдутся две граничные прямые, проходящие через C, для которых C является их единственной общей точкой.* В случае выпуклой многогранной области в R^3 для любой вершины C найдутся три граничные плоскости с единственной общей точкой C (на рис. 1.3 через вершину C пирамиды X проходит четыре граничные плоскости, но любых трех из них достаточно, чтобы точка C была единственной общей точкой).

Таким образом, без строгого обоснования, получаем способ нахождения вершины многогранной области.

Пусть область $X \subset R^n$ задана с помощью системы линейных неравенств. Выберем какие-нибудь n из этих неравенств и заменим их равенствами. Получим систему из n линейных уравнений с n неизвестными.

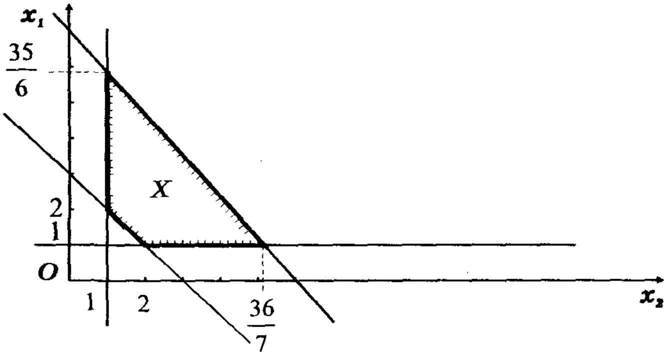


Рис. 1.4

Если эта система имеет единственное решение x, причем $x \in X$, то x – вершина области X. Таким способом можно получить все вершины X.

▷ ***Пример 1.*** Область X задана системой

$$\begin{cases} x_1 - 1 \ge 0,\ x_2 - 1 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 3 \ge 0,\ -6x_1 - 7x_2 + 42 \ge 0. \end{cases}$$

Определить вершины X.

Решение. Заменим каждую пару неравенств уравнениями и получим шесть систем:

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 0, \\ x_2 - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 0, \\ -6x_1 - 7x_2 + 42 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 - 1 = 0, \\ -6x_1 - 7x_2 + 42 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -6x_1 - 7x_2 + 42 = 0. \end{cases}$$

Каждая из этих систем имеет единственное решение соответственно

$$\mathrm{col}(1;1),\ \mathrm{col}(1;2),\ \mathrm{col}(2;1),\ \mathrm{col}\left(1;\frac{36}{7}\right),\ \mathrm{col}\left(\frac{35}{6};1\right),\ \mathrm{col}(-21;24).$$

Заметим, что из шести полученных точек не принадлежат X точки $\mathrm{col}(1;1)$ и $\mathrm{col}(-21;24)$.

Остальные четыре точки $\mathrm{col}(1;2)$, $\mathrm{col}(2;1)$, $\mathrm{col}\left(1;\frac{36}{7}\right)$, $\mathrm{col}\left(\frac{35}{6};1\right)$ являются вершинами X. Область X изображена на рис. 1.4. □

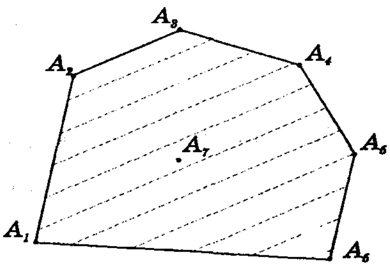


Рис. 1.5

3^0. Выпуклая оболочка системы точек. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – некоторый набор точек из R^n. Любая точка вида

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k,$$

где $\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \ldots, \lambda_k \ge 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1$, называется *выпуклой линейной комбинацией* точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Множество всех выпуклых линейных комбинаций точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называют *выпуклой оболочкой системы точек* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (см. рис. 1.5) и обозначают $\mathrm{conv}\,(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ (от английского “convex” – выпуклый).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.

Множество $L = \mathrm{conv}\,(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ *есть наименьшее из всех выпуклых множеств, содержащих точки* $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 необходимо доказать следующее:

1. L содержит каждую из точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

2. L выпукло.

3. Каково бы ни было выпуклое множество X, содержащее каждую из точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$, имеет место включение $L \subset X$.

Первое утверждение тривиально, так как $A_1 = 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + \ldots + 0 \cdot A_k$, откуда вытекает $A_1 \in L$; аналогично показывается, что $A_2 \in L, \ldots, A_k \in L$.

Для сокращения записей второе и третье утверждения будем доказывать для трех точек A_1, A_2, A_3. Пусть некоторые точки B и C принадлежат L. Тогда

$$B=\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\lambda_3 A_3,\quad C=\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+\alpha_3 A_3,$$
$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ge 0,\quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,$$
$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\ge 0,\quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1.$$

Любая точка x отрезка BC, соединяющего точки B и C, имеет вид $x=\lambda B+\alpha C$, где $\alpha,\lambda\ge 0$, $\alpha+\lambda=1$. Отсюда

$$x=\lambda(\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\lambda_3 A_3)+\alpha(\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+\alpha_3 A_3)=$$
$$=(\lambda\lambda_1+\alpha\alpha_1)A_1+(\lambda\lambda_2+\alpha\alpha_2)A_2+(\lambda\lambda_3+\alpha\alpha_3)A_3.$$

Так как коэффициенты в последнем выражении неотрицательны и их сумма равна 1, т.е.

$$(\lambda\lambda_1+\alpha\alpha_1)+(\lambda\lambda_2+\alpha\alpha_2)+(\lambda\lambda_3+\alpha\alpha_3)=\lambda(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\alpha(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=1,$$

то $x\in L$, что и доказывает выпуклость L.

Докажем утверждение 3. Пусть X – любое выпуклое множество, содержащее каждую из точек A_1, A_2, A_3.

Рассмотрим любую точку из L:

$$\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\lambda_3 A_3;\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ge 0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1.$$

Имеем

$$\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2=(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}A_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}A_2\right).$$

Точка $B=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}A_1+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}A_2$ принадлежит отрезку A_1A_2.

Так как X – выпуклое множество, то $B\in X$. Далее имеем

$$\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\lambda_3 A_3=(\lambda_1+\lambda_2)B+\lambda_3 A_3=$$
$$=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}B+\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}A_3\right)=C,$$

где точка C принадлежит отрезку BA_3 и, значит, $C\in X$. Таким образом показано, что любая выпуклая линейная комбинация точек A_1, A_2, A_3 принадлежит X, т.е. $L\subset X$. Теорема 2 доказана. □

Рассмотрим модельный экономический пример выпуклой оболочки системы точек. Пусть предприятие выпускает два вида товаров T_1, T_2. В любой из дней предприятие может работать по одной из трех технологий 1, 2, 3. Пусть $A_i = \text{col}\left(a_1^{(i)}; a_2^{(i)}\right)$ – набор товаров, производимых за день работы по i-ой технологии, $i = 1, 2, 3$. Рассмотрим промежуток времени, состоящий из t дней. Пусть из них t_1 дней отведено технологии 1, t_2 дней – технологии 2, t_3 дней – технологии 3. Тогда набор B товаров, произведенных за промежуток t, следующий:

$$B = t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3 = \frac{t_1}{t} B_1 + \frac{t_2}{t} B_2 + \frac{t_3}{t} B_3,$$

где $B_i = tA_i$; $i = 1,2,3$.

Ясно, что точка B – выпуклая линейная комбинация точек B_1, B_2, B_3. Значит, множество всех наборов, которые предприятие может выпустить за период t, есть выпуклая оболочка точек B_1, B_2, B_3.

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Изобразить на плоскости полиэдр, задаваемый системой неравенств

$$\begin{aligned} &3x_1 + x_2 \le 18,\\ &4x_1 - ax_2 \ge -24,\\ &bx_1 - 12x_2 \le 36,\\ &cx_1 + 3x_2 \ge -27. \end{aligned}$$

№	a	b	c
1	2	2	1
2	3	3	1
3	4	4	1
4	6	2	1
5	8	3	1

2. Найти все вершины полиэдров в R^2, задаваемых следующими системами:

а) $$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \le 8,\\ &2x_1 - 5x_2 \le 20,\\ &-x_1 + x_2 \le 2,\\ &x_1 \ge -5; \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 6,\\ &-3x_1 + x_2 \le 9,\\ &x_1 + 2x_2 = 4; \end{aligned}$$

в) $-3x_1+6x_2\le 13,$ $3x_1+2x_2\le 9,$ $-x_1+2x_2=4;$

г) $-3x_1+2x_2\le 0,$ $x_1-x_2\le -1,$ $-x_1+2x_2\le 4.$

3. Изобразить на плоскости сумму двух выпуклых множеств:

отрезка $X=\left[x^1,x^2\right]$, где $x^1=\mathrm{col}(4;a)$, $x^2=\mathrm{col}(4;3)$ и

1) круга $X_1=\left\{x\in R^2 \,\middle|\, (x_1-b)^2+(x_2-c)^2\le 1\right\}$, или

2) квадрата $X_2=\left\{x\in R^2 \,\middle|\, |x_1-b|\le 1, |x_2-c|\le 1\right\}$, или

3) треугольника $X_3=\mathrm{conv}\{\mathrm{col}(-2;-1), \mathrm{col}(1;b), \mathrm{col}(3;-c)\}$:

№	a	b	c
1	1	2	1
2	0	3	2
3	–1	4	3
4	2	2	1

4. В пространстве R^3 заданы шесть точек:

$$x^1=\mathrm{col}(-2;-1;a),\quad x^2=\mathrm{col}(7;-3;b),\quad x^3=\mathrm{col}(c+2;-1;-a),$$

$$x^4=\mathrm{col}(1;-1;-1-a),\quad x^5=\mathrm{col}(1;0;1),\quad x^6=\mathrm{col}(-9-c;4;a-b),$$

а также точка $x^0=\dfrac{1}{6}\sum_{j=1}^{6}x^j$. Представить x^0 в виде линейной выпуклой комбинации не более четырех из точек $x^1,\ldots,x^6$:

№	a	b	c
1	4	–10	4
2	3	–7	4
3	3	–7	3
4	1	–1	4
5	1	–1	3

■ Лекция 2

Общая задача оптимизации и линейное программирование

Даны постановки общей задачи оптимизации и задачи линейного программирования; рассмотрены экономические примеры задач линейного программирования

1°. Постановка задач оптимизации. На практике часто встречаются такие ситуации, когда достичь какого-то результата можно не одним, а многими различными способами. Естественно, что в этом случае выбирается в каком-то смысле наилучший способ. Математически последнее обычно сводится к нахождению наименьшего или наибольшего значения некоторой функции, т.е. к следующей задаче: найти $\min(\max) f(x)$ при условии, что точка x пробегает заданное множество X. Используют запись:

$$f(x) \to \min(\max), \; x \in X. \tag{1}$$

Определенную таким образом задачу называют *задачей оптимизации*; при этом X называют *допустимым множеством* (множеством планов) задачи (1), а функцию $f(x)$ – целевой функцией.

Ясно, что если x задано набором нескольких чисел, т.е. $x \overset{def}{=} \vec{x} = \operatorname{col}(x_1; \ldots; x_n)$, то множество $X \subset R^n$.

Часто множество X задается с помощью системы нестрогих неравенств:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, \ldots x_n) \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, \ldots x_n) \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_m$ – заданные функции в R^n.

Другими словами, X – множество точек $\operatorname{col}(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R^n$, удовлетворяющих системе неравенств (2).

В этом случае задача оптимизации принимает следующий вид: даны функция n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ и система неравенств (2); требуется найти $\min(\max) f$ при условиях (2) ($f(x_1, \ldots, x_n) \to \min(\max)$ при условиях (2)).

Как правило нужно найти не только значение $\min(\max) f$, но и точку или точки, если она не одна, в которых это значение достигается. Множество всех таких оптимальных решений обозначим X^* (или $\operatorname{Argmin}_{x \in X}(\max) f(x)$).

Задачи подобного рода называют задачами *математического программирования*. При этом функцию f называют *целевой функцией*, а неравенства $g_j \geq 0,\ j = \overline{1, m}$, – ограничениями. Часто в число ограничений входят условия неотрицательности части или всех переменных.

В зависимости от характера функций $f, g_1, \ldots g_m$ говорят о различных видах задач математического программирования. Наиболее простой случай, когда все эти функции имеют вид $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b$, т.е. являются линейными. В этом случае будем говорить о *задаче линейного программирования* (ЛП). ЛП как отдельный раздел оформилось в 40-50-х годах XX в., когда стало ясно, что множество задач из сферы планирования и управления можно сформулировать в виде задач ЛП. Подсчитано [50, с. 129], что в настоящее время примерно 80-85 % всех решаемых на практике задач оптимизации относится к задачам ЛП.

Для решения таких задач разработаны эффективные методы, в частности так называемый симплекс-метод.

Отметим, что одновременно рассматривать оба типа задач: $f(x) \to \max, x \in X$ и $f(x) \to \min, x \in X$ нет необходимости, так как задача на максимум $f(x) \to \max, x \in X$ сводится к задаче на минимум (и наоборот) путем умножения целевой функции на -1. В связи с этим дальше будем изучать задачи только какого-нибудь одного типа.

2⁰. Примеры задач линейного программирования. Приведем четыре примера задач ЛП, ставшие классическими.

а) ***Задача планирования производства.*** Пусть некоторое предприятие производит n типов товаров, затрачивая при этом m типов ресурсов. Известны следующие параметры:

a_{ij} – количество i-го ресурса, необходимое для производства единичного количества j-го товара, $a_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$;

b_i – запас i-го ресурса на предприятии, $b_i > 0$;

c_j – цена единичного количества j-го товара, $c_j > 0$.

Считаем, что технология производства линейна, т.е. затраты ресурсов растут прямо пропорционально объему производства. Пусть x_j показывает планируемый объем производства j-го товара. Тогда допустимым является только такой набор производимых товаров $x = \mathrm{col}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ при котором суммарные затраты каждого i-го ресурса не превосходят его запаса:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Кроме этого, имеется следующее естественное ограничение:

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Стоимость набора товаров x выражается величиной

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{5}$$

Задача планирования производства ставится так: среди всех векторов x, удовлетворяющих ограничениям (3), (4), найти такой, при котором величина (5) принимает наибольшее значение.

б) ***Задача о рационе.*** При организации питания больших коллективов людей, например в армии, больницах и т.п., возникает задача о наиболее экономном рационе питания, удовлетворяющем определенным медицинским требованиям. Пусть имеется n продуктов питания (хлеб, мясо, молоко, картофель и т.п.), в которых учитывается m полезных веществ (жиры, белки, углеводы, витамины и т.п.) и известны следующие параметры:

a_{ij} – содержание i-го вещества в единичном количестве j-го продукта, $a_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$;

b_i – минимальное количество i-го вещества, которое должно потребляться индивидуумом в расчете, скажем, на месяц, $b_i > 0$;

c_j – цена единичного количества j-го продукта, $c_j > 0$.

Задача о рационе формулируется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = \overline{1,m}, \qquad (6)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},$$

где x_j – количество j-го продукта, потребляемого индивидуумом в течение месяца. Другими словами, среди всех рационов питания $x = \mathrm{col}(x_1;\ldots;x_n)$, покрывающих минимальные потребности индивидуума в полезных веществах, необходимо выбрать наиболее дешевый.

в) ***Транспортная задача.*** Пусть некоторый однородный продукт (уголь, кирпич, картофель и т.п.) хранится на m складах и потребляется в n пунктах.

Известны следующие параметры:

a_i – запас продукта на i-том складе, $a_i > 0$; $i = \overline{1,m}$;

b_j – потребность в продукте в j-ом пункте, $b_j > 0$; $j = \overline{1,n}$;

c_{ij} – стоимость перевозки единичного количества продукта с i-го склада в j-ый пункт, $c_{ij} > 0$.

При этом суммарные запасы равны суммарным потребностям:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (7)$$

Транспортная задача ставится так:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n},$$

$$x_{ij} \ge 0;\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

где x_{ij} показывают количество продукта, перевозимого с i-го склада в

j-ый пункт. Иными словами, требуется организовать перевозки продукта со складов в пункты потребления так, чтобы при полном удовлетворении потребностей минимизировать суммарные транспортные расходы. Заметим, что условие (7) является необходимым и достаточным для существования, по крайней мере, одной матрицы перевозок $X = (x_{ij})$, удовлетворяющей ограничениям задачи (8).

г) ***Задача о банке***. Для простоты рассмотрим числовой пример такой задачи. Пусть собственные средства банка в сумме с депозитами составляют 100 млн. долларов. Часть этих средств, но не менее 35 млн. долларов должна быть размещена в кредитах. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно. Другое дело ценные бумаги, особенно государственные. Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль или, как правило, без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. Считаем, что ликвидное ограничение следующее: ценные бумаги должны составлять не менее 30 % средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.

Пусть x_1 – средства (млн. долл.), размещенные в кредитах, x_2 – средства, вложенные в ценные бумаги.

Тогда должны выполняться следующие линейные ограничения: балансовое ограничение

$$x_1 + x_2 \le 100; \quad \textbf{(9)}$$

кредитное ограничение

$$x_1 \ge 35; \quad \textbf{(10)}$$

ликвидное ограничение

$$x_2 \ge 0{,}3(x_1 + x_2); \quad \textbf{(11)}$$

условие неотрицательности

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \quad \textbf{(12)}$$

Если c_1 – доходность кредитов, а c_2 – доходность ценных бумаг, то цель банка состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max \text{ при условиях (9)-(12).}$$

Так как кредиты менее ликвидны, чем ценные бумаги, то обычно $c_1 > c_2$. Получаем задачу ЛП с ограничениями (9)-(12) и целевой функцией f, которую нужно максимизировать.

Замечание 1. Из рассмотренных выше примеров, казалось бы, только первый, второй и четвертый подходят под общую схему задач математического программирования из пункта 1^0, так как в третьем примере не все ограничения неравенства; часть из них являются уравнениями. Однако случай уравнений легко свести к случаю неравенств, например, достаточно каждое уравнение $g(x)=0$ заменить системой из двух неравенств $g(x)\geq 0$ и $-g(x)\geq 0$.

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Прядильная фабрика для производства двух видов пряжи использует три типа сырья – чистую шерсть, капрон и акрил. В табл. 1 указаны нормы расхода сырья, его общее количество, которое может быть использовано фабрикой в течение года, и прибыль от реализации тонны пряжи каждого вида.

Таблица 1

Тип сырья	*Нормы расхода сырья на 1 т пряжи (т)*		*Количество сырья (т)*
Шерсть	0.5	0.2	600
Капрон	a	0.6	b
Акрил	$0.5-a$	0.2	c
Прибыль от реализации 1т пряжи (долл.)	1100	900	

Требуется составить задачу ЛП годового производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли:

№	a	b	c	№	a	b	c
1	0.1	620	500	6	0.1	870	510
2	0.1	730	500	7	0.1	790	520
3	0.1	840	500	8	0.2	920	400
4	0.1	650	510	9	0.2	850	400
5	0.1	760	510	10	0.2	780	400

2. Строителям требуются комплекты досок, каждый из которых со-

стоит из a – досок длиной 1.5 м и b – досок длиной 0.6 м. Составить задачу ЛП по распилке c четырехметровых досок, чтобы получить наибольшее количество указанных комплектов:

№	a	b	c	№	a	b	c
1	1	3	660	6	2	5	770
2	1	3	720	7	2	5	880
3	1	3	780	8	2	5	990
4	1	3	840	9	3	7	640
5	2	5	660	10	3	7	800

■ Лекция 3

Задача линейного программирования и ее свойства

Даны общая формулировка задачи ЛП и две ее разновидности: каноническая задача ЛП, стандартная задача ЛП; приведены геометрические свойства задачи ЛП; дано строение множества оптимальных решений.

1°. Постановки задач ЛП. Дадим вначале общую формулировку задачи ЛП.

Пусть S – система линейных ограничений, т.е. линейных уравнений или нестрогих линейных неравенств с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $f(x)$ – целевая функция вида

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0. \tag{1}$$

Нужно решить задачу

$$f(x) \to \min \text{ при условиях } S.$$

Как правило, система S содержит условия неотрицательности всех (или части) переменных:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \tag{2}$$

что вытекает из реального экономического смысла чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ограничения вида (2) называют *тривиальными.*

Наиболее часто встречаются следующие две разновидности задачи ЛП:

1. *Каноническая задача ЛП.* Для такой задачи система S, помимо тривиальных ограничений (2) включает в себя только уравнения. Примером может служить транспортная задача ЛП, сформулированная в предыдущей лекции.

2. *Стандартная задача ЛП.* В этом случае система S состоит только из неравенств, в число которых входят тривиальные ограничения (2). Примерами могут служить задачи планирования производства, о рационе и о банке, сформулированные в лекции 2.

Указанные две разновидности сводятся одна к другой. Покажем сначала, как свести стандартную задачу к канонической.

Пусть имеется стандартная задача ЛП (задача A):

$$f = c_1x_1 + \ldots c_nx_n + c_0 \to \min \text{ при условиях } S,$$

где S – заданная система линейных неравенств, включающая (2). Обозначим число нетривиальных неравенств в системе S через m и рассмотрим любое из них:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \geq 0. \tag{3}$$

Введем новую дополнительную переменную и заменим неравенство (3) двумя ограничениями: уравнением

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = x_{n+1}$$

и условием $x_{n+1} \geq 0$.

Если указанную замену произвести с каждым нетривиальным неравенством системы S, то получим новую систему S_1, состоящую из уравнений, а также условий неотрицательности всех переменных: исходных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а также дополнительных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$. Отметим, что дополнительные переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ обычно называют *балансовыми*.

Задачу

$$f \to \min \text{ при условиях } S_1$$

назовем задачей B.

Легко убедиться в эквивалентности задач A и B: любое оптимальное решение задачи A дает оптимальное решение задачи B, если к значениям переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ добавить значения балансовых переменных; обратно, любое оптимальное решение задачи B, если отбросить значения балансовых переменных, дает оптимальное решение задачи A.

Покажем теперь, как свести каноническую задачу к стандартной. Для наглядности рассотрим пример.

Пусть дана задача ЛП (задача B):

$$f = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min \text{ при условиях}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Применяя к системе из двух уравнений (4) метод Гаусса, выделим базис неизвестных:

$$x_3 = 4x_1 - 6x_2 + 5,$$
$$x_4 = -x_1 + 2x_2 - 3.$$

С учетом полученных равенств напишем новое выражение для f:

$$f = x_1 + 2x_2 + (4x_1 - 6x_2 + 5) - (-x_1 + 2x_2 - 3) = 6x_1 - 6x_2 + 8.$$

Рассмотрим теперь новую задачу ЛП (задачу A):

$$f = 6x_1 - 6x_2 + 8 \to \min \text{ при условиях}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5 \geq 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Таким образом, задача B свелась к стандартной задаче A с меньшим числом переменных.

2^0. Геометрические свойства задачи ЛП. Рассмотрим задачу ЛП по отысканию максимума (или минимума) линейной функции $f(x) = (\vec{c}, \vec{x})((c, x))$ на допустимом множестве X, заданном с помощью системы S линейных ограничений (уравнений или нестрогих неравенств). Напомним (см. Л. 1), что в этом случае множество X называют выпуклой многогранной областью в R^n или полиэдром. Таким образом, геометрический смысл задачи ЛП состоит в отыскании максимума (минимума) заданной линейной функции $f(x)$ на заданном выпуклом множестве $X \subset R^n$.

Будем говорить, что *целевая функция в задаче ЛП ограничена*, если в задаче на максимум целевая функция ограничена на допустимом множестве сверху, а в задаче на минимум – снизу.

Сформулируем без доказательства два основных свойства задачи ЛП.

Теорема 1.

Если в задаче ЛП допустимое множество непусто и целевая функция ограничена, то существует хотя бы одно оптимальное решение.

При исследовании задачи ЛП важную роль играет понятие угловой точки. Напомним, что точка $x^0 \in X$ называется *угловой точкой* множества X, если она не является внутренней точкой ни для какого отрезка AB, целиком содержащегося в X.

Теорема 2.

Если в задаче ЛП $f(x) = \max(\min)$ *при условии* $x \in X$ *допустимое множество X имеет хотя бы одну угловую точку, а целевая функция* $f(x)$ *ограничена, то угловая точка X, в которой* $f(x)$ *принимает наибольшее (наименьшее) значение среди всех угловых точек X, является оптимальным решением данной задачи.*

Из теоремы 2 вытекает, что задачу ЛП с ограниченной целевой функцией и не слишком большим числом угловых точек можно решать применяя *следующий метод перебора вершин*: находим все угловые точки допустимого множества X и среди этих точек находим точку с оптимальным (максимальным или минимальным) значением целевой функции, причем найденная точка и есть оптимальное решение (может только не единственное).

Однако указанный способ решения задачи ЛП, как правило, требует громоздких вычислений. Далее будет изложен так называемый симплекс-метод, который представляет собой целенаправленную процедуру перебора.

Полезна также следующая лемма (без доказательства).

Лемма 1.

Пусть X^* *– множество всех оптимальных решений задачи ЛП* $f(x) = (c, x) \to \max$ *при условии* $x \in X$. *Тогда всякая угловая точка множества* X^* *является угловой точкой допустимого множества X.*

3⁰. Строение множества оптимальных решений. Напомним, что допустимое ограниченное множество X в задаче ЛП является выпуклым многогранником. Имеет место следующая лемма о строении выпуклых многогранников.

Лемма 2.

Выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой своих угловых точек.

Покажем, что справедлива следующая теорема о строении множества X^*.

Теорема 3.

Если в задаче ЛП допустимое множество X непусто и ограничено, то такая задача разрешима, а множество всех оптимальных решений X^* является выпуклой оболочкой оптимальных угловых точек X.

Доказательство. В силу ограниченности X найдется такое число M, что для любой точки $x \in X$ все ее координаты по модулю не превосходят M: $|x_1| \le M, |x_2| \le M, \ldots, |x_n| \le M$. Пусть $f(x) = (c, x)$ – целевая функция, а $C = \max\{|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_n|\}$ – наибольшее значение модуля ее коэффициентов. Имеем:

$$|f(x)| = |c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n| \le$$

$$\le \left| |c_1||x_1| + |c_2||x_2| + \ldots + |c_n||x_n| \right| \le n \cdot C \cdot M.$$

Значит, $f(x)$ ограничена и сверху, и снизу на X.

По теореме 1 имеется хотя бы одно оптимальное решение, т.е. задача ЛП разрешима. Пусть X^* – множество всех оптимальных решений. Так как $X^* \subset X$, то X^* – ограниченное множество. По лемме 2 множество X^* совпадает с выпуклой оболочкой своих угловых точек. По лемме 1 угловые точки X^* являются и угловыми точками множества X. Теорема 3 доказана. □

В заключение отметим, что утверждение теоремы 3 в некоторых случаях остается в силе и при неограниченном допустимом множестве, что подтверждает стандартная задача о рационе.

✍ Задания для самостоятельной работы

1. Привести следующую задачу ЛП к стандартной форме:

$$4x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \sim 1,$$
$$3x_2 + x_3 \approx 2,$$
$$-x_2 + 5x_2 + 2x_3 \rhd 4,$$
$$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0:$$

№	$\sim$	$\approx$	$\rhd$	№	$\sim$	$\approx$	$\rhd$
1	$\geq$	$=$	$\leq$	6	$=$	$\leq$	$=$
2	$=$	$\leq$	$\geq$	7	$\leq$	$=$	$\geq$
3	$\leq$	$=$	$=$	8	$\geq$	$=$	$=$
4	$=$	$\geq$	$\geq$	9	$=$	$\geq$	$\leq$
5	$\geq$	$=$	$\geq$	10	$\leq$	$\geq$	$=$

2. Привести следующую задачу ЛП к канонической форме:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 \sim 2,$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 \approx 1,$$
$$x_2 + x_3 \rhd 3,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0:$$

№	$\sim$	$\approx$	$\rhd$	№	$\sim$	$\approx$	$\rhd$
1	$\geq$	$=$	$\leq$	6	$=$	$\leq$	$\leq$
2	$\geq$	$\geq$	$\leq$	7	$\leq$	$\geq$	$\leq$
3	$\geq$	$\leq$	$\geq$	8	$\leq$	$\leq$	$\geq$
4	$=$	$\geq$	$\geq$	9	$\leq$	$\geq$	$\geq$
5	$\geq$	$\leq$	$=$	10	$\leq$	$\leq$	$=$

3. Найти решение следующей задачи ЛП методом перебора вершин:

$$ax_1 + x_2 + 8x_3 \to \max,$$
$$x_1 + bx_2 + x_3 \geq 1,$$
$$x_1 + x_2 + cx_3 \leq 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0:$$

№	a	b	c	№	a	b	c
1	$\frac{4}{3}$	4	5	6	$\frac{4}{3}$	4	6
2	$\frac{3}{2}$	6	4	7	$\frac{16}{5}$	3	2
3	$\frac{7}{3}$	2	3	8	$\frac{6}{5}$	2	6
4	$\frac{6}{5}$	3	6	9	$\frac{9}{5}$	3	4
5	$\frac{5}{4}$	2	7	10	$\frac{7}{2}$	4	2

■ *Лекция 4*

Графический метод решения задачи линейного программирования при малом числе переменных

Изложен графический метод решения задачи ЛП в случаях двух или трех переменных.

1°. Решение задачи ЛП в случаях двух переменных. Пусть область допустимых решений X задается системой неравенств вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \geq b_m, \end{cases}$$

а целевая функция $f = c_1x_1 + c_2x_2$. Требуется найти максимум (или минимум) f на X, а также точку, в которой достигается этот максимум (или минимум).

Введем следующее понятие: *линией уровня* функции $f(x_1, x_2)$ называется множество всех точек $\mathrm{col}\,(x_1;\, x_2)$ в которых эта функция принимает некоторое постоянное значение α. Для линейной функции $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ все линии уровня являются прямыми, перпендикулярными общему вектору нормали $\vec{c} = \mathrm{col}(c_1; c_2)$.

Графический метод состоит в следующем.

1. Строится множество X всех допустимых решений.

2. Если $X = \varnothing$, то задача не имеет решения.

3. Если $X = \varnothing$, то рассматриваются прямые уровня $f = \alpha$ при монотонном изменении α от $-\infty$ до $+\infty$.

При увеличении α прямая $f = \alpha$ смещается параллельно в направлении вектора $\vec{c}$. Если A – первая точка встречи прямой уровня с областью X, $f(A) = \alpha_0$, то прямая уровня $f = \alpha$ при $\alpha < \alpha_0$ не имеет общих точек с X. Значит, $\alpha_0 = \min f$ на X. Аналогично, если A – последняя точка пересечения линии уровня с X, то $f(A) = \max f$ на X.

Если первой точки пересечения линии уровня с X не существует, т.е. при всех α из некоторого промежутка вида $(-\infty, \alpha_0]$ прямая $f = \alpha$ пересекает X, то $\min f = -\infty$ на X, и задача на минимум не имеет решения. Если не существует последней точки пересечения, то $\max f = +\infty$ на X, и задача на максимум не имеет решения.

Таким образом, из чертежа всегда видно, разрешима задача или нет. Из чертежа также видно, имеются ли у допустимого множества X вершины. Отметим, что отсутствие вершины – явление редкое. Непустое допустимое множество X без вершин может быть только двух видов: 1) X – полуплоскость; 2) X – область, ограниченная двумя параллельными прямыми.

Если у X имеется хотя бы одна вершина, то при ограниченной целевой функции оптимальное значение можно найти методом перебора вершин (см. Л.3). Для вычисления целевой функции в некоторой вершине V допустимого множества X необходимо знать точное значение ее координат. Для определения координат вершины V решаем систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 = b_j, \end{cases}$$

где i и j – номера прямых, ограничивающих область X, на пересечении которых находится вершина V.

При использовании графического метода можно избежать полного перебора вершин. Действительно, если из чертежа видно, что A – единственная первая (или последняя) точка пересечения линии уровня с X, то не нужно вычислять координаты других вершин, так как A – единственное оптимальное решение.

В некоторых случаях из чертежа не ясно, в какой именно точке линия уровня пересекает в первый раз допустимое множество X. В этом случае нужно найти координаты всех "подозрительных" на оптимальность вершин, вычислить для указанных вершин их значения целевой функции и выбрать из них вершины с оптимальным значением. Заме-

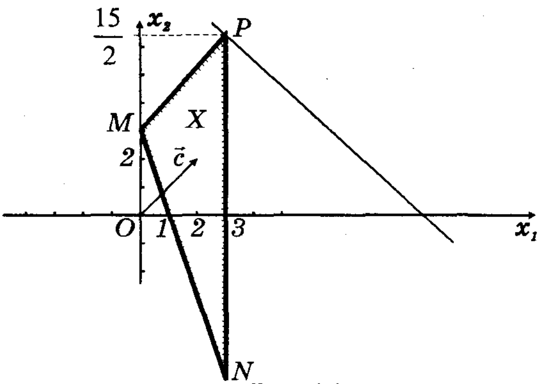


Рис. 4.1

тим, что могут быть две оптимальные вершины A и B. Тогда множество всех оптимальных решений X^* – весь отрезок AB.

Пусть $\alpha_0 = \max f$ (или $\alpha_0 = \min f$) – оптимальное значение f на X. Множество X^* – подмножество линии уровня $f = \alpha_0$, причем X^* выпукло как пересечение выпуклых множеств. Поэтому возможны лишь следующие случаи: а) X^* – точка на прямой уровня $f = \alpha_0$; б) X^* – отрезок на прямой уровня $f = \alpha_0$; в) X^* – луч, лежащий на прямой $f = \alpha_0$; г) X^* – совпадает с прямой уровня $f = \alpha_0$.

▷ ***Пример 1.*** Требуется максимизировать линейную форму $f = 2x_1 + 2x_2$ при ограничениях: $3x_1 - 2x_2 \geq -6$, $3x_1 + x_2 \geq 3$, $x_1 \leq 3$.

Решение. Заменяя знаки неравенств на знаки точных равенств, построим область решений по уравнениям прямых $3x_1 - 2x_2 + 6 = 0$, $3x_1 + x_2 - 3 = 0$, $x_1 = 3$ (рис. 4.1).

Областью решений неравенств является треугольник MNP. Построим вектор $\vec{c} = \mathrm{col}(2;2)$. Тогда линия уровня при выходе из треугольника решений пройдет через точку $P\left(3;\frac{15}{2}\right)$, а значит в точке P линейная

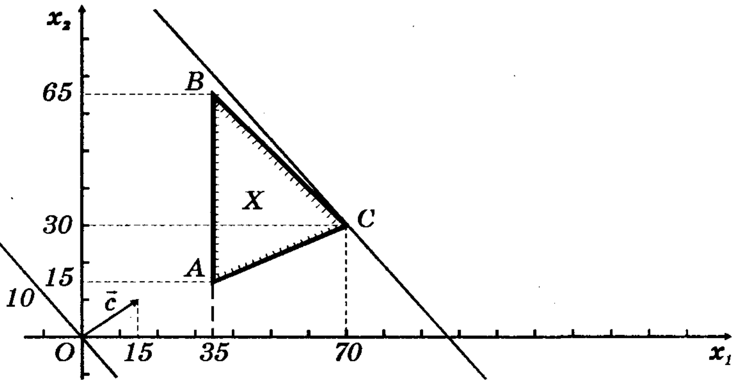


Рис. 4.2

функция $f = 2x_1 + 2x_2$ принимает наибольшее значение, т.е. максимизируется и $f_{\max} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot \dfrac{15}{2} = 21$. □

▷ ***Пример 2.*** Решить графически задачу о банке из Л.2 при $c_1 = 0.15$; $c_2 = 0.1$. Нужно максимизировать линейную функцию $f = 0.15x_1 + 0.1x_2$ при ограничениях: $x_1 + x_2 \le 100$; $x_1 \ge 35$; $x_2 \ge 0.3(x_1 + x_2)$; $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$.

Решение. Областью решений указанных неравенств будет треугольник ABC, изображенный на рис. 4.2.

Построим вектор $\vec{c}$ и прямую уровня, перпендикулярную вектору $\vec{c}$ и проходящую через начало координат. Перемещая эту прямую параллельно в направлении вектора $\vec{c}$, найдем последнюю точку пересечения прямой уровня и допустимого множества X. Это будет точка C и ее координаты получаются при решении следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 100, \\ x_2 = 0.3(x_1 + x_2). \end{cases}$$

Итак, оптимальный портфель активов (точка максимума)

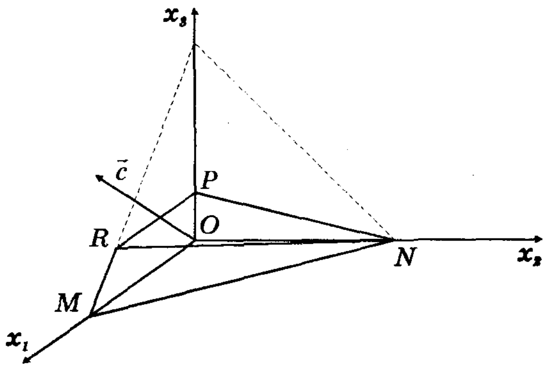


Рис. 4.3

есть $\mathrm{col}(x_1^*;x_2^*)=\mathrm{col}(70;30)$. Максимальная прибыль составит $f_{\max}=f(x_1^*,x_2^*)=0.15\cdot 70+0.1\cdot 30=13.5.$ □

2⁰. Случай трех переменных. Для функции $f(x_1,x_2,x_3)$ аналогом линии уровня является поверхность уровня, т.е. множество всех точек трехмерного пространства R^3, в которых функция $f(x_1,x_2,x_3)$ принимает определенное значение. Для функции вида $f=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$ всякая поверхность уровня – это плоскость с вектором нормали $\vec{c}=\mathrm{col}(c_1;c_2;c_3)$. Будем считать, что допустимое множество не пусто и решение задачи на min(max) существует. Если эту плоскость $f=\alpha$ передвигать параллельно самой себе в положительном направлении вектора $\vec{c}$, то линейная функция $f=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$ будет возрастать, а в противоположном направлении убывать. Пусть при движении плоскости $f=\alpha$ в положительном направлении вектора $\vec{c}$ она впервые встретится с многогранником решений в его вершине, тогда в этом положении α_1 плоскость $f=\alpha_1$ становится опорной и на этой плоскости функция f принимает наименьшее значение. При дальнейшем движении в том же направлении (положительном) плоскость $f=\alpha$ пройдет через другую вершину многогранника решений, выходя из области решений, и станет

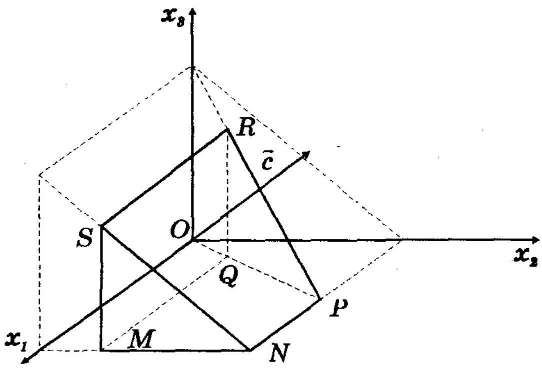


Рис. 4.4

также опорной плоскостью $f = \alpha_2$; на ней функция f принимает наибольшее значение среди всех значений, принимаемых на многограннике решений. Опорная плоскость может иметь с многогранником решений и бесконечное множество общих точек, которые есть ребро или грань многогранника.

▷ ***Пример 3.*** Найти наибольшее значение функции $f = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$ при ограничениях: $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6$, $x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 8$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

Решение. Построим область решений системы неравенств, взяв плоскости $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$, $x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 8$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Эта область есть многогранник $MNOPR$ (рис.4.3).

Построим вектор $\vec{c} = \mathrm{col}(3;-6;2)$. При перемещении плоскости $3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = \alpha$ в положительном направлении вектора $\vec{c}$ она выйдет из многогранника решений в точках ребра MR. Следовательно, наибольшее значение данная функция принимает в точках ребра MR. Убедимся в этом, представляя координаты точек $M(2;0;0)$ и $R\left(\frac{16}{11};0;\frac{9}{11}\right)$ в линейную форму $f = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$; получим $f_{\max} = f(M) = f(R) = 6$. □

▷ ***Пример 4.*** Найти наибольшее значение функции $f = 2x_1 + 6x_2 + 6x_3$ при ограничениях: $x_2 + x_3 \le 3,\ x_1 - x_2 \ge 0,\ x_2 \ge 1,\ 3x_1 + x_2 \le 15.$

Решение. Построим область решений системы неравенств по уравнениям плоскостей: $x_2 + x_3 = 3,\ x_1 - x_2 = 0,\ x_2 = 1,\ 3x_1 + x_2 = 15$. Областью решений будет многогранник $MNPQRS$ (рис. 4.4).

Построим вектор $\vec{c} = \mathrm{col}(2;6;6)$. При перемещении плоскости $f = \alpha$ в положительном направлении вектора $\vec{c}$ она выйдет из многогранника решений в точке $N(4;3;0)$. Поэтому в точке N линейная функция $f = 2x_1 + 6x_2 + 6x_3$ примет наибольше значение, т.е. $f_{max} = 8 + 18 + 0 = 26$. □

✍ Задания для самостоятельной работы

1. Используя геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned}
&ax_1 + x_2 \to \min,\\
&x_1 + (b-3)x_2 \ge b,\\
&(c-4)x_1 + x_2 \ge c,\\
&3x_1 + 2x_2 \ge 11,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0:
\end{aligned}$$

№	a	b	c	№	a	b	c
1	$\frac{1}{4}$	5	9	6	$\frac{1}{2}$	7	6
2	$\frac{5}{4}$	4	6	7	$\frac{1}{6}$	8	8
3	$\frac{9}{2}$	7	8	8	$\frac{5}{2}$	4	7
4	$\frac{7}{4}$	8	7	9	$\frac{13}{3}$	5	8
5	$\frac{5}{2}$	6	6	10	$\frac{2}{3}$	6	7

2. Используя геометрические построения и метод исключения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$
\begin{aligned}
&ax_2 - 3x_3 \to \max,\\
&2x_1 + bx_2 + x_3 \le 15,\\
&2x_1 + 5x_2 - 2x_3 \le 0,\\
&cx_1 + 2x_2 - x_3 = -3,\\
&x_2 \ge 0, x_3 \ge 0:
\end{aligned}
$$

№	*a*	*b*	*c*	№	*a*	*b*	*c*
1	10	2	3	6	–2	2	2
2	–1	1	2	7	2	3	4
3	3	5	4	8	5	5	3
4	–3	4	2	9	11	1	4
5	12	3	3	10	7	7	2

3. Используя геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$
\begin{aligned}
&10x_1 + x_3 \to \max,\\
&3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6,\\
&3x_1 - 3x_2 + x_3 \le 6,\\
&x_3 \le 3.
\end{aligned}
$$

Лекция 5

Симплекс-метод

Изложен симплекс-метод решения канонической задачи ЛП, принадлежащий к числу аналитических методов решения этой задачи.

Решение основной задачи ЛП графическим методом является наглядным в случае двух и даже трех переменных. Для случая большого числа переменных геометрический метод становится невозможным и тогда используется так называемый симплекс-метод, где используется тот факт, что если ЗЛП имеет решение, то хотя бы одно из них – угловая точка (базисное).

1°. Общая схема симплекс-метода. Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме, где система ограничений задана совместной системой линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

и среди неотрицательных решений системы (1) нужно найти такое, которое минимизирует линейную функцию

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0. \tag{2}$$

Пусть можно выразить $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $(r \le m)$ через остальные переменные:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n + b'_1, \\ x_2 = a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n + b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n + b'_r, \end{cases} \tag{3}$$

где $b'_1 \ge 0, b'_2 \ge 0, \ldots, b'_r \ge 0$, т. е. систему (1) заменить эквивалентной ей системой (3).

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются *базисными*, а весь набор

$\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ – *базисом*, остальные переменные называются *свободными*, система ограничений (3) называется *системой, приведенной к единичному базису*.

Подставляя в линейную форму (2) вместо базисных переменных их выражения через свободные из системы (3), получим

$$f = \delta + \delta_{r+1} x_{r+1} + \ldots + \delta_n x_n . \tag{4}$$

Теперь, полагая все свободные переменные равными нулю, найдем значения базисных переменных: $x_1 = b_1', x_2 = b_2', \ldots, x_r = b_r'$. Таким образом, решение $\mathrm{col}(b_1'; b_2'; \ldots; b_r'; 0; \ldots; 0)$ системы (3) является допустимым – оно называется *базисным*.

Для полученного базисного решения значение линейной формы $f_Б = \delta$. Решение задачи с помощью симплекс-метода распадается на ряд шагов, заключающихся в том, что от данного базиса *Б* переходят к другому базису *Б′* с таким расчетом, чтобы значение $f_Б$ уменьшилось или, по крайней мере, не увеличивалось, т.е $f_{Б'} \le f_Б$.

2⁰. Реализация симплекс-метода в одном частном случае. Для упрощения дальнейших записей будем считать, что имеется всего пять неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и система ограничений приведена к единичному базису $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \alpha, \\ x_2 = \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta, \ (\alpha \ge 0, \beta \ge 0, \gamma \ge 0) \\ x_3 = \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5 + \gamma, \end{cases} \tag{3'}$$

а целевая функция – к виду

$$f = \delta + \delta_4 x_4 + \delta_5 x_5 . \tag{4'}$$

Решается задача минимизации f при ограничениях (3′) и условиях $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$.

Положим все свободные переменные равными нулю $(x_4 = x_5 = 0)$ и найдем из системы (3′) значения базисных неизвестных: $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \gamma$. Полученное решение системы (3′) $\mathrm{col}(\alpha; \beta; \gamma; 0; 0)$

будет неотрицательным и является базисным решением, отвечающим базису $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Для этого решения значение функции f равно $f_Б = \delta$.

Возможны три случая.

1) Все коэффициенты при свободных неизвестных в выражении для f неотрицательны, т.е. $\delta_4 \geq 0, \delta_5 \geq 0$.

Тогда для любого неотрицательного решения системы (3′) имеем $\delta_4 x_4 \geq 0$, $\delta_5 x_5 \geq 0$. Значит, $f = \delta_4 x_4 + \delta_5 x_5 + \delta \geq \delta$. Таким образом, $\min f = \delta$, т.е. базисное решение оптимально и задача решена.

2) Имеется свободное неизвестное, коэффициент при котором в выражении (4′) отрицателен, а все коэффициенты при этом неизвестном в уравнениях (3′) – положительны.

Пусть, например, $\delta_4 < 0, \alpha_4 \geq 0, \beta_4 \geq 0, \gamma_4 \geq 0$. Тогда, отправляясь от базисного решения $\mathrm{col}(\alpha; \beta; \gamma; 0; 0)$ будем увеличивать значение x_4 не меняя $x_5 = 0$. Значения базисных переменных также будут меняться и получим

$$x_1 = \alpha_4 x_4 + \alpha \geq \alpha \geq 0,\ x_2 = \beta_4 x_4 + \beta \geq \beta \geq 0,\ x_3 = \gamma_4 x_4 + \gamma \geq \gamma \geq 0,$$

т.е. допустимое решение $\mathrm{col}(x_1, x_2, x_3, x_4, 0)$ будет оставаться неотрицательным. При этом $f = \delta_4 x_4 + \delta$ с ростом x_4 будет неограниченно уменьшаться, так как $\delta_4 < 0$.

Значит, в этом случае $\min f = -\infty$ на X, т.е. задача не имеет решения.

3) Имеется свободное неизвестное, коэффициент при котором в выражении (4′) отрицателен, но и среди коэффициентов при этом неизвестном в уравнениях (3′) также есть отрицательные.

Тогда производим шаг, а именно, от базиса *Б* переходим к новому базису *Б′*, с таким расчетом, чтобы значение $f_Б$ уменьшилось или по крайней мере не увеличилось: $f_{Б'} \leq f_Б$. Ясно, что изменение базиса влечет за собой соответствующую перестройку системы ограничений (3′) и выражения (4′) для функции f.

Опишем подробно содержание шага. Пусть, например, в случае $\delta_4 < 0$ имеем $\alpha_4 < 0$, $\beta_4 < 0$, а γ_4 – положительно или равно нулю $(\gamma_4 \geq 0)$.

Так как $\alpha_4 < 0$ и $\beta_4 < 0$, то значения $x_1 = \alpha_4 x_4 + \alpha$ и $x_2 = \beta_4 x_4 + \beta$ будут уменьшаться при увеличении x_4, а значение x_3 будет оставаться неотрицательным $(x_3 \geq \gamma)$. При увеличении x_4 наступит момент, когда одно из неизвестных x_1 или x_2 обратится в нуль: для x_1 таким моментом будет $x_4 = -\dfrac{\alpha}{\alpha_4}$, а для x_2 будет $x_4 = -\dfrac{\beta}{\beta_4}$. Выберем из этих соотношений $-\dfrac{\alpha}{\alpha_4}$ и $-\dfrac{\beta}{\beta_4}$ наименьшее. Пусть, например, это будет $-\dfrac{\alpha}{\alpha_4} = \rho$.

Тогда увеличение x_4 возможно только от 0 до ρ. При $x_4 = \rho$ неизвестное x_1 обратится в нуль, а при дальнейшем увеличении x_4 неизвестное x_1 станет уже отрицательным, что недопустимо. Полагая в системе (3′) $x_4 = \rho$ и $x_5 = 0$, получим неотрицательное решение

$$x_1 = 0,\ x_2 = \beta_4\rho + \beta,\ x_3 = \gamma_4\rho + \gamma,\ x_4 = \rho,\ x_5 = 0, \tag{5}$$

для которого значение функции f будет $\delta_4\rho + \delta \leq \delta$ поскольку $\delta_4 < 0$ и $\rho \geq 0$.

Таким образом, с ростом x_4 первым из базисных переменных обращается а нуль переменное x_1. Тогда базис $Б = \{x_1, x_2, x_3\}$ заменяем на базис $Б' = \{x_4, x_2, x_3\}$, а именно: из старого базиса удаляется неизвестное x_1 и вместо него в базис вводится из числа прежних свободных неизвестное x_4.

Смена базиса влечет за собой перестройку системы (3′). Из первого уравнения для x_1 выражаем x_4:

$$x_4 = \frac{1}{\alpha_4}x_1 - \frac{\alpha_5}{\alpha_4}x_5 - \frac{\alpha}{\alpha_4}. \tag{6}$$

Подставляем это выражение (6) в остальные два уравнения системы (3′). Получим систему вида

$$\begin{cases} x_4 = a_1x_1 + a_5x_5 + a, \\ x_2 = b_1x_1 + b_5x_5 + b, \\ x_3 = c_1x_1 + c_5x_5 + c, \end{cases} \quad (7)$$

с базисным решением

$$x_1 = 0,\ x_2 = b,\ x_3 = c,\ x_4 = a,\ x_5 = 0, \quad (8)$$

которое совпадает с решением (5), поскольку, как видно из самой системы (7), двух разных решений с $x_1 = 0,\ x_5 = 0$ быть не может, и, значит, является неотрицательным.

Новое значение целевой функции f равно

$$f_{Б'} = \delta_4\rho + \delta \quad (9)$$

и, таким образом, с учетом $\delta_4 < 0$ имеем $f_{Б'} \le f_{Б}$.

Итак, с переходом от базиса $Б$ к $Б'$ система ограничений сохранила допустимую форму (7), где $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$, а значение функции f для базисного решения уменьшилось или осталось прежним.

Переход от базиса $Б$ к новому базису $Б'$ и означает шаг, который делается в случае 3. Ясно, что старое выражение для f, т.е. (4′) должно быть заменено новым:

$$f = d_1x_1 + d_5x_5 + d, \quad (10)$$

которое получается из (4′) заменой неизвестного x_4 по формуле (6).

Если для полученной задачи (7), (10) снова имеет место случай 3, то делаем следующий шаг, т.е. переходим к новому базису $Б''$, для которого

$$f_{Б''} \le f_{Б'}.$$

Процесс продолжаем до тех пор, пока не придем к одному из случаев 1 или 2. Тогда процесс заканчивается.

▷ ***Пример 1.*** Найти минимум линейной формы $f = x_4 - x_5$ при ограничениях: $x_1 + x_4 - 2x_5 = 1,\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2,\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$ и условиях $x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$.

Решение. Данная система уравнений-ограничений совместна, так как ранги матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

совпадают и равны 3. Следовательно, три первых переменных x_1, x_2, x_3 (базисные) можно линейно выразить через две свободные переменные x_4, x_5 и привести систему к единичному базису:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 &= 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 &= 3 - 3x_4 - x_5. \end{aligned} \qquad \textbf{(11)}$$

Линейная форма $f = x_4 - x_5$ через свободные переменные уже выражена. Теперь при $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ найдем значения базисных переменных: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Таким образом, первое допустимое решение системы уравнений есть $\mathrm{col}(1;2;3;0;0)$. При найденном допустимом решении имеем $f_Б = 0$.

Теперь попытаемся уменьшить значение f; увеличение x_4 увеличит f, так как перед x_4 стоит положительный коэффициент, а увеличение x_5 дает уменьшение f. Увеличим величину x_5 так, чтобы x_1, x_2, x_3 не стали отрицательными, оставив $x_4 = 0$. Их второго уравнения системы (11) следует, что x_5 можно увеличить до 2. Таким образом, получаем следующие значения переменных: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$ или $\mathrm{col}(5;0;1;0;2)$.

Значение целевой функции при этом допустимом решении равно $f_Б = -2$, т.е. уменьшилось.

Далее, примем за свободные переменные x_2 и x_4, т.е. те переменные, которые в новом базисе $Б'$ имеют нулевые значения. С этой целью из второго уравнения системы (11) выразим x_5 через x_2 и x_4 и получим

$$x_5 = 2 - x_2 + 2x_4.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4, \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4. \end{cases} \qquad (12)$$

$$f = -2 + x_2 - x_4.$$

Для уменьшения значения f будем увеличивать x_4. Из второго уравнения системы (12) вытекает, что при условии неотрицательности x_3 значение x_4 можно увеличивать до $x_4 = \frac{1}{5}$. При этом условии новое допустимое решение есть $\mathrm{col}\left(\frac{28}{5};0;0;\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right)$. Значение линейной формы $f_Б = -\frac{11}{5}$.

Выразим теперь x_1, x_4, x_5 через свободные переменные x_2 и x_3:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{28}{5} - \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_2, \\ x_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_2, \\ x_5 = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2. \end{cases} \qquad (13)$$

$$f = -\frac{11}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_2.$$

Так как в последней линейной форме обе свободные переменные входят с положительными коэффициентами, то наименьшее значение f достигается при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Значит, решение $\operatorname{col}\left(\frac{28}{5};0;0;\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right)$ является оптимальным и $\min f = -\frac{11}{5}$. □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Найти максимум линейной формы $f = x_2 + x_3$ при ограничениях: $x_1 - x_2 + x_3 = 1$, $x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$, $x_i \geq 0, i = \overline{1,4}$.

2. Максимизировать линейную форму $f = 2x_1 - x_4$ при следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20, \\ x_2 + 2x_4 \geq 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 8, x_i \geq 0, i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3. Найти оптимальные неотрицательные решения, минимизирующие линейную форму:

а) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + 3x_2 + x_4 = 2,$
$f = x_1 - x_3;$

б) $\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_3 - x_4, \\ x_2 = 1 + x_3 - 2x_4, \\ x_5 = 5 - x_3 + x_4, \end{cases}$
$f = x_1 + x_2;$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 - x_4 = 1, \end{cases}$
$f = 2x_3 - x_2;$

г) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 180, \\ 4x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 900, \end{cases}$
$f = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3.$

■ Лекция 6

Симплексные таблицы

Изложен алгоритм симплекс-метода решения канонической задачи ЛП с помощью симплексных таблиц.

1°. Алгоритм симплекс-метода с помощью симплексных таблиц. Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме, сформулированную в Лекции 5: среди неотрицательных решений системы (Л. 5.1) нужно найти такое, которое минимизирует линейную функцию (Л. 5.2). Если рассматривается задача максимизации формы (Л. 5.2), то заменяем ее соответствующей задачей минимизации, где $f = -(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) + c_0$. Как и в Л. 5 систему ограничений сведем к единичному базису:

$$\begin{aligned} &x_1 + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_i + a_{i,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ &x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $b_1 \geq 0, \ldots, b_r \geq 0$, а линейную форму f – к виду

$$f = \delta_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \delta_n x_n + \delta_0. \qquad (2)$$

Запишем эти данные с помощью таблицы 1 следующим образом.

Таблица 1

Базисные переменные	*Свободные члены*	x_1	…	x_i	…	x_r	x_{r+1}	…	x_j	…	x_n
x_1	b_1	1	…	0	…	0	$a_{1,r+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	b_i	0	…	1	…	0	$a_{i,r+1}$	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	b_r	0	…	0	…	1	$a_{r,r+1}$	…	a_{rj}	…	a_{rn}
f	$-\delta_0$	0	…	0	…	0	δ_{r+1}	…	δ_j	…	δ_n

Равенство (2) называют *приведенным к свободным переменным выражением* для функции f, а коэффициенты δ_j – *оценками* (индексами) соответствующих свободных переменных x_j.

Итерация симплекс-метода с помощью симплексных таблиц состоит в следующем.

1. Выбираем разрешающий столбец из условия: оценка и хотя бы один элемент $a_{ip} > 0$.

2. Выбираем q-ю разрешающую строку из условия:

$$\frac{b_q}{a_{qp}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ip}}\right\} \text{ для } a_{ip} > 0 .$$

3. Пересчитываем элементы разрешающей строки по формуле:

$$a'_{qk} = \frac{a_{qk}}{a_{qp}}, \quad k = 0,1,\ldots,n \quad \left(a_{q0} \stackrel{def}{=} b_q\right).$$

4. Вычисляем элементы всех остальных строк (при $k \neq p$) по формуле (правилу прямоугольника):

$$a'_{ik} = a_{ik} - a'_{qk}a_{ip}, \; i = 0,1,\ldots,q-1,q+1,\ldots,r \left(a_{i0} \stackrel{def}{=} b_i, a_{0k} \stackrel{def}{=} \delta_k\right).$$

При этом используем основную теорему симплекс-метода, которую приводим без доказательства.

Теорема 1.

Если после выполнения очередной итерации:

1) найдется хотя бы одна отрицательная оценка и в каждом столбце с такой оценкой окажется хотя бы один положительный элемент, т.е. $\delta_k < 0$ *для некоторых k и* $a_{ik} > 0$ *для тех же k и некоторого i, то можно улучшить решение, выполнив следующую итерацию;*

2) найдется хотя бы одна отрицательная оценка, столбец которой не содержит положительных элементов, т.е. $\delta_k < 0, a_{ik} < 0$ *для какого-то k и всех i, то функция f неограничена в области допустимых значений* $(\min f = -\infty)$;

3) все оценки окажутся неотрицательными, т.е. $\delta_k \geq 0$ *для всех k, то достигнуто оптимальное решение*

▷ ***Пример 1.*** Пусть предприятием выпускается продукция четырех видов $П_1$-$П_4$ с использованием для этого ресурсов, виды и нормы расхода по которым, а также уровень получаемой от их реализации прибыли приведены в таблице 2. Необходимо получить вариант оптимального плана производства по критерию максимума прибыли.

Таблица 2

Элемент модели	*Вид продукции*				*Располагаемый ресурс*
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
Ресурсы:					
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Оборудование	4	6	10	13	100
Прибыль с единицы продукции плана	60	70	120	130	
План	x_1	x_2	x_3	x_4	

Решение. Ясно, что математическую модель данной задачи можно записать так:

$$f = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max;$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16; \\ & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110; \\ & 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100; \\ & x_j \ge 0, j = \overline{1,4}. \end{aligned} \qquad (3)$$

В математическую модель задачи (3) введем дополнительные переменные y_1, y_2, y_3 и запишем ограничения в виде уравнений:

$$-f = -60x_1 - 70x_2 - 120x_3 - 130x_4 \to \min;$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 16; \\ & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 = 110; \\ & 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + y_3 = 100; \\ & x_j \ge 0, j = \overline{1,4}; y_i \ge 0, i = \overline{1,3}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Задача (4) записана в виде (1), (2), и ее можно представить в виде

Таблица 3

Базисные переменные	*Свободные члены*	*Вид продукции*						
		y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	16	1	0	0	$\boxed{1}$	1	1	1
y_2	110	0	1	0	6	5	4	3
y_3	100	0	0	1	4	6	10	13
$+f$	0	0	0	0	–60	–70	–120	–130

симплекс-таблицы 3. В этой таблице свободные переменные x_1, x_2, x_3, x_4 по условию равны нулю, а базисные переменные y_1, y_2, y_3, а также целевая функция $(+f)$ равны свободным членам, т.е. $y_1 = 16, y_2 = 110, y_3 = 100, +f = 0$.

Выясняем, имеются ли в последней строке (индексной) отрицательные оценки. Таких чисел четыре: – 60, – 70, – 120, – 130. Берем, например – 60 и просматриваем столбец для x_1, в этом столбце имеем три положительных элемента 1, 6, 4. Делим на эти числа соответствующие свободные члены: 16, $\frac{110}{6}$, $\frac{100}{4}$; из полученных частных наименьшее есть 16, следовательно, разрешающим является элемент 1, стоящий на пересечении строки для y_1 и столбца для x_1. Выделим эту строку и этот столбец рамками. На следующей итерации переменную y_1 нужно вывести из базисных $(\rightarrow)$, а переменную x_1 ввести в базисные $(\uparrow)$. Новый базис состоит из $\{x_1, y_2, y_3\}$. Для составления следующей таблицы умножим выделенную строку таблицы 3 на 1 и полученную строку пишем на месте прежней (в данном случае эта строка остается прежней, так как разрешающий элемент равен 1). К каждой из остальных строк прибавляем вновь полученную, умноженную на такое число, чтобы в клетках для столбца x_1 появились нули и пишем преобразованные строки на месте прежних. Этим завершается первая итерация и в результате придем к таблице 4.

Теперь все рассуждения повторяем применительно к табл. 4, т.е. выполняем вторую итерацию. Новый разрешающий элемент, находящий-

Таблица 4

Базисные переменные	Свободные члены	Вид продукции						
		y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	16	1	0	0	1	1	1	1
y_2	14	–6	1	0	0	–1	–2	–3
y_3	36	–4	0	1	0	2	$\boxed{6}$	9
$+f$	960	60	0	0	0	–10	–60	–70

ся на пересечении строки для y_3 и столбца для x_3, есть 6. Для составления новой таблицы умножим выделенную строку на $\frac{1}{6}$ и полученную строку запишем на месте прежней; к каждой из остальных строк прибавим вновь полученную, умноженную на такое число, чтобы в клетках для столбца x_3 были нули и запишем преобразованные строки на месте прежних. Приходим к таблице 5.

Таблица 5

Базисные переменные	Свободные члены	Вид продукции						
		y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	10	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$
y_2	26	$-\frac{22}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0
x_3	6	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$
$+f$	1320	20	0	10	0	10	0	20

Из симплексной таблицы 5 следует, что в столбце свободных членов все элементы положительные, следовательно решение является допустимым. В строке целевой функции все элементы неотрицательные. Следовательно, это решение является оптимальным при максимизации целевой функции f (либо минимизации функции $-f$). При этом оптимальным планом является $x_1^* = 10, x_3^* = 6; x_2^* = x_4^* = 0$, а целевая функция $f = 1320$. □

Замечание 1. Заметим, что в симплексных таблицах часто опускают столбцы, соответствующие базисным переменным. Такие симплексные таблицы будем называть укороченными.

Отметим, что с помощью симплекс-таблицы можно не только найти ответ, но и узнать еще множество полезных сведений и приемов, которые можно использовать для целей анализа и возможных вариантов ведения производства. Так, например, из табл. 5 следует, что свободные переменные $y_1 = y_3 = 0$, а базисная переменная $y_2 = 26$, что означает равенство нулю в оптимальном плане резервов трудовых ресурсов и оборудования (данные ресурсы используются в производстве полностью). Вместе с тем резерв ресурсов сырья составляет $y_2 = 26$, что свидетельствует об его излишках.

2⁰. Понятие о вырожденном решении. При рассмотрении симплекс-метода предполагалось, что все $b_i > 0$ как в исходной системе, так и в системах, получаемых после соответствующих итераций. Если же в некоторых уравнениях свободные члены $b_i = 0$, то в соответствующем этой системе опорном решении базисные переменные, относительно которых эти уравнения разрешены, принимают нулевые значения. Опорное решение, в котором хотя бы одна из базисных переменных принимает нулевое значение называется *вырожденным решением*, а задача ЛП, имеющая хотя бы одно вырожденное решение, — *вырожденной задачей*. Применяя в этом случае последовательные итерации, мы можем вернуться к ранее встречающемуся набору базисных и свободных переменных, т.е. появляется так называемое зацикливание в схеме расчета. Приведем правило для устранения зацикливания: если на каком-либо этапе расчета возникает неопределенность в выборе разрешающей строки, т.е. оказывается несколько равных минимальных отношений $\frac{b_i}{a_{ip}}$, то следует выбирать ту строку, для которой отношение элементов следующего столбца к разрешающему является наименьшим. Если при этом снова оказываются равные минимальные отношения, то составляют отношения элементов следующего столбца, и так до тех пор, пока разрешающая строка не определится однозначно.

▷ ***Упражнение 1.*** Используя указанное правило максимизировать линейную форму $f = 4x_5 + 2x_6$ при ограничениях:

$$x_1 + x_5 + x_6 = 12;\ x_2 + 5x_5 - x_6 = 30;$$
$$x_3 + x_5 - 2x_6 = 6;\ 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 18;$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}.$$ □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Найти наибольшее значение линейной функции $f = 7x_1 + 5x_2$ на множестве неотрицательных решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18. \end{cases}$$

2. Найти неотрицательные решения, минимизирующие линейную форму $f = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$ на множестве решений линейной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 9, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6. \end{cases}$$

3. Найти оптимальные неотрицательные решения, минимизирующие линейную форму:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_2 + 2x_4 \ge 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 8, \\ f = 2x_1 + x_4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \le -1, \\ f = -x_1 - 2x_2 - 3x_3. \end{cases}$

■ Лекция 7

Двойственные задачи

Изложены правила построения двойственных задач и выяснена их роль при анализе соответственных им прямых задач ЛП.

1°. Двойственные задачи. Каждой задаче ЛП можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которая называется двойственной по отношению к исходной. Правила записи двойственной задачи рассмотрим на следующем примере.

▷ ***Пример 1.*** Пусть задана следующая исходная модель задачи:

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \to \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12, & \text{(a)} \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 21, & \text{(б)} \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

Двойственная задача составляется, используя следующие приемы.

1. Каждому i-му ограничению соответствует переменная двойственной задачи, называемая *двойственной переменной* и обозначаемая z_i. В системе (1) ограничению (а) соответствует переменная z_1, а ограничению (б) переменная z_2.

2. Каждой переменной исходной задачи соответствует ограничение двойственной задачи; так как в системе (1) имеется три переменных x_1, x_2, x_3, то двойственная задача должна иметь три ограничения.

3. Матрица коэффициентов при двойственных переменных в ограничениях двойственной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов при переменных, состоящих в ограничениях. Так как в исходной задаче (1) есть два ограничения, то матрица их коэффициентов A и ее транспонированная A^T имеют вид:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 7 & 5 & 3\end{pmatrix};\ A^T=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

4. Если в исходной задаче ограничения имеют знаки неравенств типа меньше $(\le)$, то в двойственной задаче они изменяются на противоположные типа больше $(\ge)$.

5. Правые части ограничений в двойственной задаче равняются коэффициентам при переменных в целевой функции исходной задачи, а коэффициенты при двойственных переменных в целевой функции двойственной задачи равняются правым частям ограничений исходной задачи.

6. Максимизация целевой функции исходной задачи заменяется минимизацией целевой функции двойственной задачи.

Таким образом, для исходной модели (1) двойственную задачу можно записать так:

$$\begin{cases} f_g = 12z_1 + 21z_2 \to \min, \\ z_1 + 7z_2 \ge 2, \\ z_1 + 5z_2 \ge 4, \\ 2z_1 + 3z_2 \ge 8, \\ z_i \ge 0, i = 1,2. \end{cases} \quad \square \qquad (2)$$

В общем виде исходную задачу ЛП и соответствующую ей двойственную задачу ЛП можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m}, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n}; \end{cases} \qquad \begin{cases} f_g = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_j \ge c_j, j = \overline{1,n}, \\ z_i \ge 0, i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Важным свойством двойственной задачи является то, что

$$\max f = \min f_g.$$

Двойственная переменная z_i выступает коэффициентом при b_i и, следовательно, определяет зависимость целевой функции от изменения ресурса b_i на единицу.

Таким образом, *двойственная переменная оценивает влияние изменения каждого вида ресурса на целевую функцию*. В связи с этим двойственные переменные часто называют *двойственными оценками*, при этом существенно, что для нахождения двойственных оценок не требуется решать двойственную задачу.

Рассмотрим пример 1 и симплексную таблицу 5 Лекции 6. Значения двойственных оценок уже получены в этой симплексной таблице. Узнать их значение можно следующим образом. Если некоторый i-тый ресурс используется не полностью, то дополнительная переменная в ограничении для данного ресурса больше нуля. В данном примере таким ресурсом выступает сырье, так как $b_2 = 110$ и его резерв $y_2 = 26$. Следовательно, для второго ограничения $z_2 = 0$.

Таким образом, если по определенному ресурсу имеется резерв, то дополнительная переменная является базисной, а двойственная оценка такой переменной равна нулю. В рассматриваемом примере трудовые ресурсы и оборудование использованы полностью, поэтому их дополнительные переменные равны нулю. В таблице Л. 6.5. y_1 и y_3 свободные переменные, значит, $y_1 = y_3 = 0$. Если ресурс используется полностью, то его изменение повлияет на объем выпускаемой продукции и в конечном счете на целевую функцию: целевая функция увеличивается или уменьшается на размер двойственной оценки. А значение двойственной оценки находится по симплекс-таблице Л. 6.5. на пересечении строки целевой функции со столбцом данного дополнительного переменного. Так, для трудовых ресурсов при $y_1 = 0$ двойственная оценка $z_1 = 20$, а для оборудования при $y_3 = 0$ двойственная оценка $z_3 = 10$.

Значения дополнительных переменных и двойственных оценок из таблицы 5 Л. 6 перенесем для наглядности в таблицу 1, откуда видно, что при росте трудовых ресурсов на единицу целевая функция возрастает на 20 единиц, достигнув значения $f = 1340$ $(1320 + 20 = 1340)$, а при их уменьшении $f = 1300$ $(1320 - 20 = 1300)$. Аналогично рост оборудования на единицу вызовет увеличение целевой функции на 10 $(f=1320+10=1330)$, а при его снижении на единицу $f=1310$ $(f=1320-10=1310)$.

Таблица 1

Ресурсы	*Дополнительная переменная*	*Двойственная оценка*
Трудовые	$y_1=0$	$z_1=20$
Сырье	$y_2=26$	$z_2=0$
Оборудование	$y_3=0$	$z_3=10$

2[0]. Анализ ситуации отклонения ресурсов. При оперативном управлении особенно важно принимать верные решения в ситуациях отклонения ресурсов от первоначально запланированных. Рассмотрим эти вопросы в условиях примера 1 Л. 6.

Прежде всего появившееся отклонение нужно включать в модель задачи. Начнем с отклонений для сырья. Допустим, отклонение в поставке сырья составляет Δb_2. Тогда в математической модели (Лекция 6.3) ограничение для сырья имеет вид: $6x_1+5x_2+4x_3+3x_4=110+\Delta b_2$.

Данное ограничение в системе уравнений (Лекция 6.4) приобретет следующий вид:

$$y_2=110+\Delta b_2-(6x_1+5x_2+4x_3+3x_4),$$

а в симплекс-таблице отразится это изменение (таблица 2). После нахождения решения с учетом Δb_2 получим симплекс-таблицу, отличие которой от аналогичной ей табл. Л. 6.5 приведено в таблице 3. Согласно ей в оптимальном решении Δb_2 вошло только в свободный член для $y_2=26+\Delta b_2$.

Так как оптимальное решение должно быть прежде всего допусти-

Таблица 2

Базисные переменные	*Свободные члены*	$y_1\, y_2\, y_3\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4$
y_1	16	
y_2	$110+\Delta b_2$	
y_3	100	
f	0	

Таблица 3

Базисные переменные	*Свободные члены*	$y_1\,y_2$
x_1	10	
y_2	$26+\Delta b_2$	
x_3	6	
f	1320	

мым, то в симплекс-таблице все свободные члены должны быть неотрицательными. В данном случае $y_2 = 26+\Delta b_2 \geq 0$, т.е. $\Delta b_2 \geq -26$. Следовательно, уменьшение сырья на 26 единиц, т.е. на 23.6 % от первоначального объема в 110 единиц не скажется на выполнении плана.

При анализе влияния отклонения трудовых ресурсов Δb_1 первое ограничение в модели (Л. 6.3) запишется так:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16 + \Delta b_1 .$$

Соответственно дополнительную переменную определим как

$$y_1 = 16 + \Delta b_1 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

и аналогично изменится свободный член в начальной симплекс-таблице. Симплекс-таблица Л. 6.5. приобретает вид таблицы 4, где в ней значения в столбце свободных членов те же, что и в таблице Л. 6.5., к которым прибавлены элементы столбца y_1, умноженные на Δb_1.

Таблица 4

Базисные переменные	*Свободные члены*	y_1
x_1	$10+\frac{5}{3}(\Delta b_1)$	$\frac{5}{3}$
y_2	$26-\frac{22}{3}(\Delta b_1)$	$-\frac{22}{3}$
x_3	$6-\frac{2}{3}(\Delta b_1)$	$-\frac{2}{3}$
f	$1320+\Delta b_1$	20

Анализ таблицы 4 показывает, что можно сделать следующие выводы:

1. Требование о сохранении допустимого решения имеет вид:

$$10+\frac{5}{3}(\Delta b_1)\geq 0,\ 26-\frac{22}{3}(\Delta b_1)\geq 0,\ 6-\frac{2}{3}(\Delta b_1)\geq 0.$$

2. Решая систему этих неравенств определяем, что диапазон изменения Δb_1 составляет $-6\leq \Delta b_1 \leq 3.55$.

3. Переходя от приращений ресурсов к их предельным значениям, находим, что $\min b_1 = 16-6=10$; $\max b_1 = 16+3.55=19.55$; окончательно диапазон b_1 составляет $10\leq b_1 \leq 19.55$.

4. Найденные пределы показывают, каковы могут быть колебания трудовых ресурсов, чтобы структура оптимального плана оставалась стабильной. А это означает, что при изменении трудовых ресурсов в найденных пределах оптимальным является выпуск той же самой продукции (x_1 и x_3), но в объеме составляющем $x_1 = 10+\frac{5}{3}(\Delta b_1)$; $x_3 = 26-\frac{2}{3}(\Delta b_1)$; при этом целевая функция составит $f = 1320+20\Delta b_1$.

Например, если шесть человек отвлечь на другие работы, то оптимальным планом с учетом $\Delta b_1 = -6$ являются следующие показатели:

$$x_1^* = 10-\frac{5}{3}(-6)=0.0000004\approx 0;\ x_3^* = 6-\frac{2}{3}(-6)\approx 9.4;$$

$$f^* = 1320+20(-5)=1220.$$

Таким образом, уменьшение объема трудовых ресурсов на шесть человек, или на $37.5\,\%$ $\left(\frac{6}{16}\cdot 100 = 37.5\right)$, приведет к ухудшению целевой функции только на $9.09\,\%$ $\left(120\cdot\frac{100}{1320}\approx 9.09\right)$.

При отклонении оборудования на Δb_3 единиц столбец свободных членов последней симплекс-таблицы примет вид, приведенный в таблице 5.

5. Анализ таблицы 5 показывает, что структура оптимального плана сохранится, если диапазон изменений b_3 составит $64\leq b_3 \leq 160$.

Таблица 5

Базисные переменные	*Свободные члены*	y_3
x_1	$10 - \frac{1}{6}(\Delta b_3)$	$-\frac{1}{6}$
y_2	$26 + \frac{1}{3}(\Delta b_3)$	$\frac{1}{3}$
x_3	$6 + \frac{1}{6}(\Delta b_3)$	$\frac{1}{6}$
f	$1320 + 10\Delta b_3$	10

Используя данные таблицы 5 получаем, что при увеличении оборудования на 10 единиц получаем следующие значения:

$$x_1^* = 10 - \left(\frac{1}{6}\right) \cdot 10 \approx 8.3;$$

$$x_3^* = 6 + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot 10 \approx 7.7;$$

$$f^* = 1320 + 10 \cdot 10 = 1420.$$

6. Отсюда вытекает, что при увеличении оборудования для обеспечения максимизации прибыли выпуск продукции x_1 целесообразно уменьшить, а продукции x_3 увеличить.

7. Полученные предельные значения отклонений ресурсов дают возможность установить еще одно важное обстоятельство. Так как двойственные оценки отражают влияние на целевую функцию изменения ресурсов на единицу и при этом определено, что с увеличением трудовых ресурсов на единицу целевая функция возрастет на 20, то правомерно поставить следующие вопросы:

а) увеличится ли целевая функция, например, на 200 при росте ресурсов, скажем, на 10 единиц?

б) в каком интервале изменения ресурсов справедливы найденные значения двойственных оценок?

Анализ показывает, что двойственные оценки сохраняют свое значение в том же самом интервале изменения ресурсов, при котором сохраняется структура оптимального плана; следовательно в данном случае для трудовых ресурсов двойственные оценки справедливы при изменении ресурсов в пределах $10 \le b_1 \le 19.55$; аналогично анализу влияния ресурсов b_1 можно также установить степень влияния коэффициентов в целевой функции c_j, а также норм расхода ресурсов или производительности труда и оборудования a_{ij}.

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Дать геометрическую интерпретацию следующих взаимно двойственных задач:

Исходная задача: найти неотрицательные значения x_1, x_2 из условий $x_1 + 2x_2 \ge 4, x_1 - x_2 \ge -1$ и минимизации линейной функции $f = 3x_1 + 2x_2$.

Двойственная задача: найти неотрицательные значения y_1, y_2 из условий $y_1 + y_2 \le 3$, $2y_1 - y_2 \le 2$ и максимизации линейной функции $f_g = 4y_1 - y_2$.

2. Исходная задача: найти неотрицательные значения x_1, x_2 минимизирующие функцию $f = 3x_1 + 2x_2$, если $7x_1 + 2x_2 \ge 14$, $4x_1 + 5x_2 \ge 20$. Составить двойственную задачу и решить ее.

3. Используя теорию двойственности и геометрические построения решить двойственную задачу к исходной:

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 11x_2 + 5x_3 + x_4 \to \min;\\
&-3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 \ge 1,\\
&3x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 \ge 7,\\
&x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.
\end{aligned}
$$

■ Лекция 8

Метод искусственного базиса

Описан метод искусственного базиса нахождения начальной угловой точки канонической задачи ЛП.

1^0. Алгоритм метода искусственного базиса. Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1,\dots,m, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = 1,\dots,n. \tag{3}$$

Решение задачи (1)-(3) симплекс-методом начинается с поиска какой-либо угловой точки $x^0 = \mathrm{col}\left(x_1^0;\dots;x_n^0\right)$ допустимого множества X этой задачи.

Метод искусственного базиса нахождения начальной угловой точки x^0 состоит в следующем. Пусть в ограничениях задачи ЛП (2) все $b_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,m}$. Если это не так, то умножим соответствующие уравнения из (2) на -1. Введем m дополнительных переменных $x_{n+i},\ \ i = \overline{1,m}$, и рассмотрим вспомогательную задачу ЛП:

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ \ i = 1,\dots,m, \tag{5}$$

$$x_k \geq 0,\ \ k = 1,\dots,n+m. \tag{6}$$

Одной из угловых точек допустимого множества $\hat{X}$ этой задачи, очевидно, является точка $\hat{x}^0 = \mathrm{col}\left(0;\dots;0;b_1;\dots;b_m\right)$. Поэтому для решения задачи (4)-(6) можно использовать симплекс-метод, изложенный в Л. 6. со следующей начальной таблицей 1.

Таблица 1

Базис	*Свободные члены*	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	...	0
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0		1
	$-p_0$	p_1	p_2	...	p_n	1	...	1

Здесь $p_j = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$, $j = 1,\ldots,n$; $-p_0 = -\sum_{i=1}^{m} b_i$.

Отметим, что решение задачи (4)-(6) всегда существует, так как ее допустимое множество $\hat{X}$ непусто $\left(x^0 \in \hat{X}\right)$; а целевая функция (4) ограничена снизу нулем на $\hat{X}$.

Пусть $\hat{f}^* = \min\limits_{\hat{x} \in \hat{X}} \hat{f}\left(\hat{x}\right)$. Рассмотрим возможные случаи.

1. $\hat{f}^* > 0$. Тогда допустимое множество X исходной задачи (1)-(3) пусто, т.е. эта задача не имеет решений.

2. $\hat{f}^* = 0$ и минимум целевой функции $\hat{f}\left(\hat{x}\right)$ достигается в угловой точке

$$\hat{x} = \mathrm{col}\left(\hat{x}_1;\ldots;\hat{x}_n;\hat{x}_{n+1};\ldots;\hat{x}_{n+m}\right) \qquad \textbf{(7)}$$

допустимого множества $\hat{X}$ вспомогательной задачи. Тогда

$$x^0 = \mathrm{col}\left(\hat{x}_1;\hat{x}_2;\ldots;\hat{x}_n\right) \qquad \textbf{(8)}$$

есть угловая точка допустимого множества X исходной задачи (1)-(3) и ее можно использовать в качестве начальной угловой точки при решении этой задачи симплекс-методом.

Из (4) следует, что равенство $\hat{f}\left(\hat{x}\right)=\hat{f}^*=0$ возможно только тогда, когда все координаты x_{n+i}, $i=1,\dots,m$ в (7) равны нулю.

Если задача (4)-(6) невырождена, то это означает, что все переменные x_{n+i} для угловой точки (7) являются свободными. Опустим столбцы, соответствующие этим переменным в окончательной симплекс-таблице, составленной при решении задачи (4)-(6). Полученная в результате этого таблица будет соответствовать системе уравнений (2), разрешенной относительно m переменных x_i, являющихся базисными для угловой точки (7). Поэтому останется заменить в этой таблице последнюю строку на строку коэффициентов целевой функции (1) исходной задачи и продолжить ее решение симплекс-методом из начальной угловой точки (8).

Если вспомогательная задача (4)-(6) вырождена, то в угловой точке (7) некоторые из переменных x_{n+i}, $i=1,\dots,m$ могут оказаться базисными. Тогда эти переменные следует перевести в свободные с помощью холостых шагов симплекс-метода, выбирая в качестве разрешающих произвольные элементы симплекс-таблиц, отличные от нуля. После этого исходная задача (1)-(3) решается симплекс-методом так, как это описано выше.

▷ **2⁰. Пример.** Решить задачу ЛП

$$f(x)=x_1+9x_2+5x_3+3x_4+4x_5+14x_6\to\min,$$

$$\begin{aligned}&x_1+x_4=20,\\&x_2+x_5=50,\\&x_3+x_6=30,\\&x_4+x_5+x_6=60,\\&x_j\ge 0,\ j=\overline{1,6},\end{aligned}\tag{9}$$

построив угловую точку x^0 допустимого множества X методом искусственного базиса.

Решение. Введем дополнительные переменные x_7, x_8, x_9, x_{10} и запишем вспомогательную задачу ЛП для этого случая:

$$\hat{f}\left(\hat{x}\right) = x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \to \min$$

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_4 + x_7 = 20,\\
&x_2 + x_5 + x_8 = 50,\\
&x_3 + x_6 + x_9 = 30,\\
&x_4 + x_5 + x_6 + x_{10} = 60,\\
&x_k \ge 0,\ k = \overline{1,10}.
\end{aligned}$$

Запишем симплекс-таблицу 1 этой задачи в виде таблицы 2.

Таблица 2

Базисные переменные	*Свободные члены*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
x_7	20	1	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	→
x_8	50	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	
x_9	30	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	
x_{10}	60	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	
	– 160	– 1	– 1	– 1	– 2	– 2	– 2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
					↑							

Любой столбец x_i, $i = \overline{1,6}$ этой таблицы можно взять в качестве разрешающего, так как соответствующие им элементы ее последней строки отрицательны. Выберем, например, столбец соответствующий свободной переменной x_4. Тогда разрешающим будет элемент этого столбца, стоящий в первой строке, так как $\min\left(\dfrac{20}{1}, \dfrac{60}{1}\right) = 20$.

Производя преобразования симплекс-метода, получим следующую последовательность укороченных симплекс таблиц (рамками выделены разрешающие элементы):

		x_1	x_2	x_3	$\cancel{x_7}$	x_5	x_6	
x_4	20	1	0	0	$\cancel{1}$	0	0	
x_8	50	0	1	0	$\cancel{0}$	1	0	
x_9	30	0	0	1	$\cancel{0}$	0	1	
x_{10}	40	– 1	0	0	$\cancel{-1}$	$\boxed{1}$	1	→
	– 120	1	– 1	– 1	$\cancel{2}$	– 2	– 2	
						↑		

		x_1	x_2	x_3	x_{10}	$\cancel{x_6}$	
x_4	20	1	0	0	0	$\cancel{0}$	
x_8	10	1	$\boxed{1}$	0	– 1	$\cancel{-1}$	→
x_9	30	0	0	1	0	$\cancel{1}$	
x_5	40	– 1	0	0	1	$\cancel{1}$	
	– 40	– 1	– 1	– 1	2	$\cancel{0}$	
			↑				

		x_1	x_8	x_3	x_6
x_4	20	1	0	0	0
x_2	10	1	1	0	−1
x_9	30	0	0	1	$\boxed{1}$
x_5	40	−1	0	0	1
	−30	0	1	−1	−1

→

		x_1	x_5	x_9
x_4	20	1	0	0
x_2	40	1	1	1
x_6	30	0	1	1
x_5	10	−1	−1	−1
	0		0	0

В нижней строке последней симплекс-таблицы нет отрицательных элементов, а в левом нижнем углу стоит нуль. Следовательно, минимум $\hat{f}^* = 0$ вспомогательной целевой функции достигнут и

$$x^0 = \mathrm{col}\left(0;40;0;20;10;30\right) \qquad \textbf{(10)}$$

есть угловая точка допустимого множества X исходной задачи ЛП.

Исключив с помощью (9) базисные переменные в выражении для целевой функции, получим $f(x) = 850 - 7x_1 - 14x_2$.

Заменив нижнюю строку последней симплекс таблицы на строку коэффициентов целевой функции исходной задачи, получим симплекс-таблицу (основную ее часть) исходной здачи, соответствующую угловой точке x^0 из (10):

		x_1	x_3
x_4	20	1	0
x_2	40	1	1
x_6	30	0	$\boxed{1}$
x_5	10	−1	−1
	−880	−7	−14

→

Найдем разрешающий элемент. В качестве разрешающего можно взять любой из столбцов таблицы, соответствующий свободным переменным x_1 и x_3. Выберем, например, столбец при свободной переменной x_3. Разрешающую строку находим так: поскольку $\min\left(\frac{40}{1}, \frac{30}{1}\right) = 30$, то разрешающей является строка, соответствующая базисной переменной x_6. Итак, разрешающий (опорный) элемент найден, в симплекс-таблице он обведен рамкой.

Заполняем новую симплексную таблицу по правилам, изложенным в лекции 6. В результате получим таблицу

		x_1	x_6	
x_2	10	$\boxed{1}$	– 1	→
x_4	20	1	0	
x_5	40	– 1	1	
x_3	30	0	1	
	– 460	– 7	14	
		↑		

В нижней строке последней таблицы есть отрицательный элемент – 7, стоящий в столбце при свободной переменной x_1. Кроме того, в этом столбце имеются положительные элементы. Разрешающую строку находим из условия: $\min\left(\frac{10}{1},\frac{20}{1}\right)=10$, т.е. это будет строка, соответствующая базисной переменной x_2. Разрешающий элемент в последней таблице обведен рамкой.

Строим очередную симплексную таблицу по общим правилам:

		x_2	x_6
x_1	10	1	– 1
x_4	10	– 1	1
x_5	50	1	0
x_3	30	0	1
	– 390	7	7

В этой симплекс-таблице оба коэффициента в последней строке, отвечающие x_1 и x_6 положительны. Поэтому угловая точка $\operatorname{col}(10;0;30;10;50;0)$ является точкой минимума. Минимальное значение $f(x)$ со знаком минус записано в левом нижнем углу симплекс-таблицы, поэтому $f_{\min}=f^*=390$. □

✍ *Задание для самостоятельной работы*

1. Решить задачи ЛП симплекс-методом, находя начальную угловую точку методом искусственного базиса:

а) $$f(x) = -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 1,$$
$$-x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_2 + x_3 + x_5 = 2,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5};$$

б) $$f(x) = -6x_1 - 8x_2 \to \min,$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20,$$
$$12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4;$$

в) $$f(x) = -x_1 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \geq 1,$$
$$-x_1 + x_2 \geq -1,$$
$$2x_1 - x_2 \geq 0,$$
$$x_1, x_2 \geq 0;$$

г) $$f(x) = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \to \min,$$
$$-2x_2 + x_4 + x_5 = -3,$$
$$x_1 + x_2 - x_4 \leq 5,$$
$$x_1 + x_2 \geq -3,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

■ Лекция 9

Транспортная задача

Изложены методы построения первоначального базисного плана транспортной задачи; приведен алгоритм метода потенциалов ее решения

В Л. 2 показано, что математическая модель транспортной задачи следующая:

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,n}, \qquad (3)$$

$$x_{ij}\geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \qquad (4)$$

где $a_i>0,\ i=\overline{1,m};\ b_j>0,\ j=\overline{1,n};\ c_{ij}>0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n};\ \sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j.$

Задачу (1)-(4) называют *замкнутой* или *закрытой транспортной задачей* (ТЗ).

Если для ТЗ выполняется одно из условий:

$$\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j,\ \sum_{i=1}^{m}a_i<\sum_{j=1}^{n}b_j,$$

то модель задачи называют *открытой*.

Для решения ТЗ с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую. Так, при выполнении первого условия открытая транспортная задача сводится к замкнутой, если ввести фиктивный ($n+1$)-ый пункт потребления, куда нужно перевести $x_{i\,n+1}$ единиц продукта из i-го склада с нулевой стоимостью $c_{i\,n+1}=0,\ i=\overline{1,m}$, причем $\sum_{i=1}^{m}x_{i\,n+1}=b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$.

Тогда такая задача примет вид

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,n+1},$$

$$x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n+1}.$$

Аналогично при выполнении второго условия вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запас груза у которого равен $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$, а $c_{m+1\,j}=0,\ j=\overline{1,n}$.

Поэтому, считая $c_{ij}\ge 0$, можно рассматривать только замкнутые транспортные задачи типа (1)-(4).

Нетрудно показать, что условие баланса $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$ необходимо и достаточно для разрешимости транспортной задачи (1)-(4).

Решение транспортной задачи (1)-(4) разбивается на два этапа:

1. Определение исходного базисного (опорного) решения.

2. Построение последовательности итераций, приводящих к оптимальному решению.

1°. Определение исходного опорного решения. Пусть имеется таблица 1 исходных данных задачи.

Исходное опорное решение будем строить по так называемому *правилу «северо-западного угла»*. Заполняем таблицу 1, начиная с левого верхнего угла, двигаясь далее или по стоке вправо, или по столбцу вниз.

В клетку (1, 1) занесем меньшее из чисел a_1 и b_1, т.е. $x_{11}=\min\{a_1,b_1\}$

Если $a_1>b_1$, то $x_{11}=b_1$ и первый столбец "закрыт", т.е. потребности первого потребителя удовлетворены полностью. Двигаемся далее по первой строке, записывая в соседнюю клетку (1, 2) меньшее из чисел a_1-b_1 и b_2, т.е. $x_{12}=\min\{a_1-b_1,b_2\}$

Таблица 1

	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	a_i
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1j} c_{1j}	…	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	x_{2j} c_{2j}	…	x_{2n} c_{2n}	a_2
⋮	…	…	…	…	…	…	⋮
A_i	x_{i1} c_{i1}	x_{i2} c_{i2}	…	x_{ij} c_{ij}	…	x_{in} c_{in}	a_i
⋮	…	…	…	…	…		⋮
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mj} c_{mj}	…	x_{mn} c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Если же $b_1 > a_1$, то аналогично "закрывается" первая строка и далее переходим к заполнению соседней клетки (2,1), куда заносим $x_{21} = \min\{a_2, b_1 - a_1\}$. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока на каком-то этапе не исчерпаются все ресурсы a_i и потребности b_j.

▷ ***Пример 1.*** В трех пунктах отправления (на складах) A_1, A_2, A_3 находится соответственно 100, 80, 120 т горючего. В пункты B_1, B_2, B_3 требуется доставить соответственно 60, 140, 100 т горючего. Стоимость перевозки тонны горючего из пункта A_1 в пункты B_1, B_2, B_3 составляют соответственно 4, 5, 1 ден. единиц, из пункта A_2 – 6, 3, 4 ден. ед., а из пункта A_3 – 1, 2, 4 ден. ед. Составить оптимальный план перевозок горючего так, чтобы общая сумма транспортных расходов была минимальной.

Решение. Построим вначале исходный опорный план по правилу «северо-западного угла». Запишем исходные данные в таблицу 2.

Таблица 2

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	60 ^{4}	40 ^{5}	^{1}	100
A_2	^{6}	80 ^{3}	^{4}	80
A_3	^{1}	20 ^{2}	100 ^{4}	120
b_j	60	140	100	300

Заполнение начнем с клетки (1, 1): $x_{11} = \min\{60,100\} = 60$, первый столбец закрыт. Переходим к клетке (1, 2): $x_{12} = \min\{100-60,140\} = 40$, первая строка закрыта; далее переходим клетке (2, 2): $x_{22} = \min\{140-40,80\} = 80$, вторая строка закрыта; переходим к клетке (3,2): $x_{32} = \min\{140-120,120\} = 20$, второй столбец закрыт. Наконец, заполняем клетку (3,3), куда заносим $x_{33} = \min\{120-20,100\} = 100$. Поскольку остатки по строке и столбцу равны, исходное опорное решение построено. Этому плану соответствуют затраты в количестве

$$f = 60\cdot4+40\cdot5+80\cdot3+20\cdot2+100\cdot4 = 1120 \text{ ден. ед.}$$

В правиле «северо-западного угла» не учитывается величина затрат c_{ij}, а поэтому исходное опорное решение часто может быть далеким от оптимального. Применяют также *прием «минимального элемента»*, в котором учитываются величины c_{ij}. В этом случае построение исходного базисного плана начинаем с клетки с наименьшей величиной c_{ij}, в данном примере с клетки (1, 3), где $c_{13} = 1$ (таблица 3).

Таблица 3

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	5	100 1	100
A_2	6	80 3	4	80
A_3	60 1	60 2	4	120
b_j	60	140	100	300

В эту клетку заносим $x_{13} = \min\{a_1, b_3\} = \min\{100,100\} = 100$. Остатки по строке и столбцу записываем в соответствующие клетки строки и столбца остатков. Строка a_1 и столбец b_3 закрыты. Теперь переходим к клетке (3, 1), так как $c_{31} = 1$ и является наименьшим. Сюда заносим $x_{31} = \min\{60,120\} = 60$ и закрываем столбец b_1.

Переходим к клетке (3, 2), в которую заносим $x_{32} = \min\{120-60,140\} = 60$ и закрываем строку a_3. Наконец, переходим к клетке (2, 2), куда заносим $x_{22} = \min\{140 - 60, 80\} = 80$ и закрываем столбец b_2.

Получен другой вариант исходного опорного решения (плана), при котором затраты $f = 100 + 3 \cdot 80 + 60 \cdot 1 + 60 \cdot 2 = 520$ ден. ед., т.е. сумма затрат ближе к оптимальным. □

Клетки таблицы 1, в которых содержатся ненулевые x_{ij} называют *занятыми клетками*. Ясно, что число занятых клеток в плане, построенном по методам «северо-западного угла» или «минимального элемента» не превосходит $m + n - 1$.

Метод Фогеля. Изложенный ниже метод Фогеля дает опорный план, более близкий к оптимальному. Процедуру построения начального опорного плана начинаем с определения наибольшей разности между двумя наименьшими тарифами каждых строки и столбца. В соответствующую клетку записывается подстановка $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$.

Затем ряд, соответствующий $\min\{a_i, b_j\}$ вычеркивается. С оставшейся матрицей поступаем аналогично предудущему шагу и т.д., до тех пор пока не будут заполнены все клетки таблицы.

2⁰. Построение последовательных итераций. Имея исходное опорное решение (опорный план), перейдем теперь к построению новых опорных решений, которые улучшают друг друга. Для этого применим метод потенциалов.

После построения исходного опорного плана все переменные разбиты на две группы: x_{ke} – базисные x_{pq} – свободные. Линейная функция стоимости перевозок через свободные переменные выразится следующим образом:

$$f = \sum_{pq} \delta_{pq} x_{pq} + \delta_0 . \qquad (5)$$

Для нахождения коэффициентов δ_{pq} при свободных переменных сопоставим каждому пункту отправления A_i некоторую величину u_i, $i = \overline{1, m}$, называемую *потенциалом пункта* A_i, и каждому пункту потребления (назначения) B_j величину v_j – потенциал пункта B_j. Свяжем эти величины равенством $u_k + v_e = c_{ke}$, где c_{ke} – стоимость перевозки одной тонны груза из пункта A_k в пункт B_e. Доказывается, что совокупность уравнений $u_k + v_e = c_{ke}$, составленных для всех базисных переменных, будет составлять совместную систему линейных уравнений, причем значение одной из переменных (или даже нескольких) можно задавать произвольно, и тогда значения остальных находятся из системы однозначно. Пусть для свободных переменных $c'_{pq} = u_p + v_q$, назовем ее *косвенной стоимостью* в отличие от данной стоимости c_{pq}. Тогда коэффициенты при свободных переменных в соотношении (5) определяются с помощью равенств $\delta_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$.

Если все величины δ_{pq} неотрицательны, то исходное решение является оптимальным. Если же среди них имеются отрицательные, то переходим к следующему базису путем увеличения члена с отрицательным коэффициентом, оставляя другие переменные равными нулю.

▷ Используем сформулированные положения и продолжим решение примера 1. Возьмем исходный базисный план, построенный по методу минимального элемента: $x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 100$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 80$, $x_{23} = 0$, $x_{31} = 60$, $x_{32} = 60$, $x_{33} = 0$, $f = 520$. Для нахождения потенциалов нужно решить систему:

$$u_1 + v_3 = 1,\ u_2 + v_2 = 3,\ u_3 + v_1 = 1,\ u_3 + v_2 = 2.$$

Значения двух неизвестных зададим произвольно, например $u_1 = 0$, $v_3 = 0$. Тогда $u_3 = 1$, $v_1 = 0$, $v_2 = 1$, $u_2 = 2$.

Далее вычисляем косвенные стоимости c'_{pq}:

$$c'_{11} = u_1 + v_1 = 0,\ c'_{12} = u_1 + v_2 = 1,\ c'_{21} = u_2 + v_1 = 2,\ c'_{23} = u_2 + v_3 = 2.$$

Подсчитаем теперь разности $\delta_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\delta_{11} = 4 - 0 = 4,\ \delta_{12} = 5 - 1 = 4,\ \delta_{21} = 6 - 2 = 4,\ \delta_{23} = 4 - 2 = 2.$$

Значит, выражение f через свободные переменные имеет вид $f = 4x_{11} + 4x_{12} + 4x_{21} + 2x_{23} + 520.$

Среди коэффициентов при переменных в правой части нет отрицательных; поэтому, исходный опорный план является оптимальным. Таким образом, правило «минимального элемента» сразу дает оптимальное решение.

Решим эту же задачу при условии, что исходное решение получено по правилу «северо-западного угла», т.е. $x_{11}=60,\ x_{12}=40,$ $x_{13}=0;\ x_{21}=0;\ x_{22}=80,\ x_{23}=0,\ x_{31}=0,\ x_{32}=20,\ x_{33}=100,\ f=1120$.

Для нахождения потенциалов нужно решить систему:

$$u_1+v_1=4,\ u_1+v_2=5,\ u_2+v_2=3,\ u_3+v_2=2,\ u_3+v_3=4.$$

Полагая $u_1=0$, получаем $v_1=4,\ u_2=-2,\ v_2=5,\ u_3=-3,\ v_3=5,$ $v_3=7$.

Вычисляем косвенные стоимости c'_{pq}:

$$c'_{21}=v_1+u_2=2,\ c'_{31}=u_3+v_1=1,\ c'_{13}=u_1+v_3=7,\ c'_{23}=u_2+v_3=5.$$

Подсчитаем теперь разности $\delta_{pq}=c_{pq}-c'_{pq}$:

$$\delta_{21}=6-2=+4,\ \delta_{13}=1-7=-6,\ \delta_{23}=4-5=-1,\ \delta_{31}=1-1=0.$$

Следовательно, выражение f через свободные переменные имеет вид $f=1120+4x_{21}-6x_{13}-x_{23}$. Среди коэффициентов при переменных в правой части есть отрицательные, например при x_{13}, следовательно, можно попытаться уменьшить f, увеличив x_{13} и сохранив при этом нулевые значения x_{21} и x_{23}. Положим $x_{13}=\lambda$. Поскольку суммы значений неизвестных по строкам и столбцам должны остаться неизменными, нужно произвести следующий балансовый пересчет:

60	$40-\lambda$	λ
	80	
	$20+\lambda$	$100-\lambda$

Добавление λ к x_{13} компенсируется вычитанием λ из x_{12}, а это в свою очередь – прибавлением λ к x_{32} и т.д. до тех пор, пока не вернемся обратно к x_{13}.

Обходя клетки по пунктирной ломаной линии, в одной из вершин которой находится свободная переменная x_{13}, а в остальных вершинах – базисные переменные, причем не обязательно все, получим так называемый цикл пересчета (ломанную называют циклом), отвечающий свободной клетке x_{13}. Как видно из таблицы λ можно увеличить до $\lambda = 40$, тогда получим второе решение:

60 ^{4}	^{5}	40 ^{1}
^{6}	80 ^{3}	^{4}
^{1}	60 ^{2}	60 ^{4}

т.е. $x_{11} = 60$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 64$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 80$, $x_{23} = 0$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 60$, $x_{33} = 60$.

Значение функции f для него составит $f = 1120 - 6 \cdot 40 = 880$, т.е. получим затраты ближе к оптимальным. Если произвести еще одну итерацию, то получим оптимальный план, представленный с помощью табл. 3. □

Таким образом, *алгоритм метода потенциалов* следующий:

1. Определяем потенциалы u_i и v_j всех пунктов отправления A_i и назначения B_j.

2. Выбираем какую-нибудь свободную переменную, для которой сумма потенциалов строго больше соответствующей стоимости, это соответствует элементу с отрицательным коэффициентом при свободной переменной в правой части функции f (если таких переменных несколько, то берем ту из них, где $u_p + u_q - c_{pq}$ – наибольшее).

3. Для выбранной в п. 2 переменной находим соответствующий ей цикл пересчета и производим сдвиг по этому циклу. Этот сдвиг приводит к новому опорному решению.

4. Указанные операции 1-3 повторяем до тех пор, пока не получим оптимальный базисный план, т.е. неотрицательные коэффициенты при свободных переменных в правой части линейной функции f.

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. На двух складах A_1 и A_2 находится по 90 т горючего. Перевозка одной тоны горючего со склада A_1 в пункты назначения B_1, B_2, B_3, со-

ответственно стоит 1, 3 и 5 ден. ед., а перевозка одной тонны со склада A_2 в те же пункты – соответственно 2, 5, и 4 ден. ед. В каждый пункт надо доставить по одинаковому количеству тонн горючего. Составить такой план перевозки горючего, при котором транспортные расходы будут наименьшими.

2. На трех складах A_1, A_2, A_3 находится сортовое зерно соответственно 10, 15, 25 т, которое надо доставить в четыре пункта B_1, B_2, B_3, B_4: пункту B_1 – 5 т, B_2 – 10 т, B_3 – 20 т, B_4 – 15 т. Стоимость доставки одной тонны со склада A_1 в указанные пункты соответственно равны 8, 3, 5, 2 ден. ед.; со склада A_2 – 4, 1, 6, 7 ден. ед. и со склада A_3 – 1, 9, 4, 3 ден. ед. Составить оптимальный план перевозки зерна в четыре пункта, минимизирующий стоимость перевозок.

■ Лекция 10

Целочисленное линейное программирование

Даны постановки задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП) и проведен их анализ; изложен метод Гомори решения полностью целочисленных задач ЛП.

Задачи оптимизации, решением которых должны быть целые числа, называют *задачами целочисленного программирования*. В том случае, если ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют *целочисленной задачей линейного программирования* (ЦЗЛП). Если требованию целочисленности удовлетворяют все переменные, то получаем полностью ЦЗЛП, а если только часть переменных должны удовлетворять условию целочисленности, то частично ЦЗЛП. Отметим также, что задачи ЦП нередко встречаются в управлении производством и принятии решений.

1°. Примеры задач целочисленного программирования.

а) *Задача о размещении оборудования.* Пусть требуется закупить n типов оборудования с производительностями $M_1, M_2, \ldots, M_n$ единиц продукции за смену. Это оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей b_1 квадратных метров, причем форма занимаемой площади может быть произвольной. На проибретение оборудования выделены финансы в количестве b_2 единиц. Один экземпляр оборудования j-го вида занимает площадь a_{1j} и стоимость его равна a_{2j}, $j=\overline{1,n}$.

Требуется определить, сколько закупить оборудования каждого типа, чтобы общая производительность за смену была максимальной.

Пусть x_j – количество закупаемого оборудования j-го вида. Математическая модель этой задачи следующая:

$$M_1x_1 + M_2x_2 + \ldots + M_nx_n \to \max,$$

причет максимум ищется среди таких целых неотрицательных чисел $x_1, \ldots, x_n$, что выполняются неравенства:

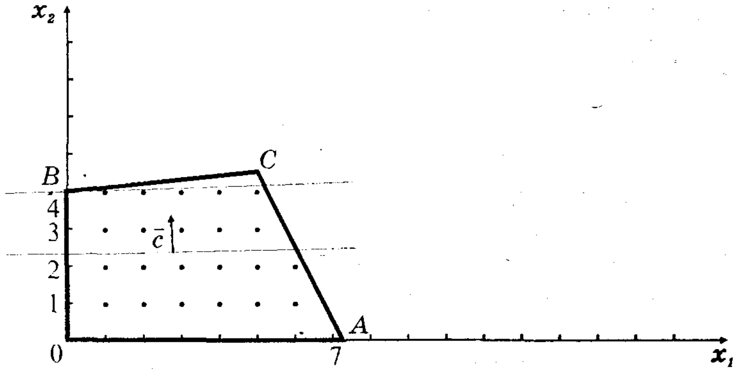


Рис. 10.1

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \le b_1; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \le b_2.$$

Это пример полностью ЦЗЛП.

б) *Задача распределения ресурсов*. Пусть i-тый способ использования x_i единиц ресурса дает доход $f_i(x_i)$; имеется n таких способов и m единиц ресурса. Ресурс предполагается неделимым, т.е. переменные $x_1, \ldots, x_n$ принимают целые неотрицательные значения. Нужно максимизировать доход.

Математическая модель данной задачи следующая:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max, \sum_{i=1}^{n} x_i = m, \; x_i \in \{0,1,\ldots,m\}, \; i = 1,\ldots,n.$$

Это пример задачи ЦП.

2^0. Каноническая задача ЦЛП. Математическая модель такой задачи следующая:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \; i = 1,\ldots,m,$$

$$x_j \ge 0, \; j = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

$$x_j \in Z, \; j = 1,\ldots,n,$$

где Z – множество целых чисел.

Полностью ЦЗ с двумя переменными можно решить графически, учитывая, что допустимое множество X такой задачи состоит из точек целочисленной координатной сетки, принадлежащих допустимому множеству X задачи ЛП (1) без дополнительного требования (2).

▷ ***Пример 1.*** Решить графически ЦЗЛП:

$$f(x) = x_1 - 20x_2 \to \min,$$

$$\begin{aligned} &-x_1 + 10x_2 \le 40, \\ &4x_1 + 2x_2 \le 29, \\ &x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \ j = 1,2. \end{aligned}$$

Решение. На плоскости (x_1, x_2) построим допустимое множество X рассматриваемой задачи ЛП без требования целочисленности (на рис. 10.1 многоугольник $OACB$) и отметим точки множества X с целочисленными координатами. Совокупность этих точек есть допустимое множество $\widetilde{X}$ полностью целочисленной задачи.

Перемещая линию уровня целевой функции $f(x)$ в направлении $\vec{c} = \mathrm{col}(-1;20)$ убывания $f(x)$, находим крайнее положение этой линии, в котором она еще имеет непустое пересечение с множеством $\widetilde{X}$. В этом положении линия уровня проходит через точку $B(0;4)$, поэтому решение задачи $\widetilde{x}^* = \mathrm{col}(0;4)$, $\widetilde{f}^* = \min\limits_{X} f(x) = -80$.

Отметим, что как видно из рис. 10.1 , точкой минимума функции $f(x)$ в этой задаче без требования целочисленности будет точка $C(5;4.5)$, т.е. $x^* = \mathrm{col}(5;4.5)$, $f^* = \min\limits_{X} f(x) = -85$. Отсюда следует, что точкой минимума целевой функции на допустимом множестве $\widetilde{X}$ целочисленной задачи не обязательно является ближайшая к решению x^* обычной (нецелочисленной) задачи точка множества X с целочисленными координатами. □

3°. Метод Гомори решения полностью ЦЗЛП (1), (2) с произвольным числом переменных. Метод Гомори состоит в последовательном отсечении от допустимого множества X нецелочисленной задачи (1) частей не содержащих точек с целыми координатами. Эти отсечения производятся включением в задачу дополнительных ограничений на переменные x_j.

Опишем алгоритм Гомори, использующий симплекс-метод.

1. Симплекс-методом находим решение x^* задачи (1) без учета требования целочисленности (2). Если для x^* условие (2) выполняется, то задача решена. В противном случае среди чисел β_i первого столбца симплекс-таблицы, определяющей решение x^* есть такие, что $\{\beta_i\} > 0$. Это вытекает из того, что всякое действительное число a можно представить в виде $a = [a] + \{a\}$, где $[a]$ – целая часть числа a (наибольшее целое число, не превосходящее a), а $\{a\} = a - [a]$ – его дробная положительная часть.

2. Среди нецелых элементов β_i выбираем произвольный элемент β_r, например, с максимальной дробной частью $\{\beta_i\}$. По r-ой строке симплекс-таблицы составляем дополнительное ограничение вида $-\sum_{j=m+1}^{n}\{\alpha_{rj}\}x_j \le -\{\beta_r\}$ (здесь, как и выше, для определенности полагаем, что свободные переменные x_j имеют номера $m+1,\dots,n$). С помощью вспомогательной переменной $x_{n+1} \ge 0$ это ограничение представим в виде равенства $x_{n+1} - \sum_{j=m+1}^{n}\{\alpha_{rj}\} = -\{\beta_r\}$ и вводим в симплекс-таблицу дополнительной строкой

$$x_{n+1}\ \beta_{n+1}\ \Big|\ \alpha_{n+1,m+1}\dots\alpha_{n+1,n}\ \Big|, \tag{3}$$

где $\alpha_{n+1,j} = -\{\alpha_{r,j}\}$ $j = m+1,\dots,n;$ $\beta_{n+1} = -\{\beta_r\} < 0.$

Так как $\beta_{n+1} = -\{\beta_r\} < 0$, то после дополнения строкой (3) симплекс-таблица перестает соответствовать допустимому базисному решению задачи ЛП, которую она описывает.

3. Для перехода к допустимому базисному решению производится следующая операция:

а) строка с отрицательным свободным членом β_k считается разрешающей (на первом шаге, очевидно, $k = n+1$);

б) если все коэффициенты $a_{kj} > 0$, то задача не имеет решения; в противном случае номер разрешающего столбца находится из условия

$$\frac{p_e}{|a_{ke}|} = \min_{j:a_{kj}<0} \frac{p_j}{|a_{kj}|}$$

(p_j – элементы последней строки симплекс-таблицы);

в) совершается преобразование симплекс-таблицы с опорным элементом a_{kl}. Если в новой таблице по-прежнему есть хотя бы один отрицательный свободный член, то описанная процедура повторяется, начиная с операции а), необходимое число раз.

Если все элементы β_i вновь полученной симплекс-таблицы неотрицательны, то допустимое базисное решение получено. Отметим, что выбор опорного элемента a_{kl} гарантирует неотрицательность коэффициентов p_j новой симплекс-таблицы. Поэтому найденное допустимое базисное решение является и оптимальным.

4. Если найденное в п. 3 решение задачи ЛП удовлетворяет условию целочисленности, то вычисления завершаются, а если нет, то продолжаются переходом к п. 2 описания алгоритма.

Приведенный алгоритм позволяет найти решение полностью ЦЗЛП или установить отсутствие решений за конечное число итераций.

▷ ***Пример 2.*** Решить задачу примера 1 методом Гомори.

Решение. Вводим дополнительные переменные $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ и запишем эту задачу в канонической форме:

$$f(x) = x_1 - 20x_2 \to \min, \qquad (4)$$

$$-x_1 + 10x_2 + x_3 = 40,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 29, \qquad (5)$$
$$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,4}.$$

Заметим, что так как все коэффициенты ограничений-равенств целые, то целочисленность исходных переменных x_1, x_2 влечет целочисленность и дополнительных переменных x_3, x_4. Поэтому задачу (4), (5) можно рассматривать как полностью целочисленную и применить для ее решения метод Гомори.

Одна из угловых точек нецелочисленной задачи (4) $x^0 = \mathrm{col}(0;0;40;29)$. Запишем укороченную симплекс-таблицу для этой точки:

базис		x_1	x_2
x_3	40	-1	$\boxed{10}$
x_4	29	4	2
f	0	1	-20

Решение нецелочисленной задачи (4) находится за две итерации симплекс-метода:

		x_1	x_3
x_2	4	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
x_4	21	$\boxed{\frac{42}{10}}$	$-\frac{2}{10}$
f	80	-1	2

		x_4	x_3
x_2	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{4}{42}$
x_1	5	$\frac{10}{42}$	$-\frac{2}{42}$
f	85	$\frac{10}{42}$	$\frac{82}{42}$

Это решение $x^* = \mathrm{col}\left(5;\frac{9}{2};0;0\right)$, $f^* = -85$ не удовлетворяет условию целочисленности, поэтому дополняем его строкой (3):

		x_4	x_3
x_2	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{4}{42}$
x_1	5	$\frac{10}{42}$	$-\frac{2}{42}$
x_5	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{-\frac{1}{42}}$	$-\frac{4}{42}$
	85	$\frac{10}{42}$	$\frac{82}{42}$

Для перехода к допустимому базисному решению находим разрешающий элемент по описанному выше правилу и преобразуем симплекс-таблицу:

		x_5	x_3
x_2	4	1	0
x_1	0	10	– 1
x_4	21	– 42	4
f	80	10	1

Последняя симплекс-таблица не только соответствует допустимому базисному решению, но и дает решение рассматриваемой задачи: $\tilde{x}^* = \mathrm{col}(0;4)$, $\tilde{f}^* = -80$. □

Замечание 1. Отметим, что переход к каноническому виду в полностью ЦЗЛП, содержащей ограничения-неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \tag{6}$$

не приводит в общем случае к полностью целочисленной задаче в каноническом виде, так как в преобразованных ограничениях (6)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i$$

вспомогательные переменные x_{n+1} не подчинены требованию целочисленности.

Однако, если все коэффициенты a_{ij}, b_i в (6) целые числа, то условие целочисленности распространяется и на x_{n+1}, как это делалось при решении примера 2.

Полностью ЦЗ в каноническом виде можно получить и тогда, если в (6) a_{ij}, b_i – рациональные числа. Для этого нужно сначала умножить (6) на общее кратное знаменателей коэффициентов a_{ij}, b_i, т.е. перейти к целым коэффициентам в (6), а затем ввести вспомогательные переменные x_{n+1}.

4⁰. Частично целочисленные задачи ЛП. Если в модели типа (1), (2) требование целочисленности всех переменных не нужно, то его алгоритм в этом случае отличается видом коэффициентов $\alpha_{n+1,j}$ в дополнительной строке (3), а именно

$$\alpha_{n+1,j}=\begin{cases}-\alpha_{rj}, & \text{если } \alpha_{rj}\geq 0,\\ \dfrac{\{\beta_r\}}{1-\{\beta_r\}}\alpha_{rj}, & \text{если } \alpha_{rj}<0,\end{cases}$$

если переменная x_j подчинена требованию целочисленности, и

$$\alpha_{n+1,j}=\begin{cases}-\{\alpha_{rj}\} & \text{если } \{\alpha_{rj}\}\leq\{\beta_r\},\\ \dfrac{\{\beta_r\}}{1-\{\beta_r\}}\left(\{\alpha_{rj}\}-1\right) & \text{если } \{\alpha_{rj}\}>\{\beta_r\},\end{cases}$$

для x_j, свободных от этого требования.

Естественно, вычисления заканчиваются, когда целыми являются не обязательно все коэффициенты β_i симплекс-таблицы, а только те, которым соответствуют переменные x_i, подчиненные требованию целочисленности.

✍ Задания для самостоятельной работы

1. Решить полностью целочисленные задачи ЛП методом Гомори:

а) $f(x) = -x_1 + x_4 \to \min,$
$-2x_1 + x_4 + x_5 = 1,$
$x_1 + x_2 - 2x_4 = 3,$
$x_1 + x_3 + 3x_4 = 3,$
$x_j \ge 0, x_j \in Z, j = \overline{1,5};$

б) $f(x) = -x_1 - x_2 \to \min,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$
$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9,$
$x_j \ge 0, x_j \in Z, j = \overline{1,4}.$

2. В цехе размещены 100 станков 1-го типа и 200 станков 2-го типа, на каждом из которых можно производить детали A_1 и A_2. Производительность станков в сутки, стоимость одной детали каждого вида и минимальный суточный план их выпуска представлены в таблице 1.

Таблица 1

Детали	*Производительность дет./сут.*		*Стоимость 1 детали руб.*	*Минимальный суточный план*
	Тип 1	*Тип* 2		
A_1	20	15	6	1510
A_2	35	30	4	4500

Найти количества x_{ij} станков i-го типа, $i = 1, 2$, которое необходимо выделить для производства деталей A_j, $j = 1, 2$, с таким расчетом, чтобы стоимость продукции, производимой в сутки, была максимальной.

3. Решить задачи:

а) $f(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min,$
$4x_1 + x_2 \le 44,$
$x_1 \le 22,$
$x_2 \le 18,$
$x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2;$

б) $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$
$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \ge 1,$
$2x_1 + x_2 \ge 1,$
$\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 \ge 1,$
$x_j \ge 0, x_j \in Z, j = \overline{1,3}.$

4. Решить частично ЦЗЛП методом Гомори:

а) $f(x) = -x_1 - 4x_2 \to \min,$

$$x_2 + x_3 = \frac{7}{2},$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 7,$$
$$-x_1 + x_2 + x_5 = 2,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}, \quad x_1 \in Z;$$

б) $f(x) = -x_1 - x_2 \to \min,$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4,$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \quad x_1 \in Z.$$

■ Лекция 11

Задача безусловной оптимизации

Даны понятия максимума и минимума функции; рассмотрены вогнутые и выпуклые функции, положительно и отрицательно определенные квадратичные формы; сформулированы основные теоремы безусловной оптимизации.

Рассмотрим задачу оптимизации (см. Л. 2):

$$f(x) \to \max(\min), \quad x \in X \subset R^n. \qquad (1)$$

1°. Понятия максимума и минимума функции. Детализируем постановку задачи оптимизации. Будем говорить, что $x^* = (x_1^*;\ldots;x_n^*)$[*)] – *точка максимума* функции $f(x)$ в X или что x^* – точка условного максимума функции $f(x)$, если $x^* \in X$ и $f(x^*) \geq f(x)$ $\forall x \in X \subset R^n$. Если $X = R^n$, то говорят, что x^* – точка безусловного максимума.

Скажем, что x^* – *точка локального максимума* функции $f(x)$, если для нее существует окрестность $U(x^*)$, для любой точки x которой $f(x)$ не превышает $f(x^*)$, т.е. $f(x) \leq f(x^*)$ $\forall x \in U(x^*)$.

Точка x^* есть *точка абсолютного (глобального) максимума* в X, если x^* будет точкой максимума на всем множестве X.

Введенные понятия сведем в таблицу 1.

Таблица 1

	Безусловный	*Условный*
Локальный	Существует такая окрестность $U(x^*)$, что $f(x^*) \geq f(x)$ для любого $x \in U(x^*)$	Для $x^* \in X$ существует такая окрестность $U(x^*)$, что $f(x^*) \geq f(x)$ для любого $x \in U(x^*) \cap X$
Абсолютный	$f(x^*) \geq f(x)$ для любого $x \in R^n$	$x^* \in X$ и $f(x^*) \geq f(x)$ для любого $x \in X$

[*)] здесь и в Л.12 для краткости символ «col» в обозначении вектора опускаем.

Замечание 1. Понятия строгого максимума вводятся так же, только знак «$\geq$» нужно заменить на знак «>».

Замечание 2. Для определения понятия минимума функции следует в приведенных определениях слово "максимум" заменить на «минимум» и знак «$\geq$» заменить на «$\leq$». Максимумы и минимумы называют *экстремумами*.

Замечание 3. Отметим, что поиск минимума функции $f(x)$ на множестве $X \subset R^n$ можно заменить на поиск максимума функции $\varphi(x) = -f(x)$ (см. Л. 2).

Поэтому дальше будем рассматривать только задачу на максимум функции $z = f(x)$.

2^0. Вогнутые и выпуклые функции. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subset R^n$ называется *вогнутой*, если для любых векторов x^1 и $x^2 \in X$ и любого λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, выполняется неравенство

$$\lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \leq f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2). \qquad (2)$$

На рис. 11.1 это определение иллюстрируется для функции одной переменной.

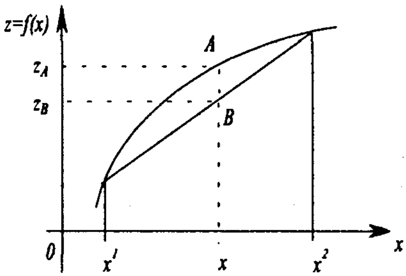


Рис. 11.1

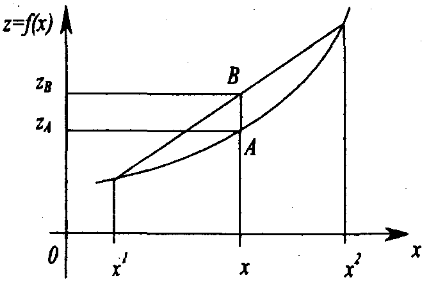


Рис. 11.2

Геометрически вогнутость функции $f(x)$ означает, что отрезок, соединяющий любые две точки поверхности, которую задает эта функция в пространстве R^{n+1}, лежит на этой поверхности или ниже нее: $z_A = f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2)$; $z_B = \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$; $x = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$; $z_A \geq z_B$.

Если же выполняется противоположное неравенство, т.е.

$$\lambda f(x^1)+(1-\lambda)f(x^2)\geq f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2),$$

то функция $f(x)$ называется *выпуклой*. На рис. 11.2 изображена выпуклая функция одной переменной. Очевидно, что если $f(x)$ – выпуклая функция, то $-f(x)$ является вогнутой.

Если неравенство (2) является строгим (при $0<\lambda<1$), то говорят, что $f(x)$ – *строго вогнутая* функция. Геометрически это означает, что отрезок, соединяющий любые две точки поверхности, заданный уравнением $z=f(x)$, лежит ниже этой поверхности.

Связь между выпуклыми множествами и выпуклыми функциями раскрывается в следующем утверждении: ***для того чтобы функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, была выпуклой (вогнутой), необходимо и достаточно, чтобы ее надграфик***

$$X_f=\{(x;z): x\in X, z\geq f(x)\}\ (X_f=\{(x;z): x\in X, z\leq f(x)\})$$

был выпуклым множеством.

При определении вогнутости (выпуклости) функции не требовалось, чтобы функция была непрерывной или дифференцируемой.

Если же функция $f(x)$ дифференцируема и вогнута, то справедлива теорема, которую приводим без доказательства.

<u>Теорема 1.</u>

Для любых x^1, $x^2\in X$ имеет место неравенство

$$f(x^1)-f(x^2)\leq(x^1-x^2)'\operatorname{grad}f(x_2). \qquad (3)$$

Напомним, что в (3) $\operatorname{grad}f(x)\stackrel{\text{def}}{=}\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1};\ldots;\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$, $a'y$ – скалярное произведение n-векторов a и y.

3°. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Напомним, что *квадратичной формой* от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют однородный многочлен $f(x)$ второй степени от $x_1, \ldots, x_n$, т.е.

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_i x_j, \qquad (4)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратичную форму (4) можно записать также в виде

$$f(x) = x'Ax, \tag{4'}$$

где $x = (x_1; \ldots; x_n)$, а

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Говорят, что квадратичная форма (4')

– *положительно определена*, если $f(x) > 0 \ \forall x \in R^n, \ x \neq 0$;

– *отрицательно определена*, если $f(x) < 0 \ \forall x \in R^n, \ x \neq 0$;

– *неопределенная*, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Справедлив следующий *критерий Сильвестра* для установления того, является ли данная квадратичная форма положительно или отрицательно определенной: квадратичная форма (4') положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры, составленные из элементов матрицы A, т.е.

$$\Delta_1 = a_{11}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

положительны и отрицательно определена в том и только том случае, когда главные миноры матрицы A нечетного порядка $\Delta_1, \Delta_3, \ldots$ меньше нуля, а четного порядка $\Delta_2, \Delta_4, \ldots$ больше нуля.

Замечание 4. Пусть задана функция нескольких переменных $z = f(x)$, которая определена и имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным в точке $x^0 = (x_1^0; \ldots; x_n^0)$ и ее окрестности. Матрицу

$$H(x^0) = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

называют *матрицей Гессе* функции $z = f(x)$ в точке x^0. Она представляет матрицу дифференциала второго порядка $\mathrm{d}^2 z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_j$, который является квадратичной формой относительно приращений $\mathrm{d}x_1 = \Delta x_1, \mathrm{d}x_2 = \Delta x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n = \Delta x_n$, где вторые частные производные вычислены в точке x^0.

4^0. Безусловный максимум функции многих переменных.

4.1. Условия экстремума первого порядка.

Теорема 2.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^* \in R^n$. Если x^* – локальное решение задачи

$$f(x) \to \max(\min), \; x \in R^n,$$

то в точке x^* равны нулю все частные производные:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} = 0, \; \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} = 0 \qquad (6)$$

или

$$\operatorname{grad} f\left(x^*\right)=0 .$$

Доказательство. Пусть функция $z=f(x)$ имеет, например, максимум в точке $x^*=\left(x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*\right)$. Допустим, что меняется только переменная x_j, а остальные неизменны, т.е. $x_k=x_k^*$, $k=\overline{1,n}$; $k \neq j$. Тогда функция z будет функцией одной переменной x_j, т.е.

$$f\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_j, \ldots, x_n^*\right)=\varphi\left(x_j\right).$$

Функция $\varphi(x_j)$ имеет максимум при $x_j=x_j^*$, и следовательно

$$\frac{\mathrm{d} \varphi\left(x_j\right)}{\mathrm{d} x_j}=0 . \qquad (7)$$

Имеем

$$\frac{\mathrm{d} \varphi\left(x_j^*\right)}{\mathrm{d} x_j}=\lim _{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{\varphi\left(x_j^*+\Delta x_j\right)-\varphi\left(x_j^*\right)}{\Delta x_j}=$$

$$=\lim _{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f\left(x_1^*, \ldots, x_j^*+\Delta x_j, \ldots, x_n^*\right)-f\left(x^0\right)}{\Delta x_j}=\frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_j} .$$

Отсюда и (7) имеем

$$\frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_j}=0, \quad j=\overline{1,n},$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2 дает необходимые условия максимума (минимума) функции $f(x)$ и точки x^0, где $\operatorname{grad} f\left(x^0\right)=0$ называют *стационарными*. Для вогнутой функции эти условия и достаточны.

Теорема 3.

Дифференцируемая вогнутая функция $f(x)$ имеет абсолютный максимум в точке x^* тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{grad} f(x^*) = 0. \qquad \textbf{(8)}$$

Доказательство. В силу теоремы 2 условие (8) является необходимым. Пусть теперь условие (8) выполняется в точке x^*. Для вогнутой функции из неравенства (3) получается неравенство

$$f(x) \le f(x^*) + (x - x^*)' \operatorname{grad} f(x^*).$$

Отсюда и в силу (8) получаем $f(x) \le f(x^*)$, что и означает, что x^* – точка максимума функции $f(x)$. □

4.2. Условия максимума второго порядка.

Теорема 4 (необходимое условие).

Если x^* – точка строгого локального максимума дважды дифференцируемой функции $z = f(x)$, то матрица Гессе $H(x^*)$ отрицательно определена.

Доказательство. Пусть x^* – точка строгого локального максимума функции $z = f(x)$. Тогда в условиях теоремы 4 при малых приращениях $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, справедливо равенство

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2, \ldots, x_n^* + \Delta x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \\ &= \mathrm{d} z + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 z + \frac{\rho^2}{2}\omega(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n)\end{aligned} \qquad \textbf{(9)}$$

где $\mathrm{d} z = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}\mathrm{d} x_j = 0$, так как $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} = 0$, $\rho = \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

$\omega(\Delta x_1, \ldots \Delta x_n) \to 0$ при $\rho \to 0$, причем $\frac{\rho^2}{2}\omega$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\mathrm{d}^2 z$.

Тогда из (9)

$$\Delta z = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 z + \frac{\rho^2}{2}\omega(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n). \qquad \textbf{(10)}$$

Так как x^* – точка строгого локального максимума, то $\Delta z < 0$ (при $\rho \neq 0$), и, как следует из (10), $\frac{1}{2}\mathrm{d}^2 z < 0$ (при $\rho \neq 0$), т.е. второй дифференциал $\mathrm{d}^2 z < 0$ в точке x^*.

Следовательно, $\mathrm{d}^2 z = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j$ является отрицательно определенной квадратичной формой от приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, а тогда ее матрица Гессе $H(x^*)$ отрицательно определена. □

Теорема 5 (достаточное условие).

Пусть функция $z = f(x)$ дважды дифференцируема. Если $\mathrm{grad} f(x^*) = 0$ и матрица $H(x^*)$ отрицательно определена, то x^* – точка строгого локального максимума функции $f(x)$.

Доказательство. Из условия $\mathrm{grad} f(x^*) = 0$ имеем

$$\Delta z = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 z + \frac{\rho^2}{2}\omega(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) \equiv \mathrm{d}^2 z .$$

Поскольку $\mathrm{d}^2 z < 0$, то при малых $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ получаем $\Delta z < 0$, и, следовательно

$$f(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2, \ldots, x_n^* + \Delta x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) < 0$$

Откуда

$$f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) > f(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2, \ldots, x_n^* + \Delta x_n)$$

при любых малых приращениях $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ ($\rho \neq 0$). Следовательно, x^* – точка строгого локального максимума функции $z = f(x)$. □

▷ ***Пример 1.*** Решить задачу:

$$f(x) = 3x_1x_2 - x_1^3 - x_2^3 \to \max, \ x \in R^2 .$$

Решение. Условие (8) имеет вид

$$3x_2 - 3x_1^2 = 0,\ 3x_1 - 3x_2^2 = 0.$$

Решение этой системы (стационарные точки) – $x^1 = (0;0)$ и $x^2 = (1;1)$. Имеем

$$H(x) = \begin{pmatrix} -6x_1 & 3 \\ 3 & -6x_2 \end{pmatrix},\ H(x^1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ H(x^2) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Используя критерий Сильвестра, получаем, что матрица Гессе $H(x^1)$ не будет отрицательно определенной, а матрица $H(x^2)$ отрицательно определена. Тогда, в силу теоремы 4, точка x^1 не может быть решением задачи, а, в силу теоремы 5, точка $x^2 = x^*$ – строгое локальное решение рассматриваемой задачи. □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Выяснить, при каких значениях параметров данные функции являются выпуклыми:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c$;

б) $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$;

в) $f(x_1, x_2) = \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p > 0$;

г) $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

2. Найти решение следующих задач:

а) $f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \min,\quad x \in R^2$;

б) $f(x) = x_1 + x_2 + 4\sin(x_1)\sin(x_2) \to \min,\ x \in R^2$.

3. Показать, что функция $f(x) = x_1e^{x_1} - (1 + e^{x_1})\cos(x_2)$ имеет на R^2 бесконечно много точек локального минимума и ни одной точки локального максимума.

■ Лекция 12

Задачи условной оптимизации

Рассмотрена задача на условный экстремум при ограничениях-равенствах; изучена задача на условный экстремум при условиях-неравенствах; сформулированы условия Куна-Таккера

Условный экстремум при ограничениях-равенствах. Рассмотрим задачу: найти

$$z = f(x) \to \max \tag{1}$$

при условиях

$$g_k(x) = 0, \ k = \overline{1,m} \ (m \le n). \tag{2}$$

Задачу (1)-(2) называют *задачей на условный экстремум при ограничениях-равенствах*. Она – частный случай задачи на условный-экстремум из Л.11 (см. п. 1⁰), где $X = \left\{x \in R^n \mid g_k(x) = 0, \ k = \overline{1,m}\right\}$.

1⁰. Классическое правило множителей Лагранжа. Считаем, что функции $f, g_k : R^n \to R$ принадлежат классу $C^{(1)}$ (определены и непрерывны в каждой точке $x \in R^n$ вместе со всеми частными производными по $x_1, \ldots, x_n$).

Пусть x^0 – некоторый план задачи (1)-(2). Будем говорить, что план x^0 – *обыкновенный*, если на нем линейно независимы векторы

$$\frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial g_m(x^0)}{\partial x}. \tag{3}$$

Теорема 1.

Если x^* – оптимальный обыкновенный план задачи (1)-(2), *то найдется такой единственный вектор Лагранжа* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*)$, *что*

$$\operatorname{grad} f(x^*) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \operatorname{grad} g_k(x^*) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим систему из m уравнений

$$g_k(x) = y_k,\ k = \overline{1,m}, \tag{4}$$

где y_k – произвольные числовые переменные. По условию теоремы 1 матрица $G = \left(\dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_n}\right)$ имеет ранг m, $m \le n$. Значит, на основании теоремы о неявной функции в окрестности точки x^* можно выразить m переменных x_j в виде дифференцируемых функций от $(n-m)$ остальных переменных и величин y_k (для определенности считаем, что первые m переменных x_j выражаются указанным образом):

$$x_j = \varphi_j(y_1,\ldots,y_m,x_{m+1},\ldots,x_n),\ j = \overline{1,m}.$$

Подставляя эти выражения в функцию $z = f(x)$, найдем новую дифференцируемую функцию

$$f(x) = F(y_1,y_2\ldots,y_m,x_{m+1},\ldots,x_n).$$

Так как x^* – локальный максимум на X функции $f(x)$, то точка $(x^*_{m+1};\ldots;x^*_n)$ доставляет локальный максимум функции $F(0,0,\ldots,0,x_{m+1},\ldots,x_n)$. Следовательно, используя теорему Л. 11.2, заключаем, что производные функции F по $x_{n+1},\ldots,x_n$ равны нулю, а тогда дифференциал функции f, тождественный дифференциалу функции F, можно записать в точке x^* так:

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_m}\mathrm{d}y_m.$$

Полагая,

$$\lambda^*_1 = -\frac{\partial F}{\partial y_1},\ldots,\lambda^*_m = -\frac{\partial F}{\partial y_m},$$

можно записать $\mathrm{d}f+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^*\,\mathrm{d}y_k=0$. Так как, в силу (4), $\mathrm{d}y_k=\mathrm{d}g_k$, то отсюда получаем требуемое равенство. Теорема 1 доказана. □

Величины $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*$ называют *множителями Лагранжа* или *двойственными переменными*. Из теоремы 1 следует, что условия

$$\operatorname{grad} f(x^*)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^*\operatorname{grad} g_k(x^*)=0$$

являются необходимыми условиями максимума функции $f(x)$ при ограничениях-равенствах.

Для того чтобы получить систему уравнений для определения точек x^* и λ^* рекомендуется пользоваться следующим правилом, называемым *классическим правилом множителей Лагранжа*.

Составляем функцию

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k g_k(x),$$

называемую *функцией Лагранжа* или *лагранжианом*. Затем приравниваем к нулю производные этой функции по переменным $x_1,x_2,\ldots,x_n$ и $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=0\ \ (j=\overline{1,n})\ \text{ или }\ \frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_j}=0\ \ (j=\overline{1,n}),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}=0\ \ (k=\overline{1,m})\ \text{ или }\ g_k(x)=0\ \ (k=\overline{1,m}).$$

Решение полученной системы из $n+m$ уравнений с $n+m$ неизвестными $x_1,x_2,\ldots,x_n$ и $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$, и определит точки x^* и координаты вектора λ^* множителей Лагранжа. Среди точек x^* находятся локальные максимумы и минимумы функции $z=f(x)$, а также, возможно, и другие точки (например, точки перегиба данной функции).

Для точного выявления максимумов и минимумов нужно иметь более сильные условия, которые будут рассмотрены в следующем пункте. Здесь приведем случай, когда эти условия (условия первого порядка) достаточны.

Теорема 2.

Пусть $f(x)$ *и* $g_k(x)$ $(k=\overline{1,m})$ *вогнутые функции класса* $C^{(1)}$ *и пусть существует такой вектор* $\lambda^*=(\lambda_1^*;\ldots;\lambda_m^*)$, *что в точке* $x^*=(x_1^*;\ldots;x_n^*)$ *из X выполнены условия*

$$\operatorname{grad} f(x^*)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^*\operatorname{grad} g_k(x^*)=0,$$

причем соответствующая функция Лагранжа

$$L(x,\lambda^*)=f(x)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^* g_k(x)$$

вогнута по переменным $x_1,\ldots,x_n$. *Тогда* x^* *– абсолютный максимум функции f(x) на множестве X*

Доказательство. Так как $L(x,\lambda^*)$ вогнута, то выполнено неравенство

$$L(x,\lambda^*)\le L(x^*,\lambda^*)+(x-x^*)'\operatorname{grad}L(x^*,\lambda^*)$$

или

$$f(x)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^* g_k(x)\le f(x^*)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^* g_k(x^*)+(x-x^*)'\operatorname{grad}L(x^*,\lambda^*).$$

Поскольку $g_k(x^*)=0$ и $\operatorname{grad}L(x^*,\lambda^*)=0$, то отсюда получаем

$$f(x)\le f(x^*)\quad \forall x\in X,$$

что и требовалось доказать. □

2^0. Условия минимума второго порядка. Рассмотрим задачу (1)-(2), считая, что функции $f(x)$, $g_k(x)$ принадлежат классу $C^{(2)}$ (определены и непрерывны в каждой точке пространства R^n вместе со своими частными производными до второго порядка включительно).

Теорема 3.

Если x^* *– локально оптимальный обыкновенный план задачи* (1)-

(2), λ^* *– соответствующий ему* m-*вектор Лагранжа, то квадратичная форма*

$$l' \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} l \le 0,$$

на гиперплоскости, заданной уравнениями

$$l' \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Здесь $\dfrac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2}$ – матрица Гессе функции $L(x,\lambda)$ в точке (x^*, λ^*).

Точку x^0 задачи (1)-(2), назовем *условно стационарной,* если найдется такой вектор Лагранжа λ^0, что $\dfrac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x} = 0$.

Теорема 4.

Для локальной оптимальности в задаче (1), (2), *условно стационарной точки* x^0 *достаточно, чтобы при соответствующем ей векторе Лагранжа* λ^0 *была отрицательна квадратичная форма*

$$l' \frac{\partial^2 L(x^0, \lambda^0)}{\partial x^2} l < 0 \quad (l \ne 0)$$

на гиперплоскости, заданной уравнениями

$$l' \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (5)$$

▷ ***Пример 1.*** Найти локальное решение задачи:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} a x_1^2 + \frac{1}{2} b x_2^2 \to \max, \quad x_1^3 + x_2^3 = 1,$$

где $a > 0$ и $b > 0$ – заданные числа.

Решение. Ясно, что условие (3) здесь выполнено. Выписываем функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 + \lambda(x_1^3 + x_2^3 - 1).$$

Так как $\frac{\partial L}{\partial x}(x_1, x_2, \lambda) = (ax_1 + 3\lambda x_1^2, bx_2 + 3\lambda x_2^2)$, то система для определения стационарных точек следующая:

$$ax_1 + 3\lambda x_1^2 = 0,\ bx_2 + 3\lambda x_2^2 = 0,\ x_1^3 + x_2^3 = 1.$$

Эта система имеет три решения:

1) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ \lambda = -\frac{b}{3}$;

2) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ \lambda = -\frac{a}{3}$;

3) $x_1 = \frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}},\ x_2 = \frac{b}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}},\ \lambda = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^3 + b^3}$.

Далее имеем

$$\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda_2)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} a + 6x_1\lambda & 0 \\ 0 & b + 6x_2\lambda \end{pmatrix}.$$

Для указанных решений эта матрица принимает соответственно вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Условие (5) выглядит здесь так:

$$3x_1^2 l_1 + 3x_2^2 l_2 = 0 \text{, где } l = (l_1, l_2).$$

Для первых двух решений это означает, что $l_2 = 0$ или $l_1 = 0$ соответственно. Отсюда ясно, что матрицы A_1 и A_2 не удовлетворяют условию, указанному в теореме 3. Следовательно, векторы (0;1) и (1;0) не могут быть локально оптимальными в рассматриваемой задаче. Для матрицы A_3 условие, указанное в теореме 4, заведомо выполняется. Поэтому вектор $\left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}; \frac{b}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}\right)$ является локальным решением данной задачи.

3⁰. Условный экстремум при условиях-неравенствах. Пусть требуется максимизировать функцию

$$z = f(x) \qquad \textbf{(6)}$$

при ограничениях

$$g_k(x) \le 0, \ k = \overline{1,m}, \qquad \textbf{(7)}$$

где f, $g_1, \dots, g_m$ – дифференцируемые функции. Покажем, что эту задачу можно свести к задаче с ограничениями равенствами. Для этого введем дополнительные переменные y_k, $k = \overline{1,m}$, квадрат которых следует прибавить к левым частям соответствующих неравенств $g_k(x) \le 0$, $k = \overline{1,m}$, чтобы они были равенствами, т.е.

$$g_k(x) + y_k^2 = 0, \ k = \overline{1,m}.$$

Таким образом, задача с ограничениями неравенствами сведена к задаче на максимум при ограничениях равенствах.

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \lambda_1, \dots \lambda_m) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k^2 .$$

Необходимые условия экстремума в случае обыкновенного оптимального плана задачи (6)-(7) примут вид:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n},$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_k} = 2\lambda_k y_k = 0 \Rightarrow \lambda_k y_k^2 = 0, \ k = \overline{1,m},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = g_k(x) + y_k^2 = 0, \ k = \overline{1,m}.$$

Эти условия и определяют «подозрительные» точки на экстремум (условно стационарные точки). В такой точке имеем, что

$$g_k(x^*) + (y_k^*)^2 = 0$$

или $g_k(x^*) \le 0$, так как $(y_k^*)^2 \ge 0$.

Из условий

$$\lambda_k^*(y_k^*)^2 = 0$$

получаем, что если $(y_k^*)^2 \neq 0$, т.е. $g_k(x^*) < 0$, то $\lambda_k^* = 0$; если же $\lambda_k^* \neq 0$, то $g_k(x^*) = 0$, т.е. k-тое ограничение выполняется как точное равенство.

Необходимые условия экстремума, получившие название *условий Куна-Таккера*, примут следующий вид:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\lambda_k g_k(x) = 0, \quad k = \overline{1,m};$$

$$g_k(x) \leq 0, \quad k = \overline{1,m}.$$

Отметим также, что в ряде экономических задач, кроме условий (7), часто возникают условия неотрицательности переменных $x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}$. В этом случае условия $x_j \geq 0$ сводятся к равенствам

$$-x_j + u_j^2 = 0,$$

а условия $g_k(x) \leq 0$ — к равенствам

$$g_k(x) + y_k^2 = 0.$$

Опять задача максимизации функции $z = f(x)$ при указанных двух типах неравенств сводится к задаче максимизации этой функции при условиях равенствах. Необходимые условия экстремума (условия Куна-Таккера) для обыкновенных оптимальных планов получаем из функции Лагранжа этой задачи

$$L(x, y, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (g_k(x) + y_k^2) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j (-x_j + u_j^2).$$

Вычислив частные производные функции $L(x, y, \lambda, \mu)$ по всем переменным и приравняв их к нулю, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} - \mu_j = 0, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_k} = 2\lambda_k y_k = 0 \Rightarrow \lambda_k y_k^2 = 0,\ k = \overline{1,m};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = g_k(x) + y_k^2 = 0 \Rightarrow g_k(x) \le 0,\ k = \overline{1,m}; \qquad \textbf{(8)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_j} = -x_j + u_j^2 = 0 \Rightarrow x_j \le 0,\ j = \overline{1,n};$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_j} = 2\mu_j u_j = 0 \Rightarrow \mu_j u_j^2 = 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Следовательно, необходимые условия Куна-Таккера можно записать так:

$$1)\ g_k(x) \le 0,\ k = \overline{1,m};\ 2)\ \lambda_k g_k(x) = 0,\ k = \overline{1,m};$$

$$3)\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n};\ 4)\ x_j\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}\right) = 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Из первой группы равенств (8) получаем

$$\mu_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j},\ j = \overline{1,n}.$$

А тогда из 1), 2) заключаем, что если в точке максимума x^* имеем $g_k(x^*) < 0$, то $\lambda_k^* = 0$, а если $\lambda_k^* \ne 0$, то $g_k(x^*) = 0$.

Из 3), 4) вытекает, если $x_j^* > 0$, то $\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k^* \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0$, и если $\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k^* \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \ne 0$, то $x_j^* = 0$.

Заметим, что равенства $g_k(x) = b_k$ сводятся к равенствам типа $g_k(x) - b_k = 0$, неравенства $g_k(x) \le b_k$ — к неравенствам $g_k(x) - b_k \le 0$, а неравенства $g_k(x) \ge b_k$ — к неравенствам $-g_k(x) + b_k \le 0$.

В заключении отметим следующее: для вогнутой функции $z = f(x)$, заданной на замкнутом выпуклом множестве $X \subset R^n$ любой локальный максимум является и глобальным; если $f(x)$ – строго вогнутая функция, то ее глобальный максимум на выпуклом замкнутом множестве X достигается в единственной точке; если $f(x)$ – дифференцируемая вогнутая функция на выпуклом замкнутом множестве X, то равенство нулю ее градиента является необходимым и достаточным условием максимума этой функции, причем если функция строго вогнутая, то этот максимум единственный.

✍ Задания для самостоятельной работы

1. Найти решение следующих задач на условный минимум с помощью принципа Лагранжа:

а) $x_1 x_2 x_3 \to \min,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1$;

б) $x_1 x_2 + x_2 x_3 \to \max,\ x_1^2 + x_2^2 = 2,\ x_2 + x_3 = 2$.

2. Найти параметры цистерны, которая при заданной площади поверхности S_0 имеет максимальный объем.

3. Требуется из проволоки заданной длины p сделать равносторонний треугольник и квадрат, суммарная площадь которых максимальна.

4. Найти решение задачи

$$f(x, y) = (2x + 2)x^2 + (4ky - 40k - 4y)x - 40ky + 2ky^2 \to \min,$$

при ограничениях $x + y \le 5,\ x \le a,\ y \le b,\ x \ge 0,\ y \ge 0$:

N	*k*	*a*	*b*
1	2	3	3
2	3	3	4
3	4	4	3
4	5	4	4
5	6	3.5	3

■ Лекция 13

Функция полезности

В основе модели поведения потребителей лежит гипотеза, что каждый из них, осуществляя выбор наборов благ при заданных ценах и имеющемся доходе, стремится максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей.

Основными участниками процесса производства, распределения и потребления благ являются отдельные потребители и производители, которые имеют свои интересы и руководствуются при принятии решений определенными принципами. Построим формализованную теорию поведения потребителя.

1⁰. Множество благ. Доступные наборы благ. Пусть на рынке благ индивидуальному потребителю предлагается n различных благ. Под *набором благ* понимаем упорядоченную совокупность $\operatorname{col}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ количеств каждого из благ. Такой набор неотрицательных чисел можно рассматривать как n-мерный вектор $x = \operatorname{col}(x_1; \ldots; x_n)$ или точку x, где $x_j \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$ – количество блага j в натуральных единицах (штуках, килограммах, метрах и т.д.). Этот вектор называют *вектором благ*, который математически описывает набор благ. Всевозможные наборы благ образуют так называемое *множество благ*

$$R_+^n = \left\{ x = \operatorname{col}(x_1; x_2; \ldots; x_n) \,\middle|\, x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n} \right\}, \tag{1}$$

которое геометрически представляет собой неотрицательный ортант n-мерного пространства R^n.

Если для каждого блага j $(j = \overline{1,n})$ указаны минимальные и максимальные количества, которые могут войти в наборы $x = \operatorname{col}(x_1; \ldots; x_n)$, т.е. величины x_j удовлетворяют системе двусторонних ограничений

$$x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max},$$

то множество наборов благ G есть ограниченное множество и представляет собой n-мерный параллелепипед в R_+^n:

$$G = \left\{ x = \mathrm{col}(x_1; x_2; \ldots; x_n) \middle| \ x_j^{\min} \le x_j \le x_j^{\max}, \ j = \overline{1,n} \right\}. \qquad (2)$$

Множество наборов благ G может быть и неограниченным. Тогда оно имеет следующий вид:

$$G = \left\{ x = \mathrm{col}(x_1; \ldots; x_n) \in R_+^n \ \middle| \ x_j \ge x_j^{\min}, \ j = \overline{1,n} \right\}$$

или

$$G = \left\{ x = \mathrm{col}(x_1; \ldots; x_n) \in R_+^n \ \middle| \ x_j \le x_j^{\max}, \ j = \overline{1,n} \right\},$$

причем неравенства $x_j \ge x_j^{\min}$ или $x_j \le x_j^{\max}$ могут, вообще говоря, выполняться не обязательно для всех j, $j = \overline{1,n}$.

В распоряжении потребителя имеется ограниченное количество денежных средств M (доход), которые он может использовать для приобретения благ. Блага приобретаются по ценам, которые устанавливаются рынком и не зависят от отдельного потребителя. Обозначим их $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно для 1-го, 2-го,..., n-го блага. Вектор $p = \mathrm{col}(p_1; p_2; \ldots; p_n)$, где $p_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$, называют *вектором цен благ.* Тогда стоимость любого набора благ $x = \mathrm{col}(x_1; \ldots; x_n)$ однозначно определяется вектором цен $p = \mathrm{col}(p_1; \ldots; p_n)$, и она равна $p'x = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$.

Ясно, что стоимость любого блага, которое приобретает потребитель, не превосходит его дохода, т.е. должно выполняться линейное неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le M, \qquad (3)$$

которое называют "*бюджетным ограничением*".

Это неравенство (3) вместе с одним из ранее указанных для благ неравенством определяет в R_+^n множество K доступных наборов благ на рынке товаров и услуг. В силу наличия бюджетного неравенства (3) множество K всегда будет ограниченным множеством в R_+^n.

Например, в случае множества G, заданного неравенствами вида

$$0 < x_j^{\min} \le x_j \le x_j^{\max}, \ j = \overline{1,n},$$

получаем, что множество K доступных наборов благ может быть одним из трех:

1) пустое множество, т.е. при имеющемся доходе M и ценах $p = \mathrm{col}\left(p_1; \ldots; p_n\right)$ потребитель не может приобрести на рынке даже минимального набора благ и можно сказать, что в этом случае он живет за чертой бедности;

2) часть n-мерного параллелепипеда G, т.е. потребителю доступны не все наборы благ при имеющемся доходе M и установившихся ценах p на рынке благ;

3) весь n-мерный параллелепипед G, т.е. потребитель настолько богат, что ему доступен любой набор благ при его доходе и действующих ценах.

Геометрически эти три возможности в случае $n = 2$ изображены на рис. 13.1 а, б, в.

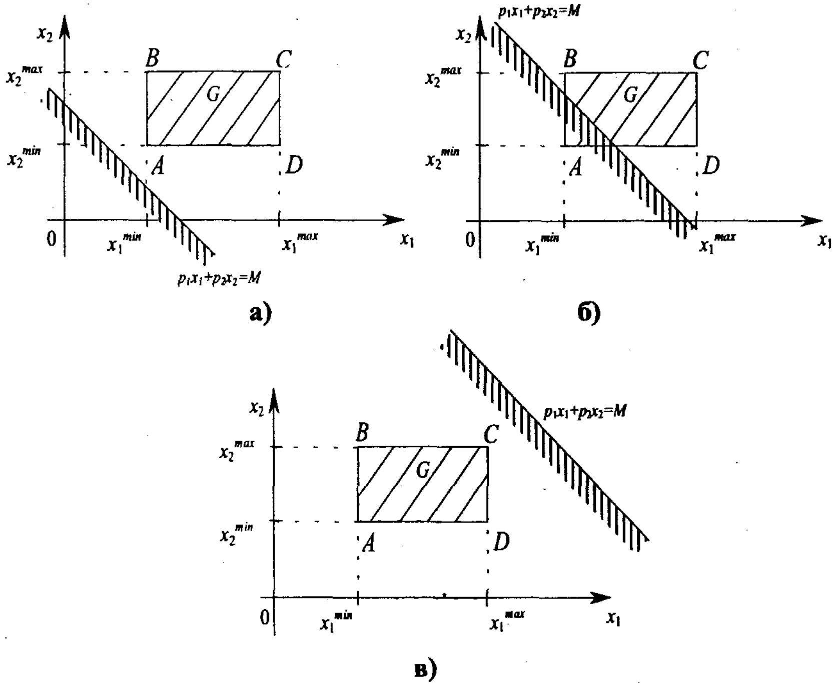


Рис. 13.1

Таким образом, множество K доступных наборов благ является выпуклым ограниченным многогранным множеством, поскольку задается системной линейных неравенств:

$$x_j \ge x_j^{\min}, \ j \in J_1,$$

$$x_k \le x_k^{\max}, \ k \in J_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le M,$$

где J_1 и J_2 — некоторые подмножества множества $J = \{1,2,\ldots,n\}$.

2⁰. Функция полезности и ее свойства. Рассмотрим вопрос о выборе набора благ. Каждое благо должно удовлетворять ту или иную потребность. Способность удовлетворять ту или иную потребность называют *полезностью блага.*

Потребитель при рассмотрении двух наборов благ $x = \mathrm{col}(x_1;\ldots;x_n)$ и $y = \mathrm{col}(y_1;\ldots;y_n)$ выносит одно из суждений:

а) набор x предпочтительнее (полезнее), чем набор y;

б) набор y предпочтительнее, чем набор x;

в) наборы x и y равно предпочтительны (равнозначны, равноценны, одинаково полезны)

Запись $x > y$ означает, что набор x предпочтительнее набору y; запись $x \sim y$ – набор x также хорош, как и набор y; запись $x \ge y$ означает, что набор x не менее предпочтителен, чем набор y.

Введенное понятие отношения предпочтения позволяет сформулировать следующий *принцип выбора потребителя*: потребитель выбирает наиболее предпочтительный набор среди всех доступных ему наборов благ.

Вместо рассуждений на основе заданного отношения предпочтения $\ge$ используем функцию полезности для предпочтения одного набора благ другому.

Функция $u(x) = u(x_1,\ldots,x_n)$, определенная на R_+^n (или некотором $G \subset R_+^n$), называется *функцией полезности,* соответствующей отношению предпочтения $\ge$, если $u(x) \ge u(y)$, тогда и только тогда, когда $x \ge y$, причем если $u(x) = u(y)$, то $x \sim y$ и обратно, если $x \sim y$, то $u(x) = u(y)$.

Исторически функция полезности была введена еще в XIX в. Джевонсом, Менгером и Вальрасом, которые одновременно и независимо друг от друга разрабатывали теорию предельной полезности, в то время как отношение предпочтения появилось лишь в XX в.

Функция полезности $u(x)$, по существу, представляет систему предпочтений потребителя. Основное ее свойство в том, что потребитель предпочитает выбирать x,а не y, если $u(x) > u(y)$, т.е. она упорядочивает наборы по предпочтению их друг другу. Отсюда следует, что потребитель при выборе набора благ стремится максимизировать свою функцию полезности.

В таблице 1 приведены четыре типа функций полезности.

Таблица 1

Тип функции полезности	Функция полезности	Ограничения
Логарифмическая	$u(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \ln x_j$	$\alpha_j > 0,\ x_j > 0,\ j = \overline{1,n}$
Мультипликативная	$u(x) = a\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$	$0 < \alpha_j < 1,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},$ $a > 0$
Аддитивная	$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j x_j^{\beta_j}$	$\alpha_j > 0,\ 0 < \beta_j < 1,\ x_j \ge 0,$ $j = \overline{1,n}$
Квадратичная	$u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$	$\alpha_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_j > 0,\ j = \overline{1,n},$ $B = (b_{ij}) < 0$ (отриц. опред. матрица)

Рассмотрим некоторые общие свойства функции полезности.

1) Предполагают, что функция полезности дважды дифференцируема и строго вогнута.

2) Свойство ненасыщаемости состоит в том, что для любых заданных двух наборов $x,\ y \in R_+^n$ соотношение $x \ge y$ влечет $u(x) \ge u(y)$, а соотношения $x \ge y$ и $x \ne y$ влекут $u(x) > u(y)$. Значит, функция полезности является возрастающей по любому ее аргументу, а тогда $\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} > 0\ \ \forall j = \overline{1,n},\ \ x \in R_+^n$. Кроме того, часто предполагают, что

$$\lim_{x_j \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \infty \text{ и } \lim_{x_j \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n}.$$

Ряд свойств функции полезности удобно интерпретировать по ее поверхностям уровня.

В ортанте R_+^n уравнению $u(x) = c$ соответствует определенная поверхность равноценных (одинаковой полезности) наборов благ (множество безразличия), и наоборот, каждому множеству безразличия соответствует некоторая поверхность с уравнением $u(x) = c$. Эти поверхности называют *поверхностями безразличия*. В случае двух благ, т.е. в R_+^2 их называют *кривыми безразличия*.

Замечание 1. Отметим, что хотя функция полезности определяется неоднозначно (с точностью до возрастающей функции), само семейство поверхностей (линий) безразличия однозначно, т.е. не зависит от выбора монотонно возрастающей функции, которая эти поверхности лишь перемещает между собой, сохраняя все семейство.

Для данной функции полезности кривые (поверхности) безразличия обладают следующими свойствами:

1) через каждую точку множества товаров проходит лишь одна кривая (поверхность) безразличия;

2) линии (поверхности) безразличия не пересекаются, причем кривая, лежащая выше и правее другой кривой, представляет собой более предпочтительные наборы товаров;

3) линии (поверхности) безразличия обращены выпуклостью к началу координат (вытекает из строгой вогнутости функции полезности);

4) множество наборов x, для которых $u(x) \geq c$ (предпочтительное множество) является выпуклым множеством.

3^0. Предельная полезность и предельная норма замещения благ. В теории потребительского выбора большую роль играют предельные полезности благ, которые выражают дополнительное удовлетворение от потребления одной дополнительной единицы блага. Математически этот факт описывается частными производными функции полезности. Установим содержательный смысл частных производных функции полезности. Пусть количество j-го блага изменилось на величину Δx_j, а количества остальных благ не изменилось. Это вызывает частное приращение функции полезности $\Delta u_j = u(x_1, x_2, \ldots, x_j + \Delta x_j, \ldots, x_n) - u(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, причем $\Delta x_j > 0$.

Величина $\frac{\Delta u_j}{\Delta x_j} > 0$ указывает на изменение полезности на дополнительную единицу j-го блага. Переходя к пределу при $\Delta x_j \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta u_j}{\Delta x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} \geq 0$. Частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ называется *предельной полезностью j-го блага.*

Например, для функций полезности

1. $u(x_1, x_2) = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2$ при $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ предельной полезностью первого блага будет $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\alpha_1}{x_1}$, а второго – $\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\alpha_2}{x_2}$.

2. $u(x_1, x_2) = a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ при $a > 0$, $0 < \alpha_1 < 1$ и $0 < \alpha_2 < 1$ будем иметь $\frac{\partial u}{\partial x_1} = a\alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}$ – для первого блага, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = a\alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}$ – для второго блага.

Обратимся теперь к вопросу о взаимозаменяемости благ. Пусть объемы потребляемых благ изменились соответственно на малые величины $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Тогда полным приращением полезности является величина $\Delta u \cong \mathrm{d}u$, где $\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$ – полный дифференциал функции полезности. Если допустить, что уровень полезности не изменяется, т.е. изменение набора благ произошло так, что сохраняется одна и та же поверхность безразличия $u(x_1, \ldots x_n) = c$, то $\mathrm{d}u = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j = 0$. Предположим, что количество всех благ, кроме k и l, которые взаимозаменяемы, не изменяются. Тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k + \frac{\partial u}{\partial x_l}\mathrm{d}x_l = 0 .$$

Отсюда имеем:

$$n_{kl} = \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}x_l} = \frac{\Delta x_k}{\Delta x_l} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_l}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_k}} .$$

Величина $n_{kl} = \dfrac{\Delta x_k}{\Delta x_l}$ называется *коэффициентом (нормой) предельной эквивалентной замены благ*, который обратно пропорционален отношению предельных полезностей этих благ, взятому с обратным знаком. Поскольку $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} > 0$, $j = \overline{1,n}$, то $n_{kl} < 0$, т.е. увеличение потребления одного блага вызывает уменьшение другого для сохранения одного и того же уровня полезности.

Например, для функции полезности

1. $u(x_1, x_2) = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2$ имеем

$$n_{21} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{\dfrac{\alpha_1}{x_1}}{\dfrac{\alpha_1}{x_1}} = -\frac{\alpha_1 x_2}{\alpha_2 x_1} .$$

2. $u(x_1, x_2) = a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ получаем

$$n_{21} = -\frac{\alpha_1 x_2}{\alpha_2 x_1} .$$

Изучение изменения нормы предельной заменяемости одних благ другими играет важную роль для изучения закономерностей потребления: если потребность в определенном благе удовлетворяется незначительно, то относительная полезность этого блага по отношению к другим для сохранения одного и того же уровня полезности высока.

Рассмотрим теперь смысл вторых частных производных функции полезности. Вторые частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ характеризуют изменение предельной полезности $\frac{\partial u}{\partial x_j}$. Например, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ характеризуют изменение предельной полезности $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ блага j при изменении потребления этого же блага. Предполагаем, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} < 0$, т.е. предельная полезность любого блага уменьшается по мере того, как его потребление увеличивается. Это предположение называют еще *законом Госсена* – законом убывания предельной полезности. Таким образом, предполагаем, что функция полезности дважды дифференцируема, имеет непрерывные частные производные, а матрица H, образованная из вторых частных производных, т.е. матрица Гессе является отрицательно определенной (ее главные миноры нечетного порядка отрицательны, а четного – положительны для любого набора $x = \mathrm{col}(x_1; \ldots; x_n) > 0$). Это требование относительно функции полезности и означает, что функция полезности строго вогнута.

В частности, для функций полезности

1. $u(x_1, x_2) = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2$ при $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -\frac{\alpha_1}{x_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{\alpha_2}{x_2^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = 0,$$

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_2}{x_2^2} \end{pmatrix}; \quad \det H = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x_1^2 x_2^2} > 0.$$

2. $u(x_1, x_2) = a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ при $a > 0$, $0 < \alpha_1 < 1$ и $0 < \alpha_2 < 1$ имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = a\alpha_1(\alpha_1 - 1)x_1^{\alpha_1 - 2}x_2^{\alpha_2} < 0\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = a\alpha_2(\alpha_2 - 1)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2 - 2} < 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = a\alpha_1\alpha_2 x_1^{\alpha_1 - 1}x_2^{\alpha_2 - 1} > 0\,,$$

$$H = \begin{pmatrix} a\alpha_1(\alpha_1 - 1)x_1^{\alpha_1 - 2}x_2^{\alpha_2} & a\alpha_1\alpha_2 x_1^{\alpha_1 - 1}x_2^{\alpha_2 - 1} \\ a\alpha_1\alpha_2 x_1^{\alpha_1 - 1}x_2^{\alpha_2 - 1} & a\alpha_2(\alpha_2 - 1)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2 - 2} \end{pmatrix},$$

$$\det H = a^2\alpha_1\alpha_2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)}x_2^{2(\alpha_2 - 1)}(1 - \alpha_1 - \alpha_2).$$

Здесь, если $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, то $\det H > 0$.

✍ Задания для самостоятельной работы

1. Для следующих функций полезности найти предельные полезности:

а) $u(x_1, x_2) = a_1 x_1^{\beta_1} + a_2 x_2^{\beta_2}, a_1 > 0, a_2 > 0, 0 < \beta_1 < 1;$

б) $u(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \frac{b_{11}}{2} x_1^2 + \frac{b_{12} + b_{21}}{2} x_1 x_2 + \frac{b_{22}}{2} x_2^2$.

2. Для функций полезности задания 1 найти коэффициент предельной эквивалентной замены благ n_{21}.

3. Для функций полезности задания 1 найти матрицу Гессе H и исследовать ее на отрицательную определенность.

■ Лекция 14

Задача оптимального выбора благ потребителем

С помощью условий Куна-Таккера дано решение задачи оптимального выбора благ потребителем и проведен ее анализ

1° Математическая модель задачи оптимального выбора благ потребителем. В Л. 13 установлено, что предпочтение потребителя в множестве наборов благ выражается целевой функцией $u(x)$. Поэтому математическая модель выбора благ потребителем имеет следующий вид задачи математического программирования (задачи I):

$$u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max \tag{1}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le M, \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Отметим, что указанный принцип оптимального выбора благ потребителем лишь отражает общую тенденцию многочисленных актов потребительского спроса и его не следует понимать упрощенно, а именно: каждый потребитель перед тем, как приобрести какие-либо товары, решает сформулированную задачу I. Задача I является лишь простейшей моделью, так как здесь допускается, что выбор благ потребителем ограничен только величиной дохода. На самом деле на выбор благ могут оказывать влияние и другие факторы, например недостаточное предложение (дефицитность) некоторых благ. Так, например, если предложение k–го блага ограничено числом $x_k^{\max}$, то нужно ввести ограничение $x_k \le x_k^{\max}$.

Таким образом, более сложные модели содержат ряд дополнительных ограничений. Изучим лишь задачу I.

Для $n = 2$ получаем задачу II:

$$u(x_1, x_2) \to \max$$

при условиях

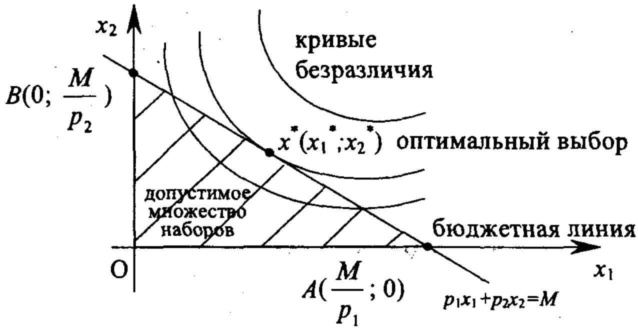


Рис. 14.1

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le M;\ \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 .$$

Геометрическая интерпретация данной модели дана на рис. 14.1.

На рис.14.1 прямая AB соответствует бюджетному ограничению, треугольник AOB – области доступных наборов, а точка $x^*\left(x_1^*, x_2^*\right)$ касания кривой безразличия со стороной AB треугольника OAB определяет оптимальный набор благ задачи II.

Задача I является частным случаем задачи математического программирования и состоит в максимизации строго вогнутой функции при линейном ограничении. Решение такой задачи существует, и оно единственно. Это оптимальное решение называют *точкой равновесия задачи оптимального выбора благ потребителем.*

Из лекции 12 следует, что необходимым и достаточным условием для решения задачи I являются условия Куна-Таккера для функции Лагранжа

$$L(x,\lambda) = u(x) + \lambda(M - p'x) = u(x_1,\ldots,x_n) + \lambda\left(M - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right),$$

которые в данном случае имеют следующий вид:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} - \lambda p_j \le 0,\ \ j = \overline{1,n},\ \ x_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = x_j\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \lambda p_j\right) = 0\,; \qquad \textbf{(4)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \ge 0;\ \ \lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda\left(M - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) = 0\,.$$

В (4) частные производные и переменные $x_1, \ldots, x_n$, λ вычислены в оптимальной точке $\mathrm{col}\left(x_1^*; \ldots; x_n^*; \lambda^*\right)$, где $x^* = \mathrm{col}\left(x_1^*; \ldots; x_n^*\right)$ – решение задачи I.

Из условий (4) следует, что если $x_j^* > 0$, то $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} - \lambda^* p_j = 0$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda^* p_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Значит, предельные полезности пропорциональны ценам соответствующих благ.

Геометрически свойство (5) означает, что в точке оптимума нормальный вектор $p = \mathrm{col}\left(p_1; p_2; \ldots; p_n\right)$ бюджетной гиперплоскости (прямой AB на рис.14.1) и вектор-градиент функции полезности $\mathrm{grad}\,u(x) = \mathrm{col}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}; \ldots; \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ коллинеарны, т.е. $\mathrm{grad}\,u(x) = \lambda^* p$. Из (5) следует, что $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x_j}}{p_j} = \lambda^* > 0$, так как предполагается, что $p_j > 0$, $j = \overline{1,n}$.

Таким образом, оптимальный множитель Лагранжа λ^* должен быть положительным, а тогда из условия Куна-Таккера $\lambda\left(M - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j\right) = 0$ следует, что весь доход используется на приобретение оптимального набора благ, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = M. \tag{6}$$

В частности, оптимальное решение при $n = 2$ расположено на бюджетной прямой.

Таким образом, вместо задачи I можно рассматривать задачу III с условием равенства:

$$u\left(x_1, \ldots, x_n\right) \to \max$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = M; \ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}.$$

Для решения задачи III применим правило множителей Лагранжа, сформулированное в Л. 12. Составляем функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = u(x_1, \dots, x_n) + \lambda\left(M - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right),$$

для которой

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n} \text{ и } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,$$

т.е. выполняются условия $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda p_j \ \left(j = \overline{1,n}\right)$ и $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = M$, что совпадает с (5) и (6). Решение системы из (n + 1) уравнений определяет оптимальный набор благ $x^* = \text{col}\left(x_1^*, \dots, x_n^*\right)$ и λ^*. Полученное оптимальное решение задачи I зависит от вектора цен и дохода M, т.е. в общем случае может быть записано в виде $x_j^* = x_j^*(p, M)$, $j = \overline{1,n}$ и $\lambda^* = \lambda^*(p, M)$, как функций переменных $p_1, p_2, \dots, p_n$ и M.

Из приведенных результатов вытекают следующие *следствия*, имеющие место при оптимальном выборе благ потребителем.

1. Предельные полезности благ пропорциональны их ценам:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} = \lambda^* p_j, \ j = \overline{1,n}.$$

2. Отношение предельных полезностей двух благ равно отношению их цен:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} : \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} = p_j : p_k; \ j,k = \overline{1,n}, \ j \neq k.$$

3. Предельная полезность, приходящаяся на денежную единицу, одинакова для всех приобретаемых благ:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} : p_j = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} : p_k; \ j,k = \overline{1,n}, \ j \neq k.$$

4. Равные предельные полезности, приходящиеся на денежную еди-

ницу, равны множителю λ^* – предельной полезности денежной единицы, которую потребитель расходует для приобретения благ:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} : p_j = \lambda^*, \quad j = \overline{1,n}.$$

5. Норма замещения:

$$n_{kl} = \frac{\Delta x_k}{\Delta x_l} = -\frac{p_l}{p_k}; \quad k,l = \overline{1,n}, \quad k \neq l.$$

6. В оптимальной точке имеет равенство:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial M} = \lambda^*.$$

Действительно, из равенства $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = M$ следует равенство $\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial M} = 1$. Используя правило дифференцирования сложной функции и следствие 1, получаем

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial M} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dM} = \sum_{j=1}^{n} \lambda^* p_j \frac{\partial x_j}{\partial M} = \lambda^* \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial M} = \lambda^*.$$

Таким образом, величина λ^* множителя Лагранжа означает дополнительную полезность, приходящуюся на дополнительную единицу дохода, т.е. предельную полезность денежной единицы дохода потребителя.

2°. Взаимная задача к задаче оптимального выбора благ потребителем. Решение задачи об оптимальном выборе благ найдено в виде

$$x_j^* = x_j^*(p, M), \quad j = \overline{1,n}.$$

Если подставить эти значения в функцию полезности, то получим

$$u^* = u^*(p, M),$$

т.е. максимальная полезность зависит в конечном счете от цен на блага и дохода потребителя.

Рассмотрим теперь так называемую взаимную задачу. Зафиксируем значение функции полезности на уровне u_0 и рассмотрим те блага x, для которых $u(x)=u_0$, т.е. те блага, которые дают потребителю один и тот же уровень удовлетворения u_0. Очевидно, что при заданном векторе цен на блага $p=\text{col}(p_1;\ldots;p_n)$ стоимости $M=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$ таких благ различны. Поставим так называемую *взаимную задачу*: какой набор благ, обеспечивающий данный уровень удовлетворения потребностей, самый дешевый. Математически такая взаимная задача IV формулируется так: найти минимум функции

$$M=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

при условии

$$u(x_1,\ldots,x_n)=u_0;\ \ x_j\geq 0,\ \ j=\overline{1,n}.$$

Геометрически для $n=2$ задачу IV можно сформулировать следующим образом: для данной кривой безразличия с уравнением $u(x_1,x_2)=u_0$ среди параллельных бюджетных линий найти ту, которая ее касается. Точка касания и будет оптимальным решением (рис. 14.2).

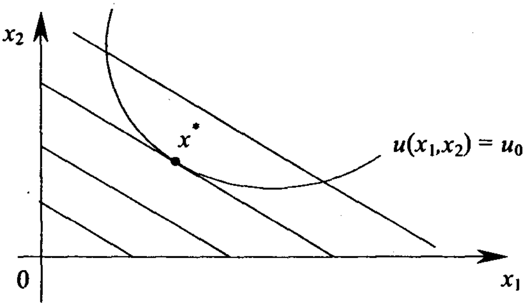


Рис. 14.2

Задачу IV решим методом множителей Лагранжа, изложенным в Л.12. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1,\ldots,x_n,\mu)=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j+\mu\big(u_0-u(x_1,\ldots,x_n)\big).$$

Система уравнений, определяющая экстремум, следующая:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = p_j - \mu \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,\ \ j = \overline{1,n}\,;\ \ \frac{\partial L}{\partial \mu} = u_0 - u(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{1}{\mu} p_j,\ \ j = \overline{1,n};\ \ u(x_1, \ldots, x_n) = u_0 . \qquad (7)$$

Решая полученную систему (7), найдем оптимальный набор благ $x^* = \mathrm{col}(x_1^*; \ldots; x_n^*)$, где

$$x_j^* = x_j^*(p, u_0),\ \ j = \overline{1,n},$$

и множитель μ^*. Минимальные затраты $M^* = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^*$ будут зависеть от величины u_0 при заданном векторе цен p. Меняя уровень потребления u_0 получим функцию $C(u_0) = M^*$, которая называется ***функцией затрат потребителя***. Выясним смысл множителя Лагранжа μ^*. Для этого рассмотрим полный дифференциал функции затрат

$$\mathrm{d}M = \sum_{j=1}^{n} p_j \,\mathrm{d}x_j .$$

Так как в точке минимума $x^* = \mathrm{col}(x_1^*; \ldots; x_n^*)$ справедливы равенства $p_j = \mu^* \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = \overline{1,n}$, то получаем

$$\mathrm{d}M = \sum_{j=1}^{n} \mu^* \frac{\partial u}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j = \mu^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j = \mu^* \,\mathrm{d}u .$$

Таким образом, в оптимальной точке $\mu^* = \frac{\mathrm{d}M^*}{\mathrm{d}u}$, т.е. множитель Лагранжа μ^* указывает, какие дополнительные затраты необходимо сделать, чтобы уровень удовлетворения (полезность) увеличить на единицу.

Ранее было показано, что $\lambda^* = \dfrac{\partial u(x^*)}{\partial M}$, т.е. множитель λ^* указывает, какую дополнительную полезность мы получим на дополнительную единицу расходуемого дохода. Значит, по смыслу множители μ^* и λ^* взаимообратные. Установим как связаны оптимальные решения взаимной задачи и задачи оптимального выбора благ потребителем. Пусть u_0 равно максимальному значению функции полезности u^*, полученному при решении задачи оптимального выбора благ потребителем. Тогда взаимная задача IV примет следующий вид:
найти

$$\min\left(M = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right)$$

при ограничениях

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u^*; \quad x_j \geq 0, j = \overline{1,n}.$$

Ее решение задает минимальный уровень затрат $M = M^*$, обеспечивающий максимальную полезность. Из геометрических соображений следует, что в этом случае оптимальные решения взаимной и исходной задач совпадут. Для $n = 2$ имеем одну и ту же точку касания бюджетной прямой и кривой безразличия, только во взаимной задаче задается кривая безразличия с максимальным уровнем удовлетворения потребностей и нужно найти к ней бюджетную прямую среди всевозможных параллельных между собой бюджетных прямых, а в задаче оптимального выбора благ потребителем задается бюджетная прямая уравнением $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$ и нужно среди всевозможных кривых безразличия найти ту, которая касается данной бюджетной прямой.

В этом случае, как легко видеть, $\mu^* = \dfrac{1}{\lambda^*}$, а также $M^* = M$, где M – заданный доход потребителя в задаче оптимального выбора благ потребителем (рис.14.3).

▷ ***Пример 1.*** Для мультипликативной функции полезности потребителя

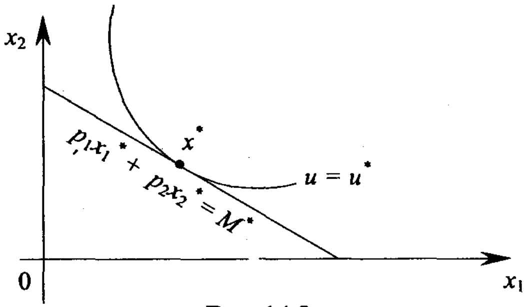


Рис. 14.3

$$u(x_1, x_2) = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \text{ при } 0 < \alpha_1 < 1,\ 0 < \alpha_2 < 1,\ \alpha > 0$$

найти решение:

а) задачи оптимального выбора благ потребителем;

б) взаимной задачи.

Решение.

а) Задача оптимального выбора благ потребителем имеет вид

$$u(x_1, x_2) = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \to \max$$

при ограничениях

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Система уравнений (5)-(6) имеет вид

$$\begin{aligned} &a\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2} = \lambda p_1,\ a\alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1} = \lambda p_2, \\ &p_1x_1 + p_2x_2 = M. \end{aligned} \tag{8}$$

Решая систему (8), получим

$$x_1^* = \frac{\alpha_1 M}{(\alpha_1+\alpha_2)p_1},\ x_2^* = \frac{\alpha_2 M}{(\alpha_1+\alpha_2)p_2},$$

$$\lambda^* = \alpha(\alpha_1+\alpha_2)^{1-\alpha_1-\alpha_2}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\alpha_2} M^{\alpha_1+\alpha_2-1}.$$

Тогда

$$u^* = a\left(\frac{\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2)p_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)p_2}\right)^{\alpha_2} M^{\alpha_1+\alpha_2},$$

$$\text{а } \lambda^* = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{M} u^* .$$

б) Взаимная задача следующая: найти

$$\min\left(M = p_1 x_1 + p_2 x_2\right)$$

при условиях

$$a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = u_0 ,$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0 .$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu\left(u_0 - a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\right).$$

Выпишем условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \mu \alpha_1 a x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} = 0 ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \mu \alpha_2 a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} = 0 , \;\; \frac{\partial L}{\partial \mu} = u_0 - a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = 0 . \qquad \textbf{(9)}$$

Решая систему (9), получаем

$$\mu^* = \frac{M^*}{(\alpha_1 + \alpha_2) u_0} = \left(\frac{u_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} u_0^{-1} ,$$

$$x_1^* = \left(\frac{u_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}\right)^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} , \;\; x_2^* = \left(\frac{u_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}\right)^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} .$$

Минимальные затраты

$$M^* = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = \left(\frac{u_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(p_1 \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}\right)^{\alpha_2} + p_2 \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}\right)^{\alpha_1} \right).$$

При $u_0 = u^* = a\left(\frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_2}\right)^{\alpha_2} M^{\alpha_1 + \alpha_2}$

получаем, что

$$x_1^* = \left(\frac{u_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} = \frac{\alpha_1 M}{(\alpha_1+\alpha_2)p_1},$$

$$x_2^* = \left(\frac{u_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \frac{\alpha_2 M}{(\alpha_1+\alpha_2)p_2}.$$

Отсюда при $u_0 = u^*$ имеем

$$M^* = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = p_1 \frac{\alpha_1 M}{(\alpha_1+\alpha_2)p_1} + p_2 \frac{\alpha_2 M}{(\alpha_1+\alpha_2)p_2} = M.$$

Так как $\mu^* = \frac{M^*}{(\alpha_1+\alpha_2)u_0}$, то при $u_0 = u^*$ получаем, что $\lambda^* = \frac{1}{\mu^*} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2)u^*}{M^*}$, т.е. значения множителей Лагранжа для рассматриваемых задач при $u_0 = u^*$ взаимообратны. □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Найти решения задач оптимального выбора благ потребителем для каждого типа функции полезности $u(x)$ из таблицы 1 Л.13 при $n = 2$.

2. Для функции полезности потребителя

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} k_j \ln(x_j - a_j),$$

где $x_j > a_j$, $k_j > 0$, $\sum_{j=1}^{n} k_j = 1$, a_j – минимальное количество j-го блага, которое должен приобрести потребитель, требуется решить задачу оптимального выбора благ потребителем и взаимную задачу.

■ Лекция 15

Производственная функция

В современной экономической теории утвердился подход, согласно которому производитель стремится принять такие решения о затратах и выпуске продукции, которые обеспечивали бы ему получение максимальной прибыли.

Производство благ (продукции) осуществляется посредством использования определенных факторов производства в соответствии с заданной технологией. Производитель может использовать для производства несколько факторов (ресурсов) и выпускать несколько видов продукции. Пусть x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ – количество j-го фактора производства, используемого производителем; тогда объемы затрат всех факторов производства можно представить как вектор $x=\operatorname{col}\left(x_1;\ldots;x_n\right)$, называемый *вектором затрат производства* или *производственных ресурсов*. Множество всевозможных векторов затрат производителя есть

$$R_+^n=\left\{x=\operatorname{col}\left(x_1;\ldots;x_n\right) \mid x_j\geq 0, j=\overline{1,n}\right\}.$$

При $n=2$ множество R_+^2 представляет собой множество векторов первой четверти плоскости Ox_1x_2.

Замечание 1. Множество затрат может представлять собой и некоторое замкнутое или открытое множество $G\in R_+^n$. Такие случаи мы рассматривать не будем.

1°. Понятие производственной функции и ее основные свойства. Каждому вектору затрат $x=\operatorname{col}\left(x_1;\ldots;x_n\right)$ соответствует определенный выпуск продукции y (максимальный из всех возможных для данного вектора затрат x), который может быть произведен при использовании этих факторов, т.е. технологическая связь между выпуском продукции и затратами задается функцией $y=f(x)=f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, зависящей от n переменных, которую и называют *производственной функцией*. Например, если x_1 – капитал, x_2 – количество труда, то можно записать производственную функцию $y = f(x_1, x_2)$, которая отображает вектор затрат $x = \mathrm{col}(x_1; x_2)$ этих факторов производства в единственное положительное число y, указывающее максимальный выпуск продукции, который можно получить при использовании этого вектора затрат.

Считаем, что производственная функция дифференцируема и обладает следующими свойствами:

1. Если $x^1 \geq x^2$, то $f(x^1) \geq f(x^2)$.

Это означает, что увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска продукции. Множество таких векторов затрат выделяет в пространстве R_+^n некоторую область, называемую *экономической областью*. Такая область характеризуется тем, что $\frac{\partial f}{\partial x_j} \geq 0$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ для любого вектора затрат из этой области. Граница этой области задается уравнением $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$. Последнее означает, что существует точка насыщения, где $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$, т.е. увеличение фактора производства не ведет к увеличению выпуска продукции.

2. Если отсутствует хотя бы один необходимый фактор производства, т.е. $x_j = 0$, то выпуск продукции невозможен:

$$f(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots x_n) = 0 .$$

Так, например, при отсутствии основных фондов выпуск продукции равен нулю.

3. Функция $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ предполагается строго вогнутой, т.е. ее матрица Гессе H является отрицательно определенной.

Отметим, что свойства 1-3 производственной функции совпадают с соответствующими свойствами функции полезности потребителя, но имеют разный экономический смысл. Применяемые в экономике конкретные производственные функции не всегда обладают всеми указанными свойствами.

Дадим геометрическое толкование производственной функции. Для

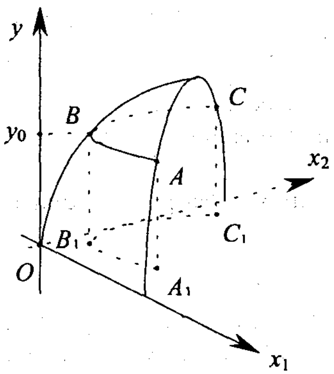


Рис. 15.1

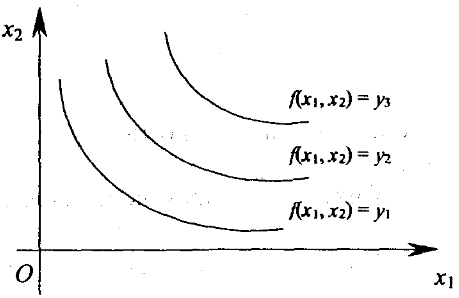


Рис. 15.2

этого возьмем функцию $y = f(x_1, x_2)$ от двух факторов ($n = 2$) и построим поверхность $y = f(x_1, x_2)$ (рис. 15.1).

Зафиксируем выпуск $y = y_0 = C$. Проведем через точку $(0;0;y_0)$ плоскость, параллельную плоскости Ox_1x_2, которая пересечет эту поверхность по кривой *ABC*. Спроектируем эту кривую на плоскость Ox_1x_2 и получим кривую $A_1B_1C_1$. Последняя кривая называется *изоквантой* (кривой постоянного выпуска) производственной функции, которая имеет уравнение $f(x_1, x_2) = y_0 = C$. Таким образом, *изокванта* – геометрическое место точек из R_+^2, которым соответствует один и тот же уровень выпуска продукции $y = C$ (рис. 15.2).

Свойства изоквант производственной функции аналогичны свойствам кривых безразличия для функции полезности:

а) изокванта, лежащая выше и правее другой, соответствует большему количеству произведенной продукции;

б) изокванты не пересекаются;

в) в экономической области изокванты имеют отрицательный наклон, т.е. они обращены выпуклостью к началу координат.

Изокванту называют еще *кривой взаимозаменяемости ресурсов*. Для случая произвольного *n* вводится поверхность постоянного выпуска с уравнением $f(x_1, x_2, \dots x_n) = C$.

2°. Производительность факторов производства. В микроэкономике с помощью понятия производительности анализируется эффективность использования факторов производства. Различают три вида производительности фактора: полная производительность, средняя производительность, предельная производительность.

Если $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – производственная функция, зависящая от n факторов, то *полная производительность* j-го фактора производства имеет вид

$$y_j = f_j(x_j) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0),$$

где $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0$ – фиксированные значения всех факторов производства, кроме фактора j.

Так как функция $y = f(x)$ – вогнутая, то функция $y_j = f_j(x_j)$ также будет вогнутой.

Средняя производительность j-го фактора π_j определяется по формуле:

$$\pi_j = \frac{y}{x_j} = \frac{f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{x_j},$$

т.е. характеризует объем выпускаемой продукции на единицу используемого объема j-го фактора.

Например, если j-й фактор – труд, то получаем производительность труда, если же j-й фактор производства представляет собой основные фонды, то π_j означает фондоотдачу.

Показатель

$$r_j = \frac{x_j}{y} = \frac{x_j}{f(x_1, \ldots, x_n)}$$

характеризует ресурсоемкость по j-му фактору производства.

В частности, получаем следуюіщие известные показатели: трудоемкость, фондоемкость, материалоемкость, энергоемкость, если в качестве ресурса соответственно выступают труд, фонды, материалы, энергия.

Очевидны соотношения $r_j = \frac{1}{\pi_j}$ и $\pi_j = \frac{1}{r_j}$.

Определим математически предельную производительность фактора производства. Считаем объемы всех факторов производства, кроме j-го, неизменными. Пусть j-фактор производства изменился на величину Δx_j, что вызывает изменение продукции

$$\Delta y = f(x_1, x_2, \ldots, x_j + \Delta x_j, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2,, x_n).$$

Величину $w_j = \dfrac{\Delta y}{\Delta x_j}$, которая задает количество дополнительной продукции на дополнительную единицу фактора производства, называют в случае дискретного (табличного) задания производственной функции, *предельной производительностью j-го фактора производства.* В непрерывном случае предельную производительность определяют как частную производную этой функции по переменной x_j:

$$w_j = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_j} = \frac{\partial y}{\partial x_j}.$$

Предельная производительность фактора производства выражает вклад единицы этого фактора в прирост продукции.

3°. Коэффициенты эластичности и предельные нормы замещения факторов производства. *Частным коэффициентом эластичности* ε_j производственной функции по j-му ресурсу называют отношение предельной производительности j-го ресурса w_j к его средной производительности π_j, т.е.

$$\varepsilon_j = w_j : \pi_j = \frac{\partial y}{\partial x_j} : \frac{y}{x_j} \text{ или } \varepsilon_j = w_j r_j = \frac{\partial y}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{y}.$$

Например, если $\varepsilon_j > 1$, то $w_j > \pi_j$, что означает, что увеличение объема использования j-го фактора производства приводит к большему темпу роста выпуска продукции, чем самого фактора производства.

Суммарная эластичность ε определяется как сумма частных коэффициентов эластичности:

$$\varepsilon(x) = \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_j.$$

Введем теперь *предельную норму* замещения ресурсов. Для функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ норма замещения n_{kj} двух ресурсов k и j задается так:

$$n_{kj} = \frac{\Delta x_k}{\Delta x_j} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}},$$

т.е. предельная норма замещения ресурсов равна обратному отношению предельных производительностей этих ресурсов, взятому со знаком минус.

Предельная норма n_{kj} замещения ресурсов показывает, сколько ресурсов вида k может быть высвобождено при увеличении затрат j-го ресурса на единицу, если оставить выпуск продукции на прежнем уровне. Для количественной характеристики скорости изменения предельной нормы замещения n_{kj} при движении вдоль изокванты используется величина σ_{kj}, называемая *эластичностью замещения ресурсов*. Она показывает, на сколько процентов должно изменяться отношение количества k-го ресурса к количеству j-го ресурса при движении вдоль поверхности постоянного выпуска, чтобы предельная норма замещения n_{kj} изменилась на один процент. Величина σ_{kj} вычисляется так:

$$\sigma_{kj} = \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x_k}{x_j}\right)}{\dfrac{x_k}{x_j}} : \frac{\mathrm{d}n_{kj}}{n_{kj}} = \frac{\mathrm{d}\ln\left(\dfrac{x_k}{x_j}\right)}{\mathrm{d}\ln\left(-n_{kj}\right)}.$$

Например, для функции $y = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ получаем

$$n_{21} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial y}{\partial x_2}} = -\frac{A\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{A\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}} = -\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}.$$

Тогда

$$\sigma_{21}=\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}}:\frac{d\left(-\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}\right)}{-\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}}=\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}}:\frac{\frac{\alpha}{\beta}d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}}=1.$$

4⁰. Типовые производственные функции. Рассмотрим некоторые производственные функции, которые часто используются при анализе поведения производителя. Для каждой такой функции определим следующие *основные параметры и характеристики*:

1) полная производительность факторов производства;

2) средняя производительность факторов производства и ресурсоемкость продукции;

3) предельная производительность фактора производства;

4) предельная норма замещения фактора производства;

5) частный коэффициент эластичности производственной функции;

6) суммарная эластичность по масштабу производства;

7) эластичность замещения факторов производства;

8) изокванты производственной функции.

а) *Линейная производственная функция* имеет вид

$$y=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n,$$

для которой $a_1>0,\ a_2>0,\ \ldots,\ a_n>0$, т.е. предполагается линейная зависимость выпуска продукции от затрат факторов производства.

б) *Производственная функция с постоянными параметрами.* Такая функция задается соотношением

$$y=\min\left\{\frac{x_1}{a_1},\frac{x_2}{a_2},\ldots,\frac{x_n}{a_n}\right\},$$

где $a_1>0,\ a_2>0,\ \ldots,\ a_n>0$.

Данную функцию можно записать как решение задачи линейного программирования с переменной y и с объемами ресурсов $x_1,\ldots,x_n$ вида

$$\max y$$

при ограничениях:

$$a_j y \le x_j,\ \ j=\overline{1,n};\ \ y \ge 0.$$

в) *Производственная функция типа Кобба-Дугласа.* Производственная функция типа Кобба-Дугласа имеет вид

$$y = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где $A>0,\ 0<\alpha_j<1,\ j=\overline{1,n}$.

г) *Производственная функция с постоянной эластичностью замены* (*CES*). Такая функция имеет вид

$$y = A\left(B_1 x_1^{-p} + \dots + B_n x_n^{-p}\right)^{-\frac{\gamma}{p}},$$

для которой $A>0,\ 0<B_j<1,\ j=\overline{1,n}$.

Замечание 2. Отметим, что при конкретных значениях параметров p и γ получаем частные случаи функции *CES*:

г$_1$) при $p=-1$ и $\gamma=1$ имеем линейную функцию

$$y = AB_1x_1 + AB_2x_2 + \dots + AB_nx_n;$$

г$_2$) при $p \to 0$, получаем функцию Кобба-Дугласа;

г$_3$) при $p \to \infty$ и $\gamma = 1$ получаем функцию с фиксированными пропорциями вида

$$y = A\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Определим для функции Кобба-Дугласа основные параметры и характеристики.

1) *Полная производительность j*-го фактора производства (рис.15.3)

$$y_j = A_j^0 x_j^{\alpha_j},$$

где $A_j^0 = A\left(x_1^0\right)^{\alpha_1}\left(x_2^0\right)^{\alpha_2}\dots\left(x_{j-1}^0\right)^{\alpha_{j-1}}\left(x_{j+1}^0\right)^{\alpha_{j+1}}\dots\left(x_n^0\right)^{\alpha_n}$.

2) *Средняя производительность j*-го фактора (рис. 15.3)

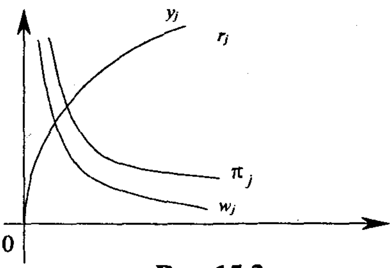


Рис. 15.3

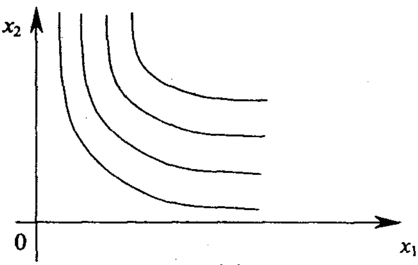


Рис. 15.4

$$\pi_j = \frac{y_j}{x_j} = \frac{A_j^0 x_j^{\alpha_j}}{x_j} = A_j^0 x_j^{\alpha_j - 1} = \frac{A_j^0}{x_j^{\beta}},$$

где $\beta = 1 - \alpha_j > 0$, а ресурсоемкость продукции по j-му фактору определяется формулой

$$r_j = \frac{x_j}{y_j} = \frac{x_j^{\beta}}{A_j^0}.$$

3) *Предельная производительность* j-го фактора производства

$$w_j = \frac{\partial y_j}{\partial x_j} = A_j^0 \alpha_j x_j^{\alpha_j - 1} = \alpha_j \pi_j.$$

4) *Предельная норма замещения двух факторов*

$$n_{ij} = -\frac{w_j}{w_i} = -\frac{\alpha_j \pi_j}{\alpha_i \pi_i} = -\frac{\alpha_j x_i}{\alpha_i x_j},$$

так как в одной и той же точке имеем $\pi_j x_j = y_j = y$ и $\pi_i x_i = y_i = y$.

5) *Частный коэффициент эластичности выпуска продукции* по j-му фактору

$$\varepsilon_j = \frac{\partial y}{\partial x_j} : \frac{y}{x_j} = w_j r_j = \alpha_j \pi_j r_j = \alpha_j.$$

6) *Суммарная эластичность выпуска продукции*

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = k .$$

7) *Эластичность замещения ресурсов* постоянна и равна

$$\sigma_{ij} = \frac{\mathrm{d}\ln\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)}{\mathrm{d}\ln\left(-n_{ij}\right)} = \frac{\mathrm{d}\ln\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)}{\mathrm{d}\left[\ln\left(\dfrac{\alpha_j}{\alpha_i}\right) + \ln\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)\right]} = \frac{\mathrm{d}\ln\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)}{\mathrm{d}\ln\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)} = 1 .$$

8) *Изокванты* функции Кобба-Дугласа для $n = 2$ изображены на рис. 15.4.

✍ Задание для самостоятельной работы

1. Определить для производственных функций а), б) и г) их основные параметры и характеристики.

■ Лекция 16

Задача оптимизации издержек производства и объема выпуска продукции

Рассмотрена задача минимизации издержек производства; введено понятие функции издержек; изучена задача максимизации объема выпуска продукции.

1° Математическая модель задачи минимизации издержек производства. Для нахождения оптимальных решений производителю не достаточно знания производственной функции, которая содержит лишь технологическую информацию, так как отсутствует информация о цене продукции и ценах на ресурсы. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – цены соответственно ресурсов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда издержки составят величину $Z = q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n$.

Задача минимизации издержек производства (задача I) следующая: для заданного объема выпуска продукции y_0 найти такое сочетание ресурсов, чтобы их стоимость (затраты) была минимальной.

Математически задача I формулируется так:
найти

$$\min(Z = q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n)$$

при условиях

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_0,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.$$

Для $n = 2$ решение задачи I изображено графически на рис. 16.1.

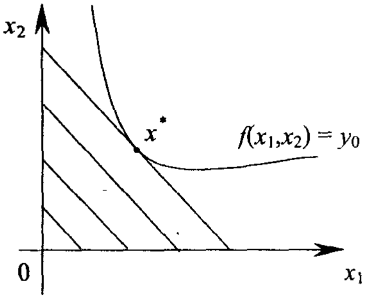


Рис. 16.1

Геометрически формулировка задачи I $(n=2)$ следующая: задана изокванта $f(x_1, x_2) = y_0$ и нужно среди линий "уровня", называемых *изокостами* (параллельных прямых) функции $Z = q_1 x_1 + q_2 x_2$, найти касательную к данной изокванте. Точка касания x^* и есть оптимальное решение.

Задачу I будем решать методом множителей Лагранжа. Для задачи I функция Лагранжа имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1) = q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_n x_n + \lambda_1 (y_0 - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Согласно Л.12 получаем систему уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = q_j - \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = y_0 - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{1}{\lambda_1} q_j, \quad j = \overline{1,n}; \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_0.$$

Таким образом, в точке минимума $\operatorname{col}(x^*; \lambda_1^*)$ будем иметь:

1) предельные производительности ресурсов пропорциональны их ценам (коэффициент пропорциональности равен $\frac{1}{\lambda_1^*}$), т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{1}{\lambda_1^*} q_j; \quad j = \overline{1,n};$$

2) отношение предельных производительностей ресурсов равно отношению их цен, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \frac{\partial f}{\partial x_k} = q_j : q_k; \quad j,k = \overline{1,n}, \quad j \neq k;$$

3) отношение предельных производительностей ресурсов к их ценам равны между собой, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : q_j = \frac{1}{\lambda_1^*}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Полученные соотношения составляют основу теории предельной производительности факторов производства как теории стоимости, а именно: *цены ресурсов пропорциональны предельным производительностям ресурсов, в частности для труда имеем, что он оценивается в соответствии со своей предельной производительностью.*

Дадим интерпретацию множителя Лагранжа. Имеем

$$dZ = q_1\, dx_1 + q_2\, dx_2 + \ldots + q_n\, dx_n.$$

В точке минимума $q_j = \lambda_1^* \frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = \overline{1,n}$, следовательно,

$$dZ = \lambda_1^* \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) = \lambda_1^*\, dy.$$

Отсюда

$$\lambda_1^* = \frac{dZ}{dy},$$

т.е. λ_1^* есть общие предельные издержки на единицу дополнительной продукции.

2⁰. Функция издержек. Дадим понятие функции издержек. Меняя y_0 в задаче I при заданных ценах на ресурсы, получим зависимость $x^* = x^*(y)$, т.е. зависимость объемов ресурсов от объема выпуска продукции. Такую вектор-функцию называют *функцией производственных затрат ресурсов*, а сами издержки

$$Z_{\min}(y) = q_1 x_1^*(y) + q_2 x_2^*(y) + \ldots + q_n x_n^*(y)$$

называют *функцией издержек*, которая обозначается $C(y) = Z_{\min}(y)$ (рис. 16.2).

Для функции $C(y)$ получаем равенство:

$$C(y) = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j^*(y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_1^* \frac{\partial f}{\partial x_j} x_j^*(y) = \lambda_1^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} x_j^*(y).$$

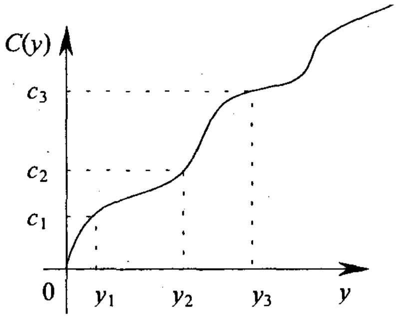


Рис. 16.2

Разделив это равенство на y, получим:

$$\frac{C(y)}{y} = \lambda_1^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{x_j}{y} = \lambda_1^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} : \frac{y}{x_j} = \lambda_1^* \varepsilon ,$$

где $\frac{C(y)}{y}$ – среднее издержки, а $\lambda_1^* = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y}$ – предельные издержки на единицу продукции, как было установлено выше. Следовательно, получаем:

$$\frac{C(y)}{y} = \varepsilon \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} ,$$

где $\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} : \frac{y}{x_j}$ – суммарный коэффициент эластичности, зависящий от y.

Например, для функции $y = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ имеем

$$\frac{C}{y} = (\alpha + \beta) \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} .$$

Рассмотрим некоторые типы функций затрат ресурсов и издержек.

1. Пусть задана линейная неоднородная функция затрат ресурсов

$$x_j = \alpha_j y + b_j, \ \ j = \overline{1,n}, \ \ \alpha_j > 0, \ \ b_j > 0, \ \ j = \overline{1,n} .$$

Тогда функция издержек имеет вид

$$C(y) = ay + b ,$$

где $a=\sum_{j=1}^{n} q_j \alpha_j$, $b=\sum_{j=1}^{n} q_j b_j$.

2. Если задана нелинейная функция затрат ресурсов $x_j=\varphi_j(y)$, $j=\overline{1,n}$, то

$$C(y)=\sum_{j=1}^{n} q_j \varphi_j(y).$$

▷ ***Пример 1.*** Пусть задана производственная функция $y=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ и цены ресурсов равны q_1 и q_2. Тогда издержки $Z=q_1x_1+q_2x_2$. Найти функцию затрат ресурсов и функцию издержек как функции от объема y производства продукции.

Решение. В точке минимума имеем $q_1=\lambda_1\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$, $q_2=\lambda_1\dfrac{\partial y}{\partial x_2}$, т.е.

$$q_1=\lambda_1\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}=\lambda_1\frac{\alpha y}{x_1},\ q_2=\lambda_1\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}=\lambda_1\frac{\beta y}{x_2}.$$

Отсюда получаем

$$x_1=\lambda_1\frac{\alpha y}{q_1},\ x_2=\lambda_1\frac{\beta y}{q_2}.$$

Подставляя эти выражения в производственную функцию $y=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$, находим

$$\lambda_1=\frac{1}{y}\left(\frac{q_1{}^{\alpha}q_2{}^{\beta}y}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Таким образом, функции производственных затрат ресурсов следующие:

$$x_1=\lambda_1\frac{\alpha y}{q_1}=\frac{\alpha y}{q_1 y}\left(\frac{q_1{}^{\alpha}q_2{}^{\beta}y}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}=\left(\frac{\alpha q_2}{\beta q_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}y^{\frac{1}{\alpha+\beta}},$$

$$x_2=\lambda_1\frac{\beta y}{q_2}=\left(\frac{\beta q_1}{\alpha q_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Функция издержек $C(y)$ имеет вид:

$$C(y)=q_1x_1+q_2x_2=\lambda_1(\alpha+\beta)y=(\alpha+\beta)\left(\frac{q_1{}^{\alpha}q_2{}^{\beta}y}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}=$$

$$=(\alpha+\beta)\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\beta^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}q_1{}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}q_2{}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.\quad\square$$

3°. Задача максимизации объема выпуска продукции. Задача максимизации объема производства (задача II) состоит в том, чтобы определить максимальный объем выпуска продукции при заданных затратах ресурсов. Математически она формулируется так:
найти

$$\max\left(y=f(x_1,\ldots,x_n)\right).$$

при условиях

$$q_1x_1+q_2x_2+\ldots+q_nx_n=C,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ldots,\ x_n\geq 0.$$

Геометрически для $n=2$ задача II означает (рис. 16.3), что задана изокоста с уравнением $q_1x_1+q_2x_2=C$ и нужно найти ту изокванту производственной функции $y=f(x_1,x_2)$, которая касается этой изокосты. Точка касания $x^*=\mathrm{col}(x_1^*;x_2^*)$ и есть оптимальное решение, а максимальный объем выпуска продукции $y^*=f(x_1^*,x_2^*)$.

Функция Лагранжа задачи II имеет вид:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_2)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\lambda_2(C-q_1x_1-q_2x_2-\ldots-q_nx_n).$$

Согласно Л.12. условиями оптимальности будут:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}-\lambda_2q_j=0,\quad j=\overline{1,n};$$

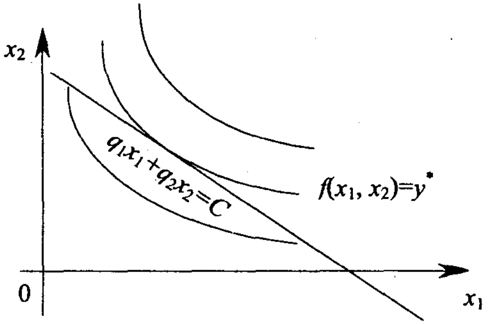


Рис. 16.3

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = C - q_1x_1 - \ldots - q_nx_n = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lambda_2 q_j, \quad j = \overline{1,n}; \quad q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n = C.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем оптимальное решение $x^* = \mathrm{col}\left(x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*\right)$.

В точке максимума x^* будут иметь место соотношения, аналогичные соответственным соотношениям в задаче минимизации издержек, а именно:

1) предельные производительности ресурсов пропорциональны их ценам с коэффициентом пропорциональности λ_2^*, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lambda_2^* q_j, \quad j = \overline{1,n};$$

2) отношение предельных производительностей ресурсов равно отношению их цен, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \frac{\partial f}{\partial x_k} = q_j : q_k; \quad j,k = \overline{1,n}, \quad j \neq k;$$

3) отношение предельных производительностей ресурсов к их ценам равны между собой, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : q_j = \lambda_2^*, \quad j = \overline{1,n}.$$

Выясним экономический смысл множителя λ_2^*. Полный дифференциал производственной функции будет

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n .$$

Так как в точке максимума x^* имеет место соотношение $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lambda_2^* q_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$, то

$$\mathrm{d}y = \lambda_2^*\left(q_1\,\mathrm{d}x_1 + q_2\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + q_n\,\mathrm{d}x_n\right) = \lambda_2^*\,\mathrm{d}Z = \lambda_2^*\,\mathrm{d}C .$$

Отсюда получаем $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}Z} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}C} = \lambda_2^*$.

Таким образом, λ_2^* выражает дополнительный выпуск продукции в расчете на единицу общих затрат, т.е. он выражает общую предельную производительность ресурсов.

Из п.1 с учетом полученных здесь результатов заключаем, что λ_1^* и λ_2^* для рассматриваемых задач по смыслу взаимообратные. Поэтому указанные две задачи I и II называют *взаимными задачами для производителя*.

Если в качестве C в задаче II взять $Z^* = Z_{\min}$, полученный в задаче I при $y = y_0$, то максимальный объем выпуска продукции $y^* = y_0$, $\lambda_2^* = \dfrac{1}{\lambda_1^*}$, а точки оптимума совпадают.

▷ ***Пример 2.*** Найти $\max\left(y = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}\right)$ при $q_1x_1 + q_2x_2 = C$.

Решение. Из условий $\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \lambda_2 q_1$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = \lambda_2 q_2$ получаем:

$$A\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}=\lambda_2 q_1,\quad A\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}=\lambda_2 q_2 .$$

Отсюда имеем: $\alpha y=\lambda_2 q_1 x_1$, $\beta y=\lambda_2 q_2 x_2$. Следовательно, $x_1=\dfrac{\alpha y}{\lambda_2 q_1}$, $x_2=\dfrac{\beta y}{\lambda_2 q_2}$.

Используя равенство $q_1x_1+q_2x_2=C$, находим

$$q_1x_1+q_2x_2=\frac{\alpha y}{\lambda_2}+\frac{\beta y}{\lambda_2}=\frac{(\alpha+\beta)y}{\lambda_2}=C .$$

Значит, $\lambda_2^*=\dfrac{(\alpha+\beta)y}{C}$. Тогда

$$x_1^*=\frac{\alpha C}{(\alpha+\beta)q_1},\quad x_2^*=\frac{\beta C}{(\alpha+\beta)q_2}$$

и

$$y^*=A(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{\beta}=A\left(\frac{\alpha C}{(\alpha+\beta)q_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta C}{(\alpha+\beta)q_2}\right)^{\beta}=$$

$$=A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\frac{C^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}q_1^{\alpha}q_2^{\beta}} .$$

Очевидно, $\lambda_2^*=\dfrac{(\alpha+\beta)y^*}{C}$. Так как $\lambda_2^*=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}C}$, то получаем, что в точке оптимума $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}C}=(\alpha+\beta)\dfrac{y^*}{C}$, т.е. общая предельная производительность ресурсов пропорциональна средней производительности всех ресурсов, где коэффициентом пропорциональности служит суммарный коэффициент эластичности $\varepsilon=\alpha+\beta$.

Такой факт справедлив и в общем случае. Действительно, рассмотрим условия $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=\lambda_2^* q_1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=\lambda_2^* q_2$, $\ldots$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}=\lambda_2^* q_n$, которые справедливы в точке максимума. Умножим обе части этих равенств соответственно на $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ и сложим их:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1^* + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2^* + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n^* = \lambda_2^* \left(q_1 x_1^* + q_2 x_2^* + \ldots + q_n x_n^* \right) = \lambda_2^* C.$$

Поделив обе части полученного равенства на y^*, получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{x_1^*}{y^*} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{x_2^*}{y^*} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{x_n^*}{y^*} = \lambda_2^* \frac{C}{y^*}$$

или $\varepsilon = \lambda_2^* \frac{C}{y^*}$. Следовательно, $\lambda_2^* = \varepsilon \frac{y^*}{C}$. А так как $\lambda_2^* = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}C}$, то имеем

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}C} = \varepsilon \frac{y^*}{C},$$

т.е. указанный факт имеет место. □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Для заданной производственной функции *CES* $y = \left(x_1^{-2} + x_2^{-2} \right)^{-\frac{1}{2}}$ и цен ресурсов q_1 (для x_1) и q_2 (для x_2) найти функцию затрат ресурсов и функцию издержек как функции от объема y производства продукции.

2. Найти $\max\left(y = A\left(x_1^{-2} + x_2^{-2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)$ при условии $q_1 x_1 + q_2 x_2 = C$.

■ Лекция 17

Квадратичное программирование

К задачам квадратичного программирования относят специальный класс задач нелинейного программирования, для которых целевая функция $f(x)$ – квадратичная, вогнутая, а все ограничения линейны. Примером экономической модели такой задачи является задача максимизации объема выпуска продукции в случае квадратичной производственной функции.

В матричном виде задача квадратичного программирования записывается так:
найти

$$\max\left(f(x) = c'x + \frac{1}{2}x'Dx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_i x_j \right) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} Ax \le b, \\ x \ge 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где $D = \left[d_{ij}\right]_{i,j=\overline{1,n}}$ – симметричная, отрицательно определенная матрица[*];

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_i} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если D – отрицательно определенная матрица, то квадратичная форма $x'Dx$ вогнута. Следовательно, задача (1)-(2) является примером задачи вогнутого программирования.

Примеры квадратичных функций:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 4x_1^2 - x_2^2,$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2.$$

---

[*] можно считать, что $x'Dx \le 0 \ \forall x \in R^n$

Будем предполагать, что $f(x)$ – строго вогнута.

1°. Основная теорема. Применим к задаче (1)-(2) теорему Куна-Таккера и с ее помощью получим необходимые и достаточные условия оптимальности.

Теорема 1.

Вектор $x \geq 0$ является оптимальным решением задачи квадратичного программирования (1)-(2) *тогда и только тогда, когда существуют такие* m*-мерные векторы $\lambda \geq 0$, $w \geq 0$ и* n*-мерный вектор $\nu \geq 0$, что выполняются следующие условия:*

1) $c + Dx - A'\lambda + \nu = 0$;
2) $b - Ax - w = 0$;
3) $\nu' x = 0$;
4) $w'\lambda = 0$.

Доказательство. Составим функцию Лагранжа для задачи (1)-(2):

$$L(x,\lambda) = c'x + \frac{1}{2}x'Dx + \lambda'(b - Ax). \tag{3}$$

Заметим, что имеют место соотношения

$$\frac{\partial(b'x)}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial(x'Dx)}{\partial x} = 2Dx, \tag{4}$$

в справедливости которых можно убедиться непосредственной проверкой.

Применим теорему Куна-Таккера к функции (3) и используем (4). Тогда получим:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x} = c + Dx - A'\lambda \leq 0$, причем, если $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j} < 0$, то $x_j = 0$, $j = 1,\ldots,n$;

б) $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = b - Ax \geq 0$, причем, если $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i} > 0$, то $\lambda_i = 0$, $i = 1,\ldots,m$.

Введем два вспомогательных вектора $\nu' = (\nu_1;\ldots;\nu_n) \geq 0$ и

$w' = (w_1; \ldots; w_m) \geq 0$, причем выберем $\nu_j > 0$, если $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j} < 0$ и $\nu_j = 0$,

если $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j} = 0$. Аналогично выберем $w_i > 0$, если $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i} > 0$ и

$w_i = 0$, если $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i} = 0$.

Прибавив вектор ν к условию а) и вычтя w из б), получаем равенства:

$$\begin{aligned} &1)\ c + Dx - A'\lambda + \nu = 0; \\ &2)\ b - Ax - w = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Сравнив компоненты векторов x и ν, а также λ и w, получим два условия дополняющей нежесткости:

$$3)\ x'\nu = 0;\ 4)\ \lambda' w = 0. \tag{6}$$

Теорема 1 доказана. □

Отметим, что система (5), образующая условия 1) и 2), состоит из $n + m$ уравнений с $2(n + m)$ неизвестными x, λ, ν и w. Из условий 3) и 4) следует, что по меньшей мере n переменных из x, ν, а также m переменных из набора λ, w обращаются в нуль.

Таким образом, если существует решение задачи (1)-(2), то оно должно быть одним из базисных решений системы (5). Поскольку для нахождения допустимого базисного решения можно применить симплекс-метод Данцига, то этот метод, как и другие методы ЛП, вполне пригоден для решения задач квадратичного программирования.

2^0. Алгоритм решения задачи квадратичного программирования. Перепишем (5) в виде

$$\begin{aligned} Dx - A'\lambda + \nu &= -c, \\ Ax + w &= b. \end{aligned} \tag{7}$$

Для нахождения начального опорного базиса системы (7) применим метод искусственного базиса, описанный в Л. 8. Введем искусственные переменные $z = \mathrm{col}(z_1; \ldots; z_n)$ и $y = \mathrm{col}(y_1; \ldots; y_m)$. В результате приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} Dx - A'\lambda + \nu + z &= -c, \\ Ax + w + y &= b. \end{aligned} \tag{8}$$

Выбрав компоненты векторов z и y одинакового знака со знаками соответствующих свободных членов $-c$, b, находим начальное базисное решение (без ограничения общности можно всегда считать, что $-c \geq 0$, $b \geq 0$ и тогда начальное базисное решение $\mathrm{col}(x;\lambda;v;w;z;y) = \mathrm{col}(0;0;0;0;-c;b)$).

Составим псевдоцелевую функцию $\hat{f} = \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j$ и рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j \to \min, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &Dx - A'\lambda + v + z = -c, \\ &Ax + w + y = b, \end{aligned} \tag{10}$$

$$x \geq 0,\ \lambda \geq 0,\ v \geq 0,\ w \geq 0,\ z \geq 0,\ y \geq 0. \tag{11}$$

Решаем эту задачу (9)-(11) методом, изложенным в Л. 8., выводя из базиса искусственные переменные y и z и вводя x, λ, v и w.

При этом следует учитывать условия дополняющей нежесткости $x'v = 0$, $\lambda' w = 0$.

Если удается вывести все искусственные переменные и при этом удовлетворяется условие 3) и 4) теоремы 1, то найденное базисное решение будет оптимальным, откуда можно легко определить решение задачи (1)-(2).

Замечание 1. Иногда, в зависимости от структуры уравнений системы (7), удобно вводить в псевдоцелевую функцию $\hat{f}$ меньше чем $(n+m)$ свободных переменных, при этом система (8) примет несколько иной вид.

▷ **3⁰. Пример**. Найти

$$\max f(x_1, x_2) = \max\left(10x_1 + 20x_2 + x_1 x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2\right)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &8 - x_2 \geq 0, \\ &10 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Решение. Так как здесь квадратичная форма $f(x_1, x_2)$ вогнута и ограничения линейны, то имеем задачу квадратичного программирования вида (1)-(2). Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = \left(10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2\right) + \\ + \lambda_1(8 - x_2) + \lambda_2(10 - x_1 - x_2).$$

Применив теорему Кунна-Таккера, получим следующие условия:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1} = 10 + x_2 - 4x_1 - \lambda_2 \le 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial x_2} = 20 + x_1 - 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 \le 0, \\ &8 - x_2 \ge 0, \\ &10 - x_1 \ge 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Перепишем систему (12) в виде

$$\begin{aligned} &4x_1 - x_2 + \lambda_2 \ge 10, \\ &-x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \ge 20, \\ &x_2 \le 8, \\ &x_1 + x_2 \le 10. \end{aligned} \tag{13}$$

Вводим теперь неотрицательные свободные переменные ν_1, ν_2, w_1, w_2 и получаем с учетом (13) систему типа (8):

$$\begin{aligned} &4x_1 - x_2 + \lambda_2 - \nu_1 = 10, \\ &-x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - \nu_2 = 20, \\ &x_2 + w_1 = 8, \\ &x_1 + x_2 + w_2 = 10. \end{aligned} \tag{14}$$

с условиями дополняющей нежесткости $x_1\nu_1 + x_2\nu_2 = 0$, $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0$.

Для нахождения допустимого базисного решения системы (14) применим метод искусственного базиса, причем здесь удобно ввести только две переменные y_1 и y_2 в первые два ограничения этой системы (14), образуем псевдоцелевую функцию $\hat{f} = (y_1 + y_2)$ и рассмотрим следующую задачу:

$$\hat{f} = y_1 + y_2 \to \min,$$

$$\begin{aligned}
&4x_1 - x_2 + \lambda_2 - \nu_1 + y_1 = 10,\\
&-x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - \nu_2 + y_2 = 20,\\
&x_2 + w_1 = 8,\\
&x_1 + x_2 + w_2 = 10,
\end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0,\ \nu_1 \ge 0,\ \nu_2 \ge 0,\ w_1 \ge 0,\ w_2 \ge 0,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Составим первую симплексную таблицу 1 (см. Л. 8).

Выполнив первый шаг симплекс-преобразования, выводим из базисных переменных y_1 и вводим x_1.

Таблица 1

Базисные переменные	*Свободные члены*	x_1	x_2	λ_1	λ_2	ν_1	ν_2	y_1	y_2	w_1	w_2	
y_1	10	$\boxed{4}$	−1	0	1	−1	0	1	0	0	0	→
y_2	20	−1	4	1	1	0	−1	0	1	0	0	
w_1	8	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	
w_2	10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	
	−30	−3	−3	−1	−2	1	1	0	0	0	0	
		↑										

Выполнив второй шаг симплекс-преобразования, приходим к таблице 2, выводим из базисных переменных y_2 и вводим x_2.

Таблица 2

Базисные переменные	*Свободные члены*	x_1	x_2	λ_1	λ_2	ν_1	ν_2	y_1	y_2	w_1	w_2	
x_1	$2\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	
y_2	$22\frac{1}{2}$	0	$\boxed{3\frac{3}{4}}$	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	−1	$\frac{1}{4}$	1	0	0	→
w_1	8	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	
w_2	$7\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	
	$-\frac{45}{2}$	0	$-\frac{15}{4}$	−1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	0	0	
			↑									

Выполнив очередной шаг симплекс-метода, получаем таблицу 3.

Таблица 3

Базисные переменные	*Свободные члены*	x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	y_1	y_2	w_1	w_2
x_1	4	1	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{30}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{1}{15}$	0	0
x_2	6	0	1	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	0	0
w_1	2	0	0	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{15}$	1	0
w_2	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

Получено следующее допустимое базисное решение:

$$x_1^* = 4,\ x_2^* = 6,\ w_1^* = 2,\ w_2^* = 0,\ \lambda_1^* = \lambda_2^* = v_1^* = v_2^* = 0 .$$

Так как $x_1^* v_1^* = 0,\ x_2^* v_2^* = 0$; $\lambda_1^* w_1^* = 0,\ \lambda_2^* w_2^* = 0$, то это решение является оптимальным.

Итак, $x_1^* = 4,\ x_2^* = 6$ – решение исходной задачи,

$$f^* = \max f(x_1, x_2) = f(x_1^*, x_2^*) = 10 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 4 \cdot 6 - 2 \cdot 16 - 2 \cdot 36 =$$
$$= 40 + 120 + 24 - 32 - 72 = 80.$$

Замечание 2. Если задача квадратичного программирования наряду с ограничениями неравенствами (2) содержит и равенства вида $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j$,

то для преобразования их к виду (2) $(Ax \leq b)$ следует выразить из этих равенств какие-либо базисные переменные через остальные и использовать условие неотрицательности для базисных переменных.

Например, преобразуем ограничения-равенства

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16,$$
$$-x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

к указанному виду. Разрешив их относительно x_3 и x_4, находим $x_3 = 6 - 2x_1 + x_2$, $x_4 = 10 - x_1 - 2x_2$. Учитывая условие неотрицательности $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, получим ограничения неравенства:

$$2x_1 - x_2 \le 6, \;\; x_1 + 2x_2 \le 10 \cdot$$

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Решить следующие задачи квадратичного программирования:

а) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2 \to \min$,

$$x_1 + x_2 \le 2,$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

б) $f(x) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 \to \min$,

$$2x_1 + 3x_2 \le 6,$$
$$2x_1 + x_2 \le 4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

в) $f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 - 2x_2 \to \min$,

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 16,$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4,$$
$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,4}.$$

г) $f(x) = x_2^2 + 2x_1x_3 - x_3 \to \min$,

$$x_1 + x_2 = 4,$$
$$x_2 + x_3 = 8,$$
$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,3}.$$

■ Лекция 18

Некоторые простейшие математические модели экономики

Здесь дано математическое описание некоторых простейших экономических ситуаций.

Рассмотрим те понятия, которые требуются для отражения существенных моментов экономического развития. *Фундаментальной единицей экономической системы* назовем сектор, в котором производится только один вид продукции и который взаимодействует с другими секторами в форме рыночного обмена продукцией и услугами. Сектор не обязательно является физическим или юридическим лицом.

Считаем, что объемы производства в текущем цикле определяют объемы производства в следующем, т.е. объемы производства носят характер состояния системы. На самом деле объем производства некоторого продукта в каждом цикле зависит, прежде всего, от наличия в этом цикле ресурсов для его производства, а также зависит от решений субъекта деятельности, который присутствует в любой экономической системе. В связи с этим описание закона функционирования любой производственной системы должно содержать не только переменные, соответствующие объемам производства, но и переменные, отражающие динамику ресурсов производства.

Рассмотрим некоторые простейшие математические модели экономики.

1°. Модель В.В. Леонтьева. Пусть в экономической системе в течение цикла, равного одному году, производится n видов продукции. Для производства продукции каждого вида достаточно тех видов продукции, которые производятся в системе. Такую систему называют *самодостаточной.*

Производимая в течение цикла продукция используется для производства продукции в этом же цикле, и каждый сектор производит лишь один вид продукции. Известна матрица A прямых затрат. Требуется описать ограничения, которые связывают объемы производства в каждом секторе.

Расход i-го вида продукции, когда в системе производится продукция j-го вида в количестве w_j, $j=\overline{1,n}$, и удовлетворяется конечный спрос

s_i, равен $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j + s_i$. Так как в системе производится продукция i-го вида w_i, то выполняется неравенство $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j + s_i \le w_i$ или в матричной форме $Aw + s \le w$. В случае, когда остаток от производства $w - Aw$, называемый ***чистым выпуском***, потребляется полностью, т.е. $s = w - Aw$, то вместо полученного выше неравенства имеем

$$w - Aw = s. \qquad \textbf{(1)}$$

Уравнение (1) называют *моделью Леонтьева.*

Если учесть расходы продукции на создание новых производственных мощностей, т.е. основных фондов в объеме y, то уравнение (1) заменится соотношением $w - Aw - By = s$ (B – некоторая матрица).

Модель Леонтьева можно использовать для решения следующей задачи: какие должны быть объемы производства, чтобы удовлетворить величину s^0 конечного спроса. Решение этой задачи, как легко видеть, сводится к нахождению неотрицательного вектора w, удовлетворяющего системе линейных алгебраических уравнений $(E - A)w = s^0$.

Отметим, что модель Леонтьева получена в предположениях, которые не всегда выполняются в реальной экономике, что снижает ее практическую значимость.

2^0. Задача управления запасами. Для нормальной работы предприятия необходимо иметь как некоторый запас определенного ресурса, так и некоторый запас собственной продукции. Продукция, полученная в результате некоторого производственного процесса, может идти как на продажу, так и служить ресурсом для других процессов на данном предприятии.

Объемы запасов ресурса и продукции рассматриваются во времени, т.е. представляют собой некоторые динамические процессы. Возникает задача управления этими процессами, чтобы в каждый момент времени запасов было достаточно для удовлетворения спроса, но и не было бы излишков, так как на хранение требуются расходы, а также в запасах и непроданной продукции замораживается капитал, который не приносит прибыль. Значит, запасы также должны быть ограничены разумными пределами.

Дадим математическую модель этой задачи. Процессы будем рассматривать в дискретном времени k. Введем обозначения: $x_1(k)$ – запас ресурса на начало k-го периода; $x_2(k)$ – запас продукции на начало k-го периода; x_1^0 и x_2^0 – известные начальные запасы ресурса и продукции; a_{12} – количество продукции, получаемой из единицы ресурса; a_{22} – количество продукции, идущее на производство единицы продукции на этом же предприятии; $v(k)$ – количество ресурса, изымаемое со склада в k-ом периоде для использования в производстве; $u(k)$ – поставки ресурса в k-ом периоде для использования в $(k+1)$-ом цикле; $s(k)$ – изымаемое со склада количество продукции в k-ом периоде для удовлетворения спроса потребителей; $c_1(x_1)$ – издержки за хранение продукции в количестве x_1 в течение одного периода, $c_2(x_2)$ – то же самое для ресурса, $c_3(v)$ – издержки, связанные с изъятием со склада сырья в количестве $v(k)$.

Так как из количества $v(k)$ производится $a_{12}v(k)$ и на производство последней идет $a_{22}(a_{12}v(k))$ продукции этого же предприятия, то размеры запасов ресурса и продукции по периодам описываются системой уравнений:

$$x_1(k+1)=x_1(k)+u(k)-v(k), \tag{2}$$

$$x_2(k+1)=x_2(k)+a_{12}v(k)-a_{22}a_{12}v(k)-s(k), \tag{3}$$

$$x_1(0)=x_1^0,\ x_2(0)=x_2^0.$$

Пусть $\beta=(1-a_{22})a_{12}$. Тогда (3) запишется так:

$$x_2(k+1)=x_2(k)+\beta v(k)-s(k). \tag{4}$$

Величины $x_1(k)$, $x_2(k)$, $v(k)$, $u(k)$, $s(k)$ при всех k неотрицательны и при этом должно выполняться неравенство

$$v(k)\le x_1(k). \tag{5}$$

Так как спрос $s(k)$ удовлетворяется из объема запасов продукции $x_2(k)$ в k-ом цикле, то этих запасов должно быть достаточно, т.е.

$$s(k) \le x_2(k). \qquad (6)$$

Зафиксируем число K и поставим задачу нахождения такой последовательности $v(0)$, $v(1)$, ..., $v(K-1)$, $v(K)$, что все условия (2)-(6) будут выполняться и расходы, связанные с соответствующими изменениями уровней запасов, описываемые функционалом

$$I(v) = \sum_{k=0}^{K} \left[c_1(x_1(k)) + c_2(x_2(k)) + c_3(v(k)) \right] \qquad (7)$$

будут минимальны.

3⁰. Динамическое планирование производства. Как и в п. 2⁰ считаем, что время меняется дискретно, по циклам, и циклом в зависимости от масштабов производства выбирается день, неделя, месяц, квартал, год и т.д. Планировать производство предполагается циклически.

Рассмотрим случай, когда выпускается только один вид продукции в количестве w_1. Пусть на срок в T циклов известен спрос на нее $u_1(k)$. Требуется запланировать такие объемы $w_1(k)$ выпуска этой продукции, чтобы спрос был удовлетворен, но не было слишком много нереализованной продукции и не было больших колебаний $\Delta w_1(k) = w_1(k+1) - w_1(k)$ выпуска продукции.

Запасы $z_1(k)$ продукции подчиняются уравнению $z_1(k+1) = z_1(k) + w_1(k) - u_1(k)$. Одной из составляющих целевой функции является $a_1 \sum_{k=1}^{T} z_1(k)$, где a_1 – стоимость хранения единицы продукции. Вторая составляющая зависит от $\Delta w_1(k)$, которая может быть как положительной, так и отрицательной.

Так как любое число представимо в виде разности двух неотрицательных чисел, то введя переменные $\alpha(k) \ge 0$ и $\beta(k) \ge 0$, можно написать $w_1(k+1) - w_1(k) = \alpha(k) - \beta(k)$.

Если целью является ограничение резких наращиваний производства, то следует минимизировать функцию

$$f(z_1, \alpha) = a_1 \sum_{k=1}^{T} z_1(k) + a_2 \sum_{k=1}^{T} \alpha(k), \qquad (8)$$

где $z_1(k)$ и $\alpha(k)$ удовлетворяют системе уравнений

$$z_1(k+1) = z_1(k) + w_1(k) - u_1(k),$$
$$w_1(k+1) = w_1(k) + \alpha(k) - \beta(k). \qquad \textbf{(9)}$$

Если же цель – устранить резкие колебания производства, то задача сводится к минимизации функции

$$f(z_1, \alpha, \beta) = a_1 \sum_{k=1}^{T} z_1(k) + a_2 \sum_{k=1}^{T} (\alpha(k) + \beta(k)). \qquad \textbf{(10)}$$

Эта задача относится к классу задач параметрического программирования.

4⁰. Параметрическое программирование. Рассмотрим задачу (8)-(9). Полагая $\lambda = \dfrac{a_1}{a_2}$, где λ измеряет отношение стоимости увеличения выпуска продукции на единицу к стоимости хранения единицы продукции, рассматриваемая задача сводится к задаче

$$\min_{z_1, \alpha} \{ z(1) + \ldots + z_1(T) + \lambda(\alpha(1) + \ldots + \alpha(T)) \} \qquad \textbf{(8')}$$

при условиях (9).

Задачей менеджера предприятия является выяснить, какие планы производства отвечают различным λ. Эта задача относится к классу так называемых задач параметрического программирования. Общая постановка задачи параметрического программирования следующая:

$$\min_x (d^1 + d^2\lambda)' x \qquad \textbf{(11)}$$

$$Ax = b, \qquad \textbf{(12)}$$

$$x \geq 0, \qquad \textbf{(13)}$$

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}, \qquad \textbf{(14)}$$

где $d^i = \text{col}(d_1^i; d_2^i; \ldots; d_n^i)$, $i = \overline{1,n}$; A – матрица размера $m \times n$, $b = \text{col}(b_1; \ldots; b_m)$.

Считаем, что при всех допустимых λ решение задачи линейного программирования (11)-(13) существует. Ясно, что в силу того, что множество допустимых решений является выпуклым многогранником, интервал значений λ разбивается на семейство интервалов, причем для всех λ в каждом из них оптимальное решение одно и то же. Найдем множество тех λ, для которых $x^0(\lambda_{\min})$ является оптимальным решением. Для этого рассмотрим симплекс-таблицу задачи (11)-(13), соответствующую $x^0(\lambda_{\min})$. При изменении λ в этой таблице будут изменяться только $\delta_1 = c_1 - z_1, \ \ldots, \ \delta_n = c_n - z_n$, а именно

$$c_j - z_j = c_j(\lambda) - \sum_{i=1}^{m} c_{k_i}(\lambda) x_{ij} = d_j^1 + \lambda d_j^2 - \sum_{k=1}^{m} \left(d_{k_i}^1 - \lambda d_{k_i}^2\right) x_{ij} =$$

$$= -\left(\alpha_j + \beta_j \lambda\right), \ j = \overline{1,n},$$

где $\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} d_{k_i}^1 x_{ij} - d_j^1$, $\beta_i = -\sum_{i=1}^{m} d_{k_i}^2 x_{ij} - d_j^2$.

В силу оптимальности $x^0(\lambda_{\min})$ выполняется $\alpha_j + \beta_j \lambda_{\min} \le 0$ $\forall \ j = \overline{1,n}$. Поэтому система неравенств

$$\alpha_j + \lambda \beta_j \le 0, \ j = \overline{1,n} \tag{15}$$

совместна. Максимальное λ, удовлетворяющее (15), определяется как

$$\lambda_1 = \min_j \left\{ -\frac{\alpha_j}{\beta_j} : \beta_j > 0 \right\} = -\frac{\alpha_k}{\beta_k}.$$

При этом $\lambda_{\min} < \lambda_1$. Если $\beta_j \le 0$ для всех $j = \overline{1,n}$, то $\lambda_1 = +\infty$.

Если $\lambda_1 \ge \lambda_{\max}$, то решение задачи закончено. Пусть $\lambda_1 < \lambda_{\max}$ и $x^0(\lambda_1 + \nu)$ – оптимальное решение для очень малого $\nu > 0$. Аналогично, как и выше, подсчитаем соответствующие ему $c_j^1 - z_j^1 = -\left(\alpha_{1j} + \lambda \beta_{1j}\right)$ и рассмотрим систему неравенств

$$\alpha_{1j} + \lambda \beta_{1j} \le 0, \ j = \overline{1,n},$$

которая является совместной. Если для всех j, $j = \overline{1,n}$, имеем $\beta_{1j} \le 0$, то для всех λ, $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_{\max}$, решением является $x^0(\lambda_1)$.

Если выполняется $\lambda_2 = \min_j \left\{ -\alpha_{1j} / \beta_{1j} : \beta_{1j} > 0 \right\} \ge \lambda_{\max}$, то $x^0(\lambda_1)$

также является решением. Если $\lambda_2 < \lambda_{max}$, то процесс продолжаем до тех пор, когда при всех λ, $\lambda_{min} \le \lambda \le \lambda_{max}$, будет определено решение.

Конечность этого процесса следует из конечности числа граней области допустимых решений. Числа λ_1, λ_2, ... называются *критическими значениями параметра* λ, а $x^0(\lambda_1)$, $x^0(\lambda_2)$, ... называют *критическими решениями*.

✍ Задания для самостоятельной работы

1. В модели Леонтьева найти все возможные объемы производства w, чтобы удовлетворить величину s^0 конечного спроса:

$$1)\ A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix},\quad s^0=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix};\ 2)\ A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix},\quad s^0=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Записать задачу (9)-(8′) в виде задачи параметрического программирования (11)-(14).

3. Решить задачу параметрического программирования с помощью алгоритма, изложенного в п. 4:

$$\min\left[-2x_1 + x_2 + \lambda(-2x_1 - 4x_2)\right]$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &x_1 + x_3 = 4000, \\ &x_2 + x_4 = 6000, \\ &x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_5 = 6000, \\ &x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0, \\ &1 \le \lambda \le 2. \end{aligned}$$

■ Лекция 19

Динамическое программирование

Изложен метод динамического программирования Р. Беллмана для дискретных процессов оптимального управления; в качестве модельного примера рассмотрена задача управления запасами.

Рассмотрим управляемый процесс $x(k)$, который описывается уравнением

$$x(k+1)=f\left(k,\ x(k),u(k)\right),\ k=k_0,\ k_0+1,\ \ldots,\ k_1, \qquad \textbf{(1)}$$

где на управление $u(k)$ наложено ограничение

$$u(k)\in U \text{ для всех } k, \qquad \textbf{(2)}$$

U – заданное множество. Пусть также задано начальное состояние x^0, т.е. $x(k_0)=x_0$.

Качество рассматриваемого процесса оценивает функционал

$$I\left(k_0,x^0,u\left[k_0,k_1\right]\right)=\sum_{k=k_0}^{k_1} g\left(k,x(k),u(k)\right). \qquad \textbf{(3)}$$

Функции $f(k,x,u)$ и $g(k,x,u)$ будем считать непрерывными и имеющими непрерывные частные производные по u.

<u>***Задача* I.**</u>

Требуется для $k=k_0,k_0+1,\ldots,k_1$ *найти такое управление* $u(k)$, *стесненное ограничением* (2), *которое минимизирует функционал* (3) *на множестве процессов* $x(k)$, *определенных уравнением* (1) *и начинающихся в состоянии* x^0.

Управление $u^0(k)$, которое решает задачу I, называют *оптимальным*.

Замечание 1. В общем случае x – n-мерный вектор, u – r-мерный вектор, $f(k,x,u)$ – n-вектор-функция.

1°. Уравнение Беллмана. Обозначим через $S(k_0, x^0)$ следующую величину:

$$S(k_0, x^0) = \min_{u[k_0, k_1]} I(k_0, x^0, u[k_0, k_1]).$$

Аналогично определим S для произвольных k и x:

$$S(k, x) = \min_{u[k, k_1]} I(k, x, u[k, k_1]),$$

где

$$I(k, x, u[k, k_1]) = \sum_{j=k}^{k_1} g(j, x(j), u(j)).$$

Согласно определению функции Р. Беллмана $S(k, x)$ имеем

$$S(k, x) = \min_{u[k, k_1]} \left[g(k, x, u(k)) + \sum_{j=k+1}^{k_1} g(j, x(j), u(j)) \right]. \qquad (4)$$

Второе слагаемое в (4) оценивает согласно функционалу (3) процессы в системе (1), начинающие в момент $k+1$ в состоянии $x(k+1)$, в которое переходит система из состояния $x(k)$ при использовании в момент k управления $u(k)$.

Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция Р. Беллмана $S(k, x)$. Пусть $u^0[k, k_1]$ – оптимальное управление. Так как $x(k+1)$ зависит от $u(k)$, то функционал $\sum_{j=k+1}^{k_1} g(j, x(j), u(j))$ также зависит и от $u(k)$.

Обозначим его через $I_1(k+1, u(k), u[k+1, k_1])$.

Тогда получаем

$$\begin{aligned}
S(k, x) &= g(k, x, u^0(k)) + I_1(k+1, u^0(k), u^0[k+1, k_1]) = \\
&= g(k, x, u^0(k)) + \min_{u[k+1, k_1]} I_1(k+1, u^0(k), u[k+1, k_1]) = \\
&= \min_{u(k)} \left[g(k, x, u(k)) + \min_{u[k+1, k_1]} I_1(k+1, u(k), u[k+1, k_1]) \right] = \\
&= \min_{u(k)} \left[g(k, x, u(k)) + \min_{u[k+1, k_1]} \sum_{j=k+1}^{k_1} g(j, x(j), u(j)) \right].
\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$S(k,x)=\min_{u(k)}\left[g\left(k,x,u(k)\right)+S\left(k+1,x(k+1)\right)\right].$$

или с учетом (1)

$$S(k,x)=\min_{u(k)}\left[g\left(k,x,u(k)\right)+S\left(k+1,f\left(k,x,u(k)\right)\right)\right]. \qquad (5)$$

Уравнение (5) называется *уравнением Беллмана*. Уравнение Беллмана является рекуррентным по k уравнением в обратном времени.

2^0. О решении уравнения Беллмана. Получение решения $u^0(k)$ поставленной задачи I проводится одновременно с вычислением функции $S(k,x)$. Вначале $S(k,x)$ вычисляется для $k=k_1$ и всех x как решение задачи

$$S(k_1,x)=\min_{u(k_1)} g\left(k_1,x,u(k_1)\right). \qquad (6)$$

В результате получим значения $F^0(k_1,x)$-управления $u(k_1)$ и значения функции $S(k_1,x)$ для каждого фиксированного x.

Замечание 2. Отметим, что часто функция $g\left(k_1,x,u(k_1)\right)$ не зависит от $u(k_1)$, так как управление в момент k_1 не оказывает влияния на процесс $x(j)$ при $j=k_0,k_0+1,\ldots,k_1$. Поэтому обычно в функционале (3) выделяется член, не зависящий от $u(k_1)$, т.е.

$$I=g\left(k_1,x(k_1)\right)+\sum_{j=k_0}^{k_1-1} g\left(j,x(j),u(j)\right).$$

Тогда для $j=k_1$ сразу получаем решение задачи (6) как $S(k_1,x)=g(k_1,x)$.

Пусть $S(k,x)$ известна для $k=k_1$. Тогда в (5) правая часть при $k=k_1$ полностью определена. Для нахождения $S(k_1-1,x)$ решаем задачу (5) при $k=k_1-1$ для всех x. Одновременно вычисляется для каждого x значение оптимального управления $F^0(k_1-1,x)$. Проделав эти вычисления для каждого $k = k_1 - 1, k_1 - 2, \ldots, k_0$, получим функции $S(k, x)$ и $F^0(k, x)$.

Для получения $u^0(k)$ при $k = k_0, \ldots, k_1$, соответствующего начальному состоянию x^0, нужно подставить $F^0(k, x)$ в уравнение (1) вместо $u(k)$ и вычислить его решение $x(k; k_0, x^0)$, где $x(k_0; k_0, x^0) = x^0$. Тогда $u^0(k) = F^0(k, x(k; k_0, x^0))$.

Метод решения задач оптимального управления, где используются функция и уравнение Беллмана, называют *методом динамического программирования*.

Замечание 3. Ограничения на управления могут зависеть от текущего момента k и текущего состояния $x(k)$. Тогда уравнение Беллмана имеет вид

$$S(k, x) = \min_{u(k) \in U(k, x)} \left[g(k, x, u(k)) + S(k+1, f(k, x, u(k))) \right]. \quad (7)$$

Все остальное по существу сохраняется без изменений.

3^0. Динамическое программирование для задачи управления запасами. Рассмотрим задачу управления запасами (2)-(7) Л. 18. Сведем вначале ограничение (Л. 18.6) на координату состояния этой задачи к некоторому ограничению на управление $v(0), \ldots, v(K)$. Для выполнения указанного ограничения $v(k)$ нужно выбирать из условия

$$x_2(k+1) = x_2(k) - s(k) + \beta v(k) \geq s(k+1)$$

или

$$v(k) \geq \frac{1}{\beta}\left(s(k+1) + s(k) - x_2(k)\right).$$

Следовательно, учитывая (Л. 18.5), $v(k)$ должно удовлетворять условию

$$\frac{1}{\beta}\left(s(k+1) + s(k) - x_2(k)\right) \leq v(k) \leq x_1(k). \quad (8)$$

Обозначим $U(k,x)$ множество тех v, которые удовлетворяют ограничению (8). Функции f и g в данном случае следующие:

$$g(k,x,u)=c_1\left(x_1(k)\right)+c_2\left(x_2(k)\right)+c_3\left(v(k)\right),$$

$$f(k,x,u)=\operatorname{col}\left(x_1+u(k)-v(k);\; x_2-s(k)+\beta v(k)\right).$$

Уравнение Беллмана (7) имеет вид

$$S(k,x)=\min_{v(x)\in U(k,x)}\left[c_1(x_1)+c_2(x_2)+c_3(v(k))+S(k+1,f(k,x,v))\right]. \qquad (9)$$

Уравнение (9) является разностным уравнением в обратном времени. Поэтому значение функции $S(k,x)$ для каждого x начинаем с $k=K$. Имеем

$$S(K,x)=\min_{v\in U(K,x)}\left[c_1(x_1)+c_2(x_2)+c_3(v(k))\right]. \qquad (10)$$

Поскольку $c_1(x_1)$ и $c_2(x_2)$ не зависят от $v(K)$, то минимизация в (10) эквивалентна задаче $\min\limits_{v(K)\in U(K,x)} c_3(v(K))$. Пусть $c_3\left(F^0(K,x)\right)=\min\limits_{v(K)\in U(K,x)} c_3(v(K))$. Тогда

$$S(K,x)=c_1(x_1)+c_2(x_2)+c_3\left(F^0(K,x)\right) \qquad (11)$$

Дальше определим $S(k,x)$ из уравнения (10) для $k=K-1$. Для простоты предположим, что функции $c_1(x_1)$, $c_2(x_2)$ и $c_3(v)$ – однородные линейные, т.е. $c_1=\lambda_1 x_1$, $c_2=\lambda_2 x_2$, $c_3=\lambda_3 v$. Тогда получаем уравнение

$$\begin{aligned}S(K-1,x_1,x_2)&=\min_{v(K-1)}\left[\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 v(K-1)+\right.\\&\left.+S\left(K,\operatorname{col}\left(x_1-u(K-1)-v(K-1);\, x_2-S(K-1)+\beta v(K-1)\right)\right)\right]\end{aligned}$$

или с учетом (11)

$$\begin{aligned}S(K-1,x_1,x_2)&=\min_{v(K-1)\in U(K-1,x)}\left[\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 v(K-1)+\right.\\&\left.+\lambda_1\left(x_1+u(K-1)-v(K-1)\right)+\lambda_2\left(x_2-S(K-1)+\beta v(K-1)\right)+\lambda_3 F^0(K,x)\right]\end{aligned} \qquad (12)$$

Функция, которая минимизируется в (12), – линейная по $v(K-1)$. Поэтому, если $\lambda_3-\lambda_1+\lambda_2\beta>0$, то минимум достигается в левой точке ограничений (8), т.е. тогда $v(K-1)=\frac{1}{\beta}\left(S(K)+S(K-1)-x_2\right)$ либо, если $\lambda_3-\lambda_1+\lambda_2\beta<0$, то в правой точке ограничений (8), и тогда $v(K-1)=x_1$. Тем самым $F^0(K-1,x)$ полностью определяется.

Подставив полученную $F^0(K-1,x)$ в (12), определим $S(k,x)$ при $k=K-1$ и для всех x. Продолжая этот процесс решения для $k=K-2,\ K-3,\ldots,0$, найдем $F^0(k,x)$ для всех k и x.

При известной $F^0(k,x)$, используя уравнения (2) и (4) Л.18, просчитываем будущее поведение процесса $x(k)$, соответствующее конкретному начальному условию $\mathrm{col}\left(x_1^0;x_2^0\right)$ при законе управления запасами $v(k)=F^0(k,x)$. Затем принимаем решение об использовании в момент k ресурса в количестве $v(k)=F^0(k,x(k))$. Естественно, что при проведении всех этих расчетов нужно использовать персональные компьютеры.

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Решить следующую задачу управления запасами:

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_1(k)+u(k)-v(k); \\ x_2(k+1)=x_2(k)-\frac{1}{2}v(k)-s(k); \end{cases} \quad k=0,1,2, \tag{13}$$

$$v(k)\le x_1(k),\ s(k)\le x_2(k), \tag{15}$$

$$I(v[0,2])=\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{1}{4}x_1(k)+\frac{1}{2}x_2(k)+\frac{1}{4}v(k)\right). \tag{14}$$

2. С помощью метода динамического программирования решить следующую задачу: общая сумма в 4 млн. руб. распределяется между тремя предприятиями в количествах, кратных 1 млн. руб; в результате выделения средств k-му предприятию в размере u оно дает доход $I_k(u)$, $k=1,2,3$, величина которого может быть найдена из таблицы 1.

Таблица 1

u	0	1	2	3	4
$I_1(u)$	0	5	9	11	12
$I_2(u)$	0	4	8	12	14
$I_3(u)$	0	7	9	10	11

Распределить средства между предприятиями так, чтобы их суммарный доход был максимальным.

■ Лекция 20

Принцип максимума Понтрягина и односекторная модель оптимального экономического роста

Сформулирован принцип максимума Понтрягина и с его помощью дано решение одной динамической задачи рационального ведения хозяйства, отражающую односекторную модель оптимального экономического роста.

1°. Принцип максимума Понтрягина. Рассмотрим систему управления, состояние которой в каждый момент времени задается вектором-столбцом фазовых координат $x(t) = \mathrm{col}(x_1(t); \ldots; x_n(t))$. Поведением системы можно управлять с помощью управляющих параметров $u = \mathrm{col}(u_1; \ldots; u_r)$, где $u \in U$, U – область допустимых значений управляющих параметров.

Поведение системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x, u, t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Если задан некоторый закон управления $u = u(t)$, то уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x, u(t), t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Считаем, что параметры объекта (2) таковы, что при любых начальных условиях $x(0) = x^0$ однозначно определяется решение системы (2), т.е. ее поведение.

Управление $u = u(t)$ называется *допустимым*, если оно кусочно-непрерывно для всех рассматриваемых $0 \le t \le T$ (из некоторого отрезка времени), кроме конечного числа моментов времени, в которых $u(t)$ может иметь разрывы первого рода, причем в каждый такой момент τ считаем

$$u(\tau)=u(\tau-0)=\lim_{\substack{t\to\tau\\ t<\tau}} u(t).$$

Целью управления является максимизация (минимизация) некоторого интегрального функционала от фазовой и управляющей траекторий:

$$\max\int_0^T f_0(x(t),u(t),t)\mathrm{d}t=\int_0^T f_0\left(x^*(t),u^*(t),t\right)\mathrm{d}t, \tag{3}$$

при этом $x(T)\geq x^T$, где x^T некоторый заданный вектор, $u^*(t)$ $\left(u^*(t)\in U\right)$ – оптимальное управление, $x^*(t)$ – соответствующая ему оптимальная траектория.

Обозначим $x_0(t)=\int_0^t f_0(x(t),u(t),t)\mathrm{d}t$. Тогда $\dfrac{\mathrm{d}x_0(t)}{\mathrm{d}t}=f_0(x,u,t)$, $x_0(0)=0$.

Для решения поставленной задачи введем сопряженные переменные $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, …, $\psi_n(t)$ и построим функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$H(\psi,x,u,t)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f_i(x,u,t), \tag{4}$$

где $\psi=\mathrm{col}\left(\psi_0;\psi_1;\ldots;\psi_n\right)$.

Сопряженной называют систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\ i=0,\ldots,n. \tag{5}$$

Правая часть (4) не зависит от x_0; поэтому $\dfrac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}t}=0$ и, значит, $\psi_0=\mathrm{const}$.

При определенных начальных условиях и заданном управлении $u(t)$ можно вначале найти однозначное решение системы (2), а затем найти решение сопряженной системы (5).

При постоянных ψ, x, t гамильтониан H является только функцией управляющего параметра $u\in U$. Обозначим

$$M(\psi, x, t) = \max_{u \in U} H(\psi, x, u, t).$$

Принцип максимума Понтрягина для задачи с интегральным критерием качества (3) формулируется следующим образом.

Если допустимое управление $u^*(t)$ оптимально в рассматриваемой задаче, то существует такое ненулевое решение $\psi(t)$ сопряженной системы, что выполняются условия:

1) при любом $t \in [0, T]$ гамильтониан $H(\psi(t), x(t), u, t)$ как функция переменной u достигает в точке $u^* = u^*(t)$ максимума, т.е.

$$H(\psi(t), x(t), u^*(t), t) = M(\psi(t), x(t), t);$$

2) в конечный момент времени T имеем $\psi(T) \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} \psi_i(t)[x_i(T) - x_i^T] = 0.$$

Кроме того ψ_0 равно нулю или единице (ведь $\psi_0 = \text{const}$). Если $\psi_0 = 0$, то $\psi(t) = \text{col}(\psi_0; \psi_1(t); \ldots; \psi_n(t)) \neq 0$ при всех t.

Отметим, что принцип максимума Понтрягина есть необходимое условие оптимальности. Вопрос о существовании допустимых (оптимальных) управлений каждый раз решается в соответствии с конкретной ситуацией.

2°. Односекторная модель оптимального экономического роста. Основное уравнение такой модели имеет вид

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - (\mu + \nu)k - c(t), \quad k(0) = k_0. \qquad (6)$$

Здесь

$k = \dfrac{K}{L}$ – фондовооруженность (L – число занятых, K – фонды);

$c(t) = \dfrac{C(t)}{L}$ – среднедушевое потребление ($C(t)$ – фонд непроизводственного потребления); ν, μ – экзогенные параметры, которые находятся в следующих границах: $-1 < \nu < 1$, $0 < \mu < 1$.

В качестве управляющего параметра системы (1) рассматривается удельное потребление $c(t)$. Считаем, что $c(t)$ – любая кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая граничному условию

$$0<\underline{c}\le c(t)\le f(k(t)), \tag{7}$$

где $\underline{c}$ – предельно допустимая нижняя граница удельного потребления.

Задача управляющего органа экономической системы – так управлять системой с помощью налогово-кредитной политики или директив, меняя $c(t)$, чтобы за длительный интервал времени дисконтированная полезность от потребления была бы наибольшей:

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}u(c(t))\,\mathrm{d}t\to\max, \tag{8}$$

где δ – параметр дисконтирования, с помощью которого будущие полезности приводятся к настоящему времени исходя из положения, что ближайшее потребление более важно чем отдаленное; $u(c)$ – функция полезности потребления.

Относительно функции полезности предполагается следующее: это положительно возрастающая функция с убывающей предельной полезностью $(u(c)>0, u'(c)>0, u''(c)<0)$, т.е. $u(c)$ – строго вогнутая монотонно возрастающая функция. Допустим еще, что $\lim\limits_{c\to 0}u'(c)=\infty$, $\lim\limits_{c\to\infty}u'(c)=0$.

Таким образом, *задача об оптимальном росте для односекторной замкнутой экономической системы с бесконечным горизонтом управления и положительной нормой дисконтирования* следующая:

$$\max_{\{c(t)\}}\int_0^\infty e^{-\delta t}u(c(t))\,\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}=f(k)-(\mu+\nu)k-c,\ k(0)=k_0, \tag{9}$$

$$0<\underline{c}\le c(t)\le f(k).$$

Такая задача является задачей оптимального управления, в которой единственным управляющим параметром является удельное потребление c, единственный фазовой координатой – фондовооруженность k, а целевой функционал – интеграл благосостояния. Решением этой задачи служит оптимальная пара $\{c^*(t), k^*(t)\}$, для которой благосостояние максимально.

3⁰. Решение задачи (9) с помощью принципа максимума Потрягина. Для упрощения задачи положим вначале $\underline{c} = 0$, а затем вернемся к этому ограничению.

В соответствии с принципом максимума строим гамильтониан

$$H = e^{-\delta t}\{u(c) + q[f(k) - \lambda k - c]\},$$

где q – сопряженная (двойственная) переменная $\psi_1(t) = e^{-\delta t}q(t)$, которую можно интерпретировать как теневую цену (приростных) фондов, $\lambda = \mu + \nu$. Таким образом, выражение в фигурных скобках – ценность удельного конечного выпуска ($u(c)$ – ценность той части, которая использована на непроизводственное потребление; $q[f(k) - \lambda k - c]$ – ценность той части, которая использована на расширение фондов). Умножением на $e^{-\delta t}$ эта ценность приведена к настоящему моменту времени.

Согласно принципу максимума оптимальное управление максимизирует гамильтониан в каждый момент времени, значит

$$\frac{\partial H}{\partial c} = [u'(c) - q]e^{-\delta t} = 0,$$

откуда

$$u'(c) = q. \qquad \mathbf{(10)}$$

Таким образом, теневая цена капитальных вложений вдоль оптимальной траектории равна предельной полезности.

Дифференциальное уравнение для сопряженной переменной записывается согласно (5) следующим образом:

$$\frac{\mathrm{d}\left(e^{-\delta t}q(t)\right)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial k},$$

поэтому

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -[f'(k) - (\lambda + \delta)]q. \qquad \mathbf{(11)}$$

Поскольку на оптимальной траектории выполняется соотношение (10), то, дифференцируя его, получим

$$\frac{dq}{dt} = u''(c)\frac{dc}{dt},$$

поэтому

$$\frac{\left(\dfrac{dq}{dt}\right)}{q} = \frac{u''}{u'}\frac{dc}{dt} = \frac{cu''}{cu'}\frac{dc}{dt} = \frac{-\sigma(c)\left(\dfrac{dc}{dt}\right)}{c}, \tag{12}$$

где $\sigma(c) = -\dfrac{cu''(c)}{u'(c)} > 0$ – эластичность предельной полезности, которая характеризует кривизну функции полезности.

Подставляя (11), (12) в (10) получаем

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{\sigma(c)}[f'(k) - (\lambda + \delta)]c,$$
$$\frac{dk}{dt} = f(k) - \lambda k - c, \ k(0) = k_0. \tag{13}$$

Найдем теперь стационарные траектории $c^* = \text{const}$, $k^* = \text{const}$ (для них $\dfrac{dc^*}{dt} = 0$, $\dfrac{dk^*}{dt} = 0$), удовлетворяющие (13):

$$f'(k^*) = \lambda + \delta, \ c^* = f(k^*) - \lambda k^*. \tag{14}$$

Как следует из (14), такие траектории существуют, единственны и удовлетворяют следующему неравенству: $0 < c^* < f(k^*)$. Это траектория сбалансированного роста, причем выпуск, инвестиции, потребление растут одинаковыми темпами, равными темпу роста трудовых ресурсов.

Уравнения (13) с начальным условием $k(0) = k_0$ определяют траектории, среди которых находятся и оптимальные $k^*(t)$ и $c^*(t)$, при этом

$$\lim_{t\to\infty} c^*(t) = c^*, \ \lim_{t\to\infty} k^*(t) = k^*. \tag{15}$$

Докажем последнее утверждение для случая, когда $u(c) = c$ и $\underline{c} \le c(t) \le f(k(t))$. Тогда гамильтониан H примет вид

$$H = e^{-\delta t}\{(1-q)c + q[f(k) - \lambda k]\}. \tag{16}$$

Так как H в этом случае линейно зависит от c, то его максимум по c зависит от знака $(1 - q)$ и достигается при следующем релейном изменении c:

$$c^*(t) = \begin{cases} \underline{c}, & q > 1, \\ c(t), & q = 1, \\ f(k(t)), & q < 1, \end{cases} \tag{17}$$

причем значение $c(t)$ при $q = 1$ будет уточнено ниже.

Как следует из (11), канонические уравнения для прямой и сопряженных переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = f(k) - \lambda k - c, \quad k(0) = k_0, \\ &\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -[f'(k) - (\lambda + \delta)]q, \end{aligned} \tag{18}$$

и именно из участков решений этих уравнений состоят оптимальные траектории.

Из (18) находим стационарные точки (при $\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t} = 0$):

$$f'(k^*) = 1 + \delta, \quad c^* = f(k^*) - \lambda k^*, \quad q^* = 1, \tag{19}$$

причем $q^* = 1$ вытекает из двух условий: с одной стороны, $q^* = \mathrm{const}$, так как $\frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t} = 0$, а, с другой стороны, $c^* \neq \underline{c}$, $c^* \neq f(k^*)$, поэтому согласно (17) $q^* = 1$. Решение первого из уравнений (19) существует, поскольку $f'(0) = \infty$ и $f''(k) < 0$. Добавок δ в первом уравнении (19) можно рассматривать как плату за будущее.

Иследуем при $\underline{c} < c^*$ поведение оптимальных траекторий $k^*(t)$, $q^*(t)$ в плоскости фазовой и сопряженной переменных (k, q), точнее, в первом квадранте этой плоскости $k \geq 0$, $q \geq 0$. Используемые дальше стационарные оптимальные значения фондовооруженности k^* и удельного потребления c^* определяются из (19).

1. Вначале рассмотрим область $q > 1$. Здесь $c^*(t) = \underline{c}$, поэтому первое уравнение (18) запишется так:

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = f(k) - \lambda k - \underline{c}, \quad k(0) = k_0 \qquad \mathbf{(20)}$$

Его траектории имеют разный вид при $k_0 < k_1$, $k_0 > k_1$, где k_1 – меньший корень уравнения $f(k) - \lambda k - \underline{c} = 0$, причем $k_1 < k^*$, поскольку $\underline{c} < c^*$. При $k_0 < k_1$ фондовооруженность убывает и, следовательно, удаляется от стационарного значения k^*, а при $k_0 > k_1$ – возрастает и поэтому приближается к стационарному значению k^*.

Итак, при $k_1 < k_0 < k^*$ решение уравнения (20) $k^*(t)$ непрерывно возрастает, пока не достигнет в точке t_1^* стационарного значения $k^*(t_1^*) = k^*$. Кроме того, при $k_1 < k < k^*$ согласно второму уравнению (18) $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} < 0$, т.е. q монотонно убывает $(q > 1)$, поэтому и при $t = t_1^*$ значение $g^*(t_1^*) = q^* = 1$, и в (17) значение $c^*(t)$ при $q^* = 1$ надо заменить на $c^* = f(k^*) - \lambda k^*$.

Если $k_0 > k^*$, то согласно второму уравнению (18) $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} > 0$, поэтому q удаляется от стационарного значения $q^* = 1$, т.е. нет сходимости траекторий к стационарным.

2. Рассмотрим теперь область $q < 1$. Здесь $c^*(t) = f(k(t))$, т.е. на потребление работают все фонды (нет ни расширения, ни даже восстановления фондов), при этом первое уравнение (18) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = -\lambda k, \quad k(0) = k_0,$$

т.е. $k^*(t) = k_0 e^{-\lambda t}$. Следовательно, фондовооруженность уменьшается $(k_0 \geq k^*)$ до тех пор, пока не достигнет в точке $t = t_1^*$ стационарного уровня $k_0 e^{-\lambda t} = k^*$, q при этом возрастает (так как $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} > 0$ при $k > k^*$), пока не достигнет при $t = t_1^*$ стационарного уровня $q^* = 1$, при этом $c^*(t_1^*) = c^*$. Если же $k_0 < k^*$, то нет сходимости к стационарным траекториям.

На рис. 20.1 и 20.2 показаны оптимальные траектории фондовооруженности и удельного потребления для тех случаев, когда имеет место сходимость к стационарным траекториям.

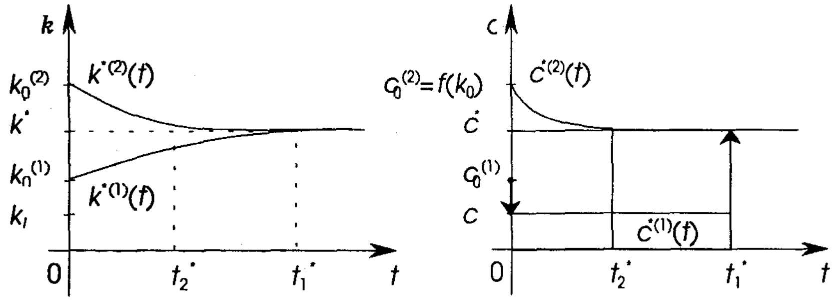


Рис. 20.1 **Рис. 20.2**

Таким образом, получаем следующую картину оптимального управления. При $q > 1$, $k_L < k_0 < k^*$ фондовооруженность непрерывно растет за счет того, что удельное потребление удерживается на предельно низком уровне. Как только в момент t_1^* фондовооруженность достигает стационарного значения, система переходит на стационарный режим: имеет место такое воспроизводство, которое позволяет поддерживать фондовооруженность на стационарном уровне k^*; удельное потребление постоянно и равно $f(k^*) - \lambda k^*$, $q^* = 1$. При $q < 1$, $k_0 > k^*$ в фонды не поступает никаких вложений, поэтому фондовооруженность сокращается за счет износа и за счет увеличения числа занятых по закону $k^*(t) = k_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda = \mu + \nu$, потребление также сокращается по закону $c^*(t) = f(k_0 e^{-\lambda t})$ пока фондовооруженность не достигнет в момент t^* стационарного значения k^*, после чего система входит в стационарный режим. Во всех остальных случаях система не достигает стационарного режима.

✍ *Задание для самостоятельной работы*

1. Исследовать детально задачу (9) в случае, когда $u(c) = c$, $\underline{c} = 0$, а $f(k) = Ak^\alpha$, где A – коэффициент нейтрального технического прогресса, α – коэффициент эластичности по труду.

■ Лекция 21

Многокритериальные задачи оптимизации в экономике

Даны понятия многокритериальной задачи оптимизации и оптимальности по Парето; рассмотрен ящик Эджворта.

1°. Понятие многокритериальной задачи оптимизации. Напомним, что рассматриваемые ранее задачи математического программирования формулировалась так: найти точки $x^* \in X$, доставляющие экстремум (максимум или минимум) функции $z = f(x)$.

Здесь X – множество допустимых значений, а $f(x)$ выражает зависимость единственного критерия оптимальности от принимаемого решения x и роль лица, которое принимает решение (ЛПР), заключается в описании множества X и целевой функции $f(x)$.

В многокритериальной задаче оптимизации имеется несколько целевых функций $z_1 = f_1(x), \ldots, z_m = f_m(x)$, которые достигают своих максимальных значений в различных точках допустимого множества X. В этом случае ЛПР нужно не только описать допустимую область X, задать целевые функции, но и указать принцип окончательного решения. Значит в решении подобного рода задач существенно возрастает роль субъективного фактора, т.е. роль ЛПР.

▷ ***Пример 1.*** Для выпуска двух видов продукции используется три вида ресурсов. Известна матрица норм расхода A, цены Q на ресурсы, цены реализации P продукции и запасы B ресурсов:

$$A = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 31 \end{pmatrix}, \quad Q = (1; \quad 2; \quad 3), \quad P = (14; \quad 10), \quad B = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Если планируется произвести x единиц продукции, то стоимость потребных ресурсов QAX, предполагаемая выручка Px и тогда прибыль $w = Px - QAx$.

Желая добиться максимума выручки и прибыли одновременно, получаем следующую задачу оптимизации с двумя целевыми функциями:

$$Px \to \max,$$
$$(P - QA)x \to \max,$$
$$Ax = b,\ \ x \geq 0$$

или в развернутой форме

$$z_1 = 14x_1 + 10x_2 \to \max,$$
$$z_2 = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 20,$$
$$x_1 + x_2 \leq 15,$$
$$3x_1 + x_2 \leq 39,$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0.$$

Изобразим допустимое множество X графически (рис. 21.1). Оно представляет собой пятиугольник $OABCD$ и, значит, максимумы обеих функций достигаются в какой-либо из точек (вершин) A, B, C, D.

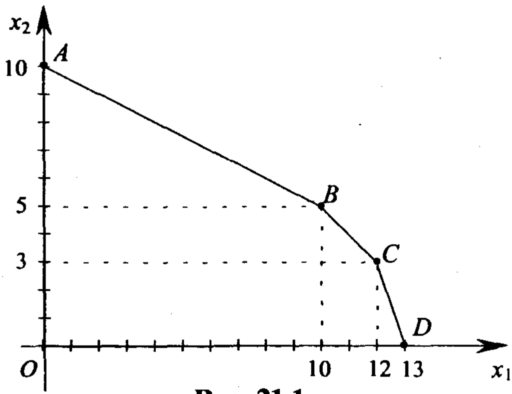


Рис. 21.1

Составим таблицу:

Вершина	$A(0;10)$	$B(10;5)$	$C(12;3)$	$D(13;0)$
z_1	100	190	198	182
z_2	30	35	33	26

Из таблицы видно, что максимальное значение $z_1 = 198$, а соответствующее ему оптимальное решение $C(12; 3)$; максимальное значение $z_2 = 35$ и ему соответствует оптимальное решение $B(10; 5)$.

Окончательный выбор наилучшего решения за ЛПР. □

2⁰. Оптимальность по Парето. Понятие оптимальности по Парето является одним из наиважнейших в экономической теории. Рассмотрим многокритериальную задачу оптимизации с m целевыми функциями $z_1, \ldots, z_m$ и допустимым множеством X.

Принцип доминирования. Пусть x^1, x^2 – два допустимых решения. Скажем, что x^1 доминирует x^2, если $z_i(x^1) \geq z_i(x^2)$ для всех $i = \overline{1,m}$ и найдется такое k $(1 \leq k \leq m)$, что $z_k(x^1) > z_k(x^2)$.

Если x^1 доминирует x^2, то ни при каком разумном подходе x^2 нельзя признать наилучшим решением?

Решение x^* называется *недоминируемым*, если нет решения x, которое доминировало бы x^*.

Значит, наилучшее решение нужно искать среди недоминируемых.

Множество недоминируемых решений называется *множеством Парето* или *множеством оптимальности по Парето.*

Таким образом, в многокритериальной задаче оптимизации наилучшее решение следует искать во множестве Парето.

▷ ***Пример 2.*** Рассмотрим в плоскости Oxy множество X, изображенное на рис. 21.2, и считаем, что два игрока играют в следующую игру. Партия игры состоит в том, что они указывают совместно пару чисел $\{x_1, x_2\}$. Если точка $\mathrm{col}(x_1; x_2) \in X$, то первый игрок получает сумму x_1, а второй – x_2. Затем играется следующая партия и т.д. Каждый из игроков хочет выиграть как можно больше, но для этого они вынуждены взаимодействовать и играть совместно, обдумывая свои ходы.

Ясно, что точка $\mathrm{col}(x_1'; x_2')$ доминирует точку $\mathrm{col}(x_1; x_2)$, если $x_1' \geq x_1$ и $x_2' > x_2$ или $x_1' > x_1$ и $x_2' \geq x_2$. Из рис. 21.2 видно, что для такого множества X множество Парето есть ломаная CPE. □

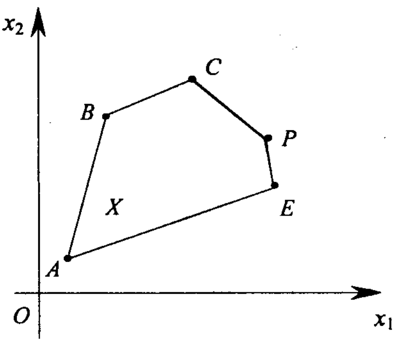


Рис. 21.2

▷ *Пример 3.* Найти множество Парето в задаче из примера 1.

Решение. В случае линейных целевых функций для проверки, что точка $A \in X$ будет оптимальной по Парето, нужно через эту точку провести прямые L_1, L_2, перпендикулярные соответственно градиентам целевых функций, т.е. векторам $\operatorname{col}(14;10)$ и $\operatorname{col}(2;3)$. Каждая такая прямая разбивает плоскость Ox_1x_2 на две полуплоскости. Пусть L_1^+ и L_2^+ – те полуплоскости, которые расположены от своих прямых в направлении соответственных градиентов. Если $L_1^+ \cap L_2^+$ пересекается с допустимым множеством X только по исследуемой точке, то она – оптимальная по Парето. Поэтому, в данной задаче множество Парето есть отрезок BC. □

3°. Модель обмена, цены. Рассмотрим полностью натуральный рынок, где нет денег и куда люди приходят со своими товарами на обмен (период сильной инфляции или военное время). Все ходят по рынку, как бы что поменять. Ясно, что такие обмены могут оказаться выгодными обеим меняющимся сторонам. Подчеркнем, что вначале люди ходят и присматриваются, прицениваются, обговаривают условия обмена, но обмена пока не совершают, т.е. происходит, таким образом, обмен информацией. При этом условия сделок, вообще говоря, меняются. Но вот ближе к закрытию рынка все более или менее уже утрясается и условия сделок перестают меняться. Тогда совершаются все сделки, и люди расходятся.

Еще раз подчеркнем, что каждый совершает обмены исключительно в соответствии со своей системой предпочтений. Эти системы предпочтений или функции полезностей участников обмена и задают критерии оптимизации. Если u_i – функция полезности i-го участника, то получаем n-критериальную задачу оптимизации, к которой применимо понятие оптимальности по Парето.

Ясно, что окончательное распределение оптимально по Парето по этим критериям и ни для одного участника оно не хуже первоначального.

Математически доказано, что обязательно сложится такая система цен, что если каждый участник продаст свой первоначальный набор вещей по этим ценам, то на вырученные деньги он купит набор, являющийся наилучшим в смысле его системы предпочтений.

Далее ограничимся только двумя участниками обмена с двумя видами товаров.

Пусть u_i – функция полезности i-го участника, $i=\overline{1,2}$, а w_j – количество j-го товара у обоих участников. Обозначим $x=\mathrm{col}\,(x_1;x_2)$ – собственность первого, тогда остальное количество товаров $(w-x)=\mathrm{col}\,(w_1-x_1;w_2-x_2)$ находится у второго. Если $x^0=\mathrm{col}\,(x_1^0;x_2^0)$ – начальная собственность первого, то $(w-x^0)$ есть начальная собственность второго.

Если все эти данные изобразить в системе координат Ox_1x_2, то как раз получится так называемый *ящик Эджворта*. Любая точка $\mathrm{col}\,(x_1;x_2)$ соответствует распределению товаров: столько у первого и остальное $\mathrm{col}\,(w_1-x_1;w_2-x_2)$ – у второго. Сплошные кривые линии – это кривые безразличия первого (линии уровня его функции полезности), пунктирные линии обозначают кривые безразличия второго (рис. 21.3).

Ящик Эджворта дает возможность ответить на вопрос: каково конечное распределение, т.е. после всевозможных обменов, для данного начального.

Из рис. 21.3 видно, что точка B доминирует A, так как $u_1(B)>u_1(A)$ и $u_2(B)>u_2(A)$. Поэтому понятно, что если состояние участников есть точка $A(a_1;a_2)$, то они охотно перейдут в точку $B(b_1;b_2)$

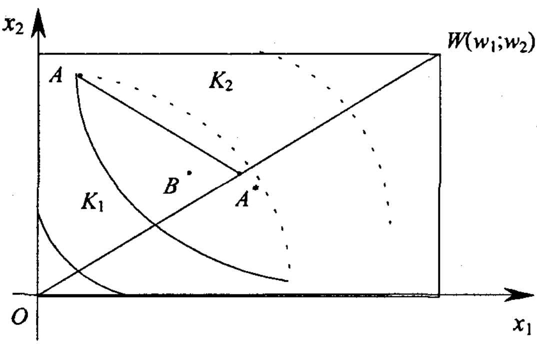


Рис. 21.3

– для этого первый отдаст второму $a_2 - b_2$ единиц второго товара в обмен на $b_1 - a_1$ единиц первого товара.

Значит, если начальное состояние участников есть точка A, то конечным состоянием эта точка быть не может, так как из теории известно, что окончательное распределение оптимально по Парето.

Естественно возникает задача нахождения оптимальных по Парето точек в этом ящике Эджворта, которую можно решать следующим образом.

Рассмотрим произвольную точку C. Пусть $V_1(C) = \{K : u_1(K) \geq u_1(C)\}$ и $V_1^+(C) = \{K : u_1(K) > u_1(C)\}$, $V_2(C) = \{K : u_2(K) \geq u_2(C)\}$ и $V_2^+(C) = \{K : u_2(K) > u_2(C)\}$. Очевидно следующее

Утверждение 1.

Точка C оптимальна по Парето, если и только если оба множества $V_1^+(C) \cap V_2(C)$, $V_1(C) \cap V_2^+(C)$ пусты.

Если функции полезности дифференцируемы, то имеет место

Утверждение 2.

Точка C является оптимальной по Парето, если кривые безразли-

чия участников, проведенные через эту точку, имеют общую касательную.

Это утверждение примем без доказательства и используем его для решения примеров.

▷ ***Пример 4.*** Пусть участники имеют одинаковые функции полезности $u_1(x_1,x_2)=u_2(x_1,x_2)=x_1x_2$. Найти множество Парето и указать, как находить конечное распределение.

Решение. Ясно, что кривые безразличия участников, проведенные через точку $D(a;\ b)$, имеют общую касательную тогда и только тогда, когда нормальные векторы к этим кривым коллинеарны. Нормальный вектор к кривой $\varphi(x_1,x_2)=C$ будет

$$\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{col}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1};\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right).$$

Кривая безразличия первого участника, проходящая через точку D, задается уравнением $x_1x_2=c_1$, где $c_1=ab$; соответствующая кривая второго участника имеет уравнение $(w_1-x_1)(w_2-x_2)=c_2$, где $c_2=(w_1-a)(w_2-b)$.

Нормальный вектор к первой кривой есть $\operatorname{col}(x_1;x_2)$, ко второй – $\operatorname{col}(-(w_1-x_1);-(w_2-x_2))$, а в точке D соответственно $\operatorname{col}(a;b)$ и $\operatorname{col}(-(w_1-a);-(w_2-b))$. Из условия их коллинеарности получаем $\frac{b}{a}=\frac{(w_2-b)}{(w_1-a)}$ или $\frac{b}{a}=\frac{w_2}{w_1}$, т.е. все точки, оптимальные по Парето, расположены на отрезке, соединяющем начало координат с точкой $W(w_1;w_2)$ (рис. 21.3).

Значит, если x^0 – начальное распределение, то окончательное распределение, как правило, не единственно и множество конечных распределений находится так: проведя через точку начального состояния x кривые безразличия участников K_1 и K_2, получаем "линзу" K_1K_2. Пересечение этой линзы с отрезком OW и есть для заданного начального распределения множество возможных конечных распределений.

Отметим, что в математической теории доказано также следующее: если x^0 – начальное распределение первого участника, а $(w-x^0)$ – второго, то сложатся такие цены $p=\mathrm{col}(p_1;p_2)$, что начальное и конечное y распределение связаны соотношением $p'x^0=p'y$. Такое состояние называют *равновесным*, а соответствующие ему цены – *равновесными*.

Пусть в данном примере 4 для начального распределения x^0 цены равновесия p, y – точка равновесия. Тогда первый имеет доход $z_1=p'x^0$ и в пределах этого дохода "купит" (обменяет) себе конечное распределение y. Значит, конечное распределение y должно быть точкой спроса функции полезности u_1 (отношение предельной полезности товара к его цене есть величина постоянная) при ценах p и доходе z_1. В частности, имеем $\frac{p_1}{p_2}=\frac{y_2}{y_1}$. Но для конечного распределения должно выполняться $\frac{y_2}{y_1}=\frac{w_2}{w_1}$. Поэтому $\frac{p_1}{p_2}=\frac{w_2}{w_1}$ или $p_1w_1=p_2w_2$. Таким образом, равновесные цены в данном случае обратно пропорциональны общему количеству товара на рынке, т.е. равновесные цены обеспечивают равенство стоимостей товаров на рынке.

Так как $\frac{p_1}{p_2}=\frac{w_2}{w_1}$, то для данного начального состояния (точка A) конечное состояние находим так: проводим через точку A прямую линию, параллельную второй диагонали. Пересечение этой линии с первой диагональю и есть искомое конечное равновесное состояние (точка A^*). □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Для двухкритериальной задачи

$$x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 8,$$

$$8x_1 + 3x_2 \le 24,$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

найти оптимальное решение по первому критерию, при уровне притязаний по второму в 0.7 от его максимума на допустимом множестве.

2. Исследовать ящик Эджворта для следующих пар функций полезности:

а) $u_1(x_1, x_2) = u_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$;

б) $u_1(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$, $u_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

■ Лекция 22

Основные понятия теории вероятностей

Рассматриваются предмет теории вероятностей, события и действия над ними; даются определения вероятности и элементы комбинаторики.

1°. Предмет теории вероятностей. Большое количество явлений и фактов, встречающихся в повседневной жизни, имеют случайную природу. Например, появление герба при бросании монеты является случайным событием, однако, при многократном бросании монеты выясняется, что примерно в половине случаев выпадает герб. Когда рассматриваются массовые количества однородных явлений или фактов, то вскрываются определенные закономерности. Изучение этих закономерностей и составляет предмет *теории вероятностей* и основанной на ней *математической статистики*. При этом изучаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы, что дает возможность использования определенного математического аппарата. Установленные общие закономерности и положения могут применятся к широкому классу явлений.

2°. Случайные события и соотношения между ними. Первичным понятием теории вероятностей является понятие *события*. Описательное понятие события заключается лишь в том, что это некоторое явление, которое может произойти или не произойти при выполнении определенного комплекса условий G. События обозначаются буквами A, B, C; $\mathcal{B}$ – множество всех событий, возникающих при выполнении комплекса условий G. Среди событий из $\mathcal{B}$ выделяют $\varnothing$ – *невозможное событие*, которое заведомо не происходит, и Ω – *достоверное событие*, которое происходит всегда. Рассмотрим простой пример. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – множество чисел k, из которых каждое соответствует цифре k, выпадающей при бросании игральной кости. Тогда событиями будут любые подмножества Ω, например, $A=\{1\}$ – выпадение цифры 1, $B=\{2,4,6\}$ – выпадение четной цифры и т.д. При этом Ω является достоверным событием. Если $\Omega=\bigcup_{\alpha}\omega_{\alpha}$, где события ω_{α} уже не представимы в виде суммы некоторых событий, то ω_{α} называются *элементарными событиями.* В приведенном примере $\Omega=\bigcup_{k=1}^{6}\omega_{k}$, где ω_{k} – выпадение цифры k.

Введем операции над событиями. *Суммой событий* $C=A\cup B$ называется такое событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит или событие A или событие B. *Произведением событий* $A\cap B$ называется такое событие C, которое происходит тогда, когда происходит и событие A и событие B. Если $A\cap B=\varnothing$, то говорят, что A и B *несовместные события. Разностью событий* $C=A\setminus B$ называется событие C, которое происходит тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B. *Дополнением* к событию A называется событие $\overline{A}=\Omega\setminus A$, т.е. которое происходит лишь тогда, когда не происходит событие A. Если появление события A влечет за собой появление события B, то говорят, что A содержится в B. Если $A\subset B$ и $B\subset A$, то $A=B$. Рассматривая элементарные события ω_{α}, получим, что если $\omega_{\alpha}\in A\to\omega_{\alpha}\in B$.

При решении задач, относящихся к событиям, полезно использовать графические представления операций над множествами, изображенные на рис. 22.1.

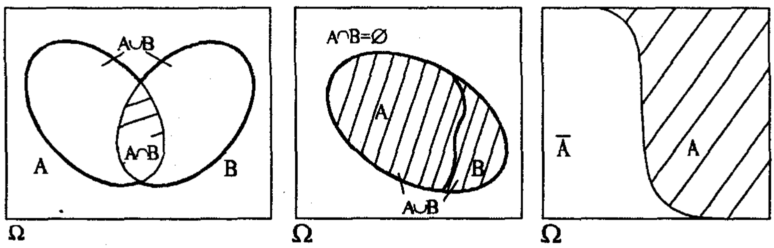


Рис. 22.1

▷ ***Пример 1.*** Доказать, что $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Решение. Пусть $\omega \in \overline{A \cup B}$, тогда $\omega \notin A \cup B \to \omega \notin A$ и $\omega \notin B \to \omega \in \overline{A}$ и $\omega \in \overline{B} \to \omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$, значит, $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. С другой стороны, если $\omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$, то $\omega \in \overline{A}$ и $\omega \in \overline{B} \to \omega \notin A$ и $\omega \notin B \to \omega \notin A \cup B \to \omega \in \overline{A \cup B}$, значит, $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. □

3°. Частота и вероятность. Пусть при проведении N испытаний некоторое событие A появилось m раз. Отношение $\frac{m}{N}$ называется *частотой события* A. Многочисленные эксперименты такого рода показывают, что при большом N это отношение остается примерно постоянным. На этом факте основано *статистическое определение вероятности*, которое заключается в том, что за вероятность принимается постоянная величина, вокруг которой колеблются значения частот при неограниченном возрастании числа N.

Если число элементарных событий n конечно и они равновозможны, то говорят о *классическом определении вероятности*. Если $A = \bigcup_{k=1}^{m} \omega_k$, то за вероятность события A принимается число

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Другими словами, *вероятность события* A равна отношению числа исходов, благоприятствующих появлению события, к числу всех исходов данного эксперимента. Из определения вероятности следует, что $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$ и $0 \le P(A) \le 1$.

4°. Элементы комбинаторики. При решении дискретных вероятностных задач постоянно приходится иметь дело с выбором из некоторого множества объектов подмножества элементов с заданными свойствами. Такие задачи выбора называются *комбинаторными*.

Сформулируем основное правило комбинаторики – *правило умножения*: если некоторый выбор A можно осуществить n различными способами, а для каждого из этих способов некоторый другой выбор B можно сделать m способами, то выбор A и B (с указанным порядком) можно сделать nm способами.

Множество называется *упорядоченным*, если для любых двух его элементов a и b определено отношение порядка $a \le b$ или $b \le a$. Каждое множество можно упорядочить различными способами. Когда в одном и том же множестве определяется разными способами отношение порядка, то получаются разные упорядоченные множества. Например, из множества, состоящего из трех элементов $A = \{a,b,c\}$ можно получить 6 различных упорядоченных множеств: $A_1 = \{a,b,c\}$, $A_2 = \{a,c,b\}$, $A_3 = \{b,a,c\}$, $A_4 = \{b,c,a\}$, $A_5 = \{c,a,b\}$, $A_6 = \{c,b,a\}$.

Пусть некоторое множество содержит n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется *размещением из n элементов по k*. Через A_n^k обозначают число всех таких размещений из n элементов по k элементов. Первый элемент k-элементного подмножества можно выбрать n способами, второй $(n-1)$ способами и т.д. Пользуясь правилом умножения, получаем

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)). \qquad \textbf{(2)}$$

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначим $n!$, т.е.

$$n! = 1\cdot 2\cdot\ldots(n-1)\cdot n\,. \qquad \textbf{(3)}$$

Используя это обозначение, имеем

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad \textbf{(4)}$$

при этом, считая $0! = 1$, заключаем, что формула (4) справедлива также при $k = 0$ и $k = n$.

Размещение из n элементов по n элементов называется *перестановкой из элементов*. Так как каждая перестановка содержит все элементы множества, то разные элементы отличаются друг от друга только порядком элементов. Количество всех перестановок из n элементов равно

$$P_n = A_n^n = n!\,. \qquad \textbf{(5)}$$

Пусть задано множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется *сочетанием из n элементов по k элементов*. Число всех сочетаний из n

n элементов по k элементов. Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k. Образуем все возможные неупорядоченные подмножества, которые содержат k элементов. Их количество есть C_n^k. Из каждого полученного подмножества сделаем все упорядоченные множества, которых будет в $k!$ раз больше, так как каждое множество, состоящее из k элементов можно упорядочить $k!$ способами. Таким образом, $A_n^k = C_n^k k!$, откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \qquad (6)$$

Приведем две полезные формулы для вычисления числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \quad C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (7)$$

▷ ***Пример 2.*** Три товарища независимо друг от друга возвращаются из дачи электричкой, содержащей 8 вагонов. Какова вероятность, что они окажутся в разных вагонах?

Решение. Согласно классическому определению вероятности $P = \frac{m}{n}$. Находим $n = 8^3$ и $m = A_8^3$, тогда $P = \frac{A_8^3}{8^3} = \frac{21}{32}$. □

▷ ***Пример 3.*** Из колоды 52 карт наугад извлекаются 4 карты. Какова вероятность, что они окажутся одной масти?

Решение.

$$P = \frac{m}{n}, \ n = C_{52}^4, \ m = 4 \cdot C_{13}^4, \ P = \frac{4 \cdot C_{13}^4}{C_{52}^4} = \frac{11}{4165}. \ \square$$

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Показать, что $A \cup B = \Omega \setminus \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

2. Трое товарищей садятся в лифт 9-этажного дома. Какова вероятность того, что они выйдут на разных этажах?

3. За круглым столом рассаживаются 12 человек, среди которых 6 мужчин и 6 женщин. Какова вероятность того, что за столом мужчины будут чередоваться с женщинами?

4. В партии из 100 изделий содержится 12 бракованных. Наугад выбираются 3 изделия. Какова вероятность того, что среди них окажется одно бракованное?

■ Лекция 23

Геометрическая вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей, условная вероятность

Дано определение геометрической вероятности; рассмотрены теоремы сложения и умножения вероятностей, независимость событий.

1°. Геометрическая вероятность. В тех случаях, когда пространство элементарных событий Ω содержит бесконечно много элементарных событий, часто возникает понятие *геометрической вероятности*, которое заключается в следующем.

Достоверным событием (пространством элементарных событий) является некоторая область Ω в n-мерном пространстве. Событиями являются подмножества $A \subset \Omega$, а их вероятности определяются как отношение объемов

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}. \qquad (1)$$

Заметим, что при этих определениях $0 \le P(A) \le P(\Omega) \le 1$, и если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$.

▷ ***Пример 1. Задача о встрече.*** Два товарища договорились встретиться в промежутке одного часа, причем каждый из них, приходя на встречу, ожидает второго не более 20 минут. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Решение. Пусть t_1 момент прихода одного из партнеров, t_2 – второго. В качестве Ω возьмем единичный квадрат в плоскости $(t_1; t_2)$ (рис. 23.1).

Событием является любая область, содержащаяся в Ω, а вероятность события A есть площадь области

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{S(A)}{1} = S(A).$$

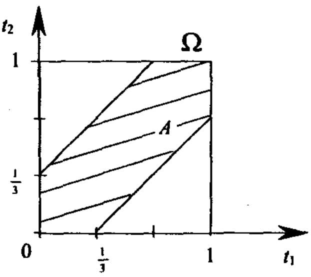


Рис. 23.1

Условие встречи задается неравенством $|t_1 - t_2| < \frac{1}{3}$, которое определяет область A, заштрихованную на рисунке. Тогда

$$P(A) = S(A) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}. \ \square$$

2°. Теорема сложения. Найдем вероятность суммы событий, используя классическое определение вероятности. Пусть в результате некоторого эксперимента, состоящего из n исходов, событию A благоприятствуют m_1 исходов, а событию B – m_2 исходов. Если при этом одновременному появлению событий A и B благоприятствуют k исходов, то, очевидно, событию $A \cup B$ будут благоприятствовать $m_1 + m_2 - k$ исходов. Тогда $P(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2 - k}{n}$. Так как $P(A) = \frac{m_1}{n}$, $P(B) = \frac{m_2}{n}$ и $P(A \cap B) = \frac{k}{n}$, то получим формулу

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{2}$$

Если события A и B несовместны, то из (2) получим *теорему сложения*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \tag{3}$$

т.е. для несовместных событий вероятность суммы событий равна сумме вероятностей.

Так как $A \cup \overline{A} = \Omega$ и $A \cap \overline{A} = \varnothing$, то $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$ и $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

▷ ***Пример 2.*** Из группы студентов 10 % знают английский язык, 5 % – французский и 1 % оба языка. Какова вероятность того, что наугад выбранный студент не знает ни одного иностранного языка?

Решение.

$$P = 1 - (0.1 + 0.05 - 0.01) = 0.86. \quad \square$$

3⁰. Условная вероятность. На практике часто возникают ситуации, когда заранее известно, что некоторое событие B произошло. В этом случае B становится достоверным событием, а вероятности всех событий некоторым образом меняются. Тогда говорят об *условных вероятностях*, $P(A/B)$ – вероятность события A при условии, что B произошло. Пусть имеется всего n исходов, из них m исходов благоприятствуют появлению события B, а k исходов благоприятствуют появлению события $A \cap B$ (рис. 23.2).

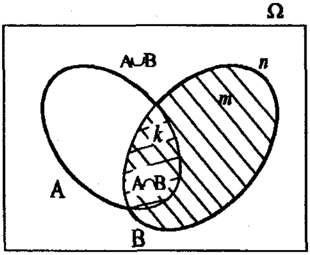


Рис. 23.2

Если B произошло, то количество всех возможных исходов будет равно m, из них благоприятствующих событию A будет k исходов. Поэтому

$$P(A/B) = \frac{k}{m} = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Получаем формулу для вычисления условных вероятностей:

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \qquad (4)$$

Эта формула справедлива, если $P(B)\neq 0$, так как если $P(B)=0$, то нет никакого смысла говорить о том, что B произошло.

Из (4) находим

$$P(A\cap B)=P\left(A/B\right)\cdot P(B). \qquad (5)$$

Очевидно, что в силу симметрии

$$P(A\cap B)=P\left(B/A\right)\cdot P(A).$$

Если $P\left(A/B\right)=P(A)$, то говорят, что события A и B *независимы*. В этом случае

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B), \qquad (6)$$

и мы получаем **теорему умножения вероятностей**: *если события A и B независимы, то вероятность произведения событий равна произведению вероятностей.*

▷ ***Пример 3.*** Среди изделий, выпускаемых заводом, 5 % бракованных, из работоспособных изделий 95 % соответствуют ГОСТу. Какова вероятность того, что наугад взятое изделие будет удовлетворять требованиям ГОСТа?

Решение. Пусть A – событие, заключающееся в том, что изделие удовлетворяет ГОСТу, B –изделие работоспособное. Тогда требуемая вероятность будет равна

$$P(A\cap B)=P\left(A/B\right)\cdot P(B)=0.95(1-0.05)=0.9025. \ \square$$

▷ ***Пример 4.*** При приеме сообщений каждый символ искажается с вероятностью 0.01. Какова вероятность того, что слово из 5 букв будет передано правильно?

Решение. Считая передачи сигналов независимыми событиями, получим, используя теорему умножения вероятностей,

$$p=(1-0.01)^5=0.951. \ \square$$

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Цена единицы продукта первого вида колеблется на рынке в пределах 1.5 - 2 у.е., а второго вида – в пределах 3 - 5 у.е. Покупатель желает приобрести два вида продуктов. Какова вероятность того, что ему придется платить не более 6 у.е.?

2. Игрок в спортлото 6 из 36 выигрывает, если при зачеркивании 6 клеток из 36, имеющихся в карточке, он угадывает 3, 4, 5 или 6 номеров. Найти вероятность выигрыша одной отмеченной карточки.

3. Из колоды в 36 карт вытаскиваются 2 карты. Какова вероятность того, что первая будет черной масти, а вторая – красной?

4. Студент знает 25 из 30 вопросов первой части предмета и 20 из 30 второй части. На экзамене были заданы два вопроса из первой части и один вопрос из второй. Какова вероятность того, что он ответит на все вопросы?

5. Фирма № 1 может потерпеть крах в течение года в результате действий конкурентов с вероятностью 0.1; фирма № 2 за это же время может обанкротиться с вероятностью 0.2. Операции обеих фирм производятся независимо друг от друга. Найти вероятность того, что в конце года обе фирмы будут функционировать нормально.

■ Лекция 24

Испытания Бернулли. Формулы полной вероятности и Байеса

Рассмотрены формулы Бернулли, полной вероятности, Байеса.

1°. Формула Бернулли. Пусть имеется n независимых испытаний, в каждом из которых появляется событие A с вероятностью p и $\overline{A}$ – с вероятностью q, $p+q=1$. Такие испытания называются *испытаниями Бернулли*. Если происходит событие A, то говорят, что *имеет место успех*. Найдем $P_n(m)$ – вероятность m успехов из n испытаний.

Каждый исход испытаний можно представить последовательностью $\omega_i = \left\{\underbrace{A\ldots A}_{m}\underbrace{\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-m}\right\}$, в которой содержится ровно m событий A и $(n-m)$ событий $\overline{A}$. Число таких последовательностей равно числу способов выбрать m элементов из n элементов, не отличающихся порядком, т.е. числу сочетаний C_n^m. Вероятность появления каждой такой последовательности, ввиду независимости испытаний, равна произведению вероятностей, т.е. $p^m q^{n-m}$. Так как события ω_i несовместны, то по теореме сложения получим, что

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1)$$

Эта формула носит название *формулы Бернулли*.

▷ ***Пример 1.*** Завод выпускает изделия, из которых 5 % являются бракованными. Для проверки взяты 5 изделий. Какова вероятность того, что среди них окажется не менее двух бракованных?

Решение. Будем считать успехом, если изделие бракованное. Тогда вероятность успеха $p=\frac{1}{20}$, а $q=\frac{19}{20}$. Можно считать, что имеются $n=5$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Пусть μ – число успехов, а B – событие, состоящее в том, что $\mu \geq 2$. Требуется найти вероятность $P(B) = P(\mu \geq 2)$. Получаем

$$P(\mu \geq 2) = 1 - P(\mu < 2) = 1 - P(\mu = 0, \mu = 1) = 1 - [P(\mu = 0) + P(\mu = 1)] =$$
$$= 1 - P_5(0) - P_5(1) = 1 - C_{10}^{0}\left(\frac{1}{20}\right)^{0}\left(\frac{19}{20}\right)^{5} - C_{10}^{1}\left(\frac{1}{20}\right)^{1}\left(\frac{19}{20}\right)^{4} =$$
$$= 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{5} - 10 \cdot \frac{19^4}{20^5} \cong 0.634. \ \square$$

2⁰. Наиболее вероятное число успехов. Определим наиболее вероятное число успехов в n испытаниях Бернулли. Для этого рассмотрим $P_n(m)$ как функцию от m и сравним значения вероятностей $P_n(m)$ и $P_n(m+1)$:

$$P_n(m) < P_n(m+1) \to C_n^m p^m q^{n-m} < C_n^m p^{m+1} q^{n-m+1} \to$$

$$\to \frac{n!}{m!(n-m)!} q < \frac{n!}{(m+1)!(n-m+1)!} p \to \frac{q}{n-m} < \frac{p}{m+1} \to$$
$$\to qm + q < pn - pm \to (p+q)m < np - q,$$

так как $p + q = 1$, то $m < np - q$.

Значит, при $m < np - q$ указанная функция $P_n(m)$ возрастает, а при $m > np - q$ убывает. Тогда максимум $P_n(m)$ достигается при m, равном

$$m = [np - q] + 1. \qquad \textbf{(2)}$$

▷ ***Пример 2.*** По данным наблюдений доля солнечных дней в июле составляет 70 %. Найти наиболее вероятное количество солнечных дней.

Решение. Можно считать, что имеются $n = 30$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0.7$. Тогда $q = 0.3$ и наиболее вероятное значение m будет равно

$$m = [30 \cdot 0.7 - 0.3] + 1 = 21. \ \square$$

3°. Формула полной вероятности. Пусть имеется набор таких событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, что $B_i \cap B_j = \varnothing$, $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$, т.е. сумма попарно несовместных событий составляет достоверное событие. В этом случае говорят, что события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ составляют *полную группу событий*. Эти события разбивают пространство Ω на непересекающиеся множества (рис. 24.1).

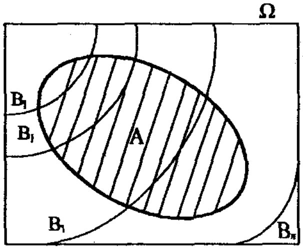


Рис. 24.1

Пусть A произвольное событие. Тогда A можно представить в виде суммы несовместных событий:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n).$$

Тогда имеем

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k).$$

По формуле условной вероятности

$$P(A \cap B_k) = P(A / B_k) P(B_k),$$

поэтому

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A / B_k) P(B_k). \tag{3}$$

Полученная формула называется *формулой полной вероятности*.

▷ ***Пример 3.*** На экзамене студенту предварительно задается один из 20 вопросов. Если он правильно ответит, то с вероятностью 0.8 может сдать экзамен, а если нет, то вероятность сдать экзамен равна 0.2. Студент освоил 80 % всех вопросов. Какова вероятность в результате получить положительную оценку?

Решение. Пусть B_1 – событие, состоящее в том, что студенту попадется известный ему вопрос, а B_2 – неизвестный, A – положительный исход экзамена. События B_1 и B_2 образуют полную группу событий, так как $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, $B_1 \cup B_2 = \Omega$. По условию задачи $P(B_1) = 0.8$; $P(B_2) = 0.2$; $P(A/B_1) = 0.8$; $P(A/B_2) = 0.2$.

Тогда по формуле полной вероятности получим

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) = 0.8 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.68. \ \square$$

4^0. Формула Байеса. Рассмотрим ситуацию, когда исход события A зависит от некоторых других событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, составляющих полную группу событий, и событие A произошло.

Возникает вопрос, какое из событий (гипотез) B_i, влекущих появление события A более вероятно?

Для определения вероятностей гипотез и решения этой задачи служит ***формула Байеса (формула апостериорных вероятностей)***:

$$P(B_k / A) = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)}. \qquad \textbf{(4)}$$

Доказательство. Так как события B_i, $i = \overline{1,n}$ образуют полную группу событий, то по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i).$$

Используя формулы для условных вероятностей, получим

$$P(B_k / A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)}.$$

Вычисляя вероятности гипотез B_i, можно определить наиболее вероятную гипотезу. $\square$

$\triangleright$ ***Пример 4.*** Во время боевых действий самолет противника выпускает три помехи для дезинформации системы ПВО. Оператор ПВО отличает самолет от помехи с вероятностью 0.9. Точка на экране была принята за самолет. Что более вероятно: появление самолета или помехи?

Решение. Пусть A – событие, заключающее в себе принятое решение, B_1 – появление самолета, B_2 – помехи. Тогда

$$P(B_1)=\frac{1}{4};\ P(B_2)=\frac{3}{4};\ P(A/B_1)=0.9;\ P(A/B_2)=0.1.$$

и по формуле Байеса $P(B_1/A)=\dfrac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A)}$, где $P(A)=P(A/B_1)P(B_1)+P(A/B_2)P(B_2)$.

Получим $P(A)=0.9\cdot0.25+0.1\cdot0.75=0.3$, $P(B_1/A)=\dfrac{0.9\cdot0.25}{0.3}=$ $=0.75$, $P(B_2/A)=\dfrac{0.1\cdot0.75}{0.3}=0.25$, откуда следует, что более вероятно появление самолета. □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Имеется $n=5$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p=\dfrac{3}{4}$. Найти вероятность того, что число успехов будет больше числа неуспехов.

2. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается вероятностью 0.8. Какова вероятность, что из 5 посеянных семян взойдут не менее 3?

3. В магазин поступили 40 холодильников первого завода и 60 – второго завода. Первый завод допускает брак 1 %, второй – 0.5 %. Покупатель случайным образом выбирает холодильник. Какова вероятность того, что он выберет исправный агрегат?

4. В результате трех бросаний игральной кости была получена сумма цифр, равная 17. Какова вероятность того, что при последнем бросании выпала цифра 6?

5. Прибор состоит из двух узлов, которые в течение времени T отказывают с вероятностями $p_1=0.1$, $p_2=0.05$. Работа каждого узла необходима для работы прибора в целом. После испытаний в течение времени T прибор отказал. Найти вероятность того, что отказал первый узел, а второй исправен.

■ Лекция 25

Нечеткие множества и матрицы инциденций

Даны понятия нечетких множеств, матрицы инциденций и нечетких матриц.

1°. Элементы теории нечетких множеств.

1°.1 Нечеткие понятия. В классических подходах к решению задач отсутствуют такие термины, как неясность, неопределенность, нечеткость или неточность. Однако, в реальном мире мы неминуемо сталкиваемся с множеством случаев, когда невозможно избежать проблемы учета неясностей и неточных данных о событиях, характеристиках и оценках. В 1965 г. Л. Заде предложил теорию нечетких или размытых множеств, получившую также название *нечеткой логики*. Теория нечетких множеств дала схему решения проблем, в которых субъективное суждение или оценка играют существенную роль при оценке фактора неясности или неопределенности. Нечеткая логика, как следует из названия, предполагает неточные, приблизительные оценки.

Рассмотрим метод определения таких понятий. Пусть Q – произвольное множество объектов или событий. *Нечетким множеством A* называется множество упорядоченных пар

$$A = \{x, \mu_A(x)\}, \quad x \in Q, \tag{1}$$

где $\mu_A(x)$ определяет *функцию принадлежности*, которая указывает предполагаемую степень принадлежности элемента этому множеству, $0 \le \mu_A(x) \le 1$. Если все $\mu_A(x) \in \{0,1\}$, т.е. равны либо 0 либо 1, то нечеткое множество становится обычным четким множеством, а функция $\mu_A(x)$ – обычной булевой функцией. Однако, если $\mu_A(x)$ может принимать значения из отрезка $[0,1]$, то $\mu_A(x)=0$ означает, что $x \notin A$, а $\mu_A(x)=1$ – что $x \in A$, при этом любое значение $0 < \mu_A(x) < 1$ определяет степень принадлежности x множеству A, тогда A – нечеткое множество.

▷ ***Пример 1.*** Пусть Q – рост человека, колеблющийся и пределах от 1.5 м до 2.2 м. Нечеткое множество A описывает понятие "высокий", как оно представляется лицу, определяющему это понятие. Нечеткое множество A задается таблицей:

Рост x	1.5–1.6	1.6-1.7	1.7-1.8	1.8-1.9	1.9-2.0	2.0-2.1	2.1-2.2
$\mu_A(x)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1

или графиком:

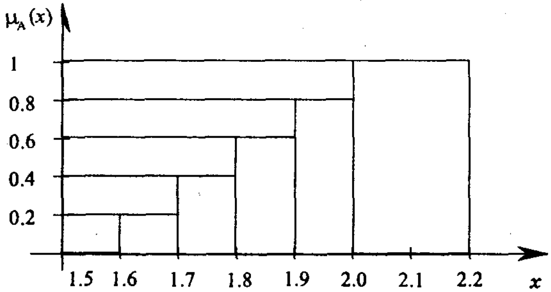


Рис. 25.1

Приведенный пример является примером нечеткого числа. □

В общем случае функция принадлежности определяется экспертом, и у каждого специалиста эта функция может иметь различный вид.

1°.2. Операции над нечеткими множествами. Над нечеткими множествами вводятся следующие операции (рис. 25.2-25.5):

· **Вложение**

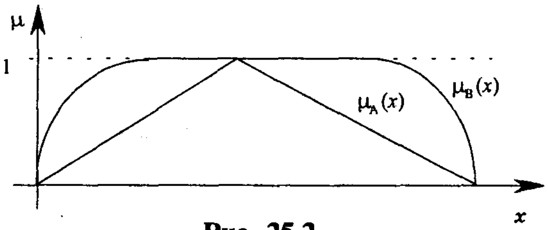


Рис. 25.2

$$A \subset B \leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x), \quad \forall\, x \in Q \tag{2}$$

Дополнение

$$\mu_{\bar{A}}(x) \le 1 - \mu_A(x), \quad \forall\, x \in Q \tag{3}$$

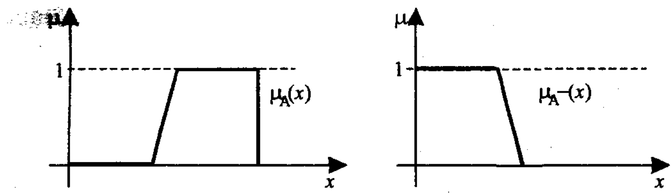


Рис. 25.3

· **Объединение**

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\quad \forall\, x\in Q \tag{4}$$

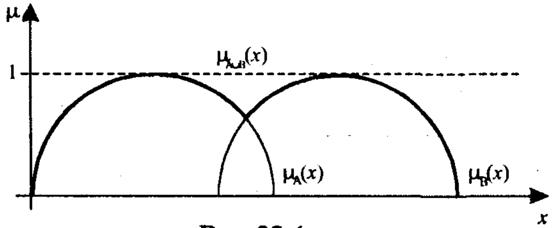


Рис. 25.4

Пересечение

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\ \forall\, x\in Q. \tag{5}$$

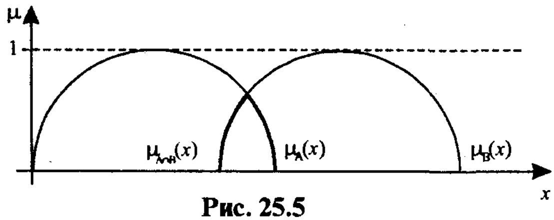


Рис. 25.5

Кроме того, вводится **операция степени** функции принадлежности

$$\mu_A^{\alpha}(x)=[\mu_A(x)]^{\alpha},\ \forall\, x\in Q. \tag{6}$$

На рис. 25.6 представлены наиболее часто используемые степени $\mu_A^{\frac{1}{2}}(x)$ – кривая 1, $\mu_A(x)$ – кривая 2, $\mu_A^2(x)$ – кривая 3. Из рисунка видно, что $\mu_A^2(x)$ сужает диапазон определения, поэтому

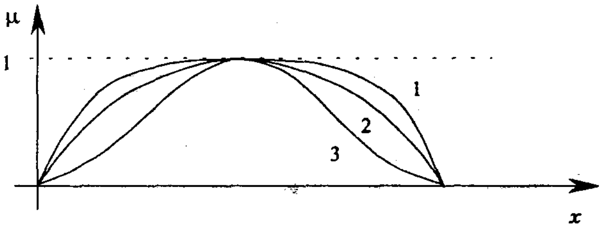


Рис. 25.6

можно сказать, что $\mu_A^2(x)$ – это "больше, чем", а $\mu_A^{\frac{1}{2}}(x)$ расширяет диапазон, поэтому $\mu_A^{\frac{1}{2}}(x)$ – "почти что".

Термин "нечеткое число" используется для обозначения неточно определенных величин, таких как "около 5". *Нечеткое число* – это множество $A=\{x,\mu_m(x)\}$, где $x\in R$, а $\mu_m(x)\in[0,1]$.

▷ ***Пример 2.*** Число больных туберкулезом в процентах для жителей района в определенном возрасте есть нечеткое число m_1, определяемое таблицей,
а число сердечно-сосудистых заболеваний – нечеткое число m_2:

x	1	2	3	4	5	6	7
$\varphi_{m_1}(x)$	0.8	0.9	0.8	0.5	0.5	0	0

x	1	2	3	4	5	6	7
$\varphi_{m_2}(x)$	0	0.2	0.6	0.7	0.9	0.7	0

Определить число жителей, не страдающих этими заболеваниями.

Решение. Искомое число есть нечеткое число m, для которого

$$\varphi_m(100-x)=1-\varphi_{m_1\cup m_2}(x)=1-\max\{\varphi_{m_1}(x),\varphi_{m_2}(x)\}$$

и которое определяется следующей таблицей:

x	99	98	97	96	95	94	93
$\varphi_m(x)$	0.2	0.1	0.2	0.3	0.1	0.3	1

□

1⁰.3 Матрица инциденций. Пусть $A=\{a_i,\ i=\overline{1,m}\}$ – множество объектов, которые некоторым образом воздействуют на множество $B=\{b_j,\ j=\overline{1,n}\}$ других объектов. Тогда говорят, что *A имеет инциденцию на B*. Если при этом элемент a_i влияет на элемент b_j, то говорят, что *имеет место инциденция a_i на b_j* и записывают $\mu(a_i,b_j)=1$, и если этой инциденции не существует, то значение $\mu(a_i,b_j)=0$. Совокупность значений $\mu(a_i,b_j)$ образуют *матрицу инциденций.*

Матрицу инциденций иногда удобно представлять в виде графа. Например, матрице

$$V=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&1&0&1\\1&1&0&0&0\end{bmatrix} \tag{7}$$

будет соответствовать граф (рис. 25.7)

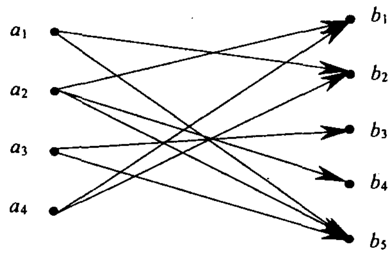


Рис. 25.7

Если a_i имеют инциденцию на b_j, то говорят, что b_j *находится "под влиянием"* a_i. Если матрицу (7) транспонировать, то получим *матрицу влияний*:

$$W=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}. \tag{8}$$

▷ ***Пример 3.*** Пусть $A = B$ и множество A состоит из элементов: a_1 – прибыль предприятия, a_2 – налоги, a_3 – себестоимость единицы продукции, a_4 – основные фонды.

Экономист мог бы составить следующую матрицу инциденций:

$$V=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}. \ \square$$

Рассмотрим теперь инциденцию множества A на множество B и инциденцию множества B на третье множество C. Операция, позволяющая определить инциденцию A на C, зная инциденции A на B и B на C, называется *композицией* maxmin. Легко установить, что

$$\mu(a_i, c_k) = \bigvee_j \left(\mu(a_i, b_j) \wedge \mu(b_j, c_k)\right), \tag{9}$$

где знак $\vee$ означает выбор максимального, а знак $\wedge$ – минимального из двух элементов.

▷ ***Пример 4.*** Пусть

$$V(A,B)=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad V(B,C)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

Найти $V(A,C)$.

Решение. Пользуясь правилом композиции, получим

$$V(A,C)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}. \quad \square$$

1^0.4 Нечеткая матрица. Матрица $\tilde{V}$, строки которой представляют значения некоторой функции принадлежности, называется *нечеткой матрицей*. Если отношения инцидентности являются нечеткими, то соответствующая матрица инцидентности $\tilde{V}$ будет нечеткой матрицей, элементы которой могут принимать любые значения между 0 и 1, т.е.

$$\mu(x_i, x_j) \in [0,1] \quad \forall (x_i, x_j) \in \tilde{V}.$$

✍ Задания для самостоятельной работы

1. Изделие состоит из двух элементов и выходит из строя, если выходит из строя хотя бы один элемент. Время работы (в днях) до поломки первого и второго элементов есть нечеткие числа m_1 и m_2, задаваемые таблицами:

x	60	75	90	120
$\varphi_{m_1}(x)$	1	0.8	0.2	0

x	60	75	90	120
$\varphi_{m_2}(x)$	1	0.7	0.5	0

Определить время работы изделия.

2. Даны две нечеткие матрицы инциденций A на B и B на C:

$$V_1=\begin{bmatrix}0.3 & 0.8 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.5 & 1\end{bmatrix},\quad V_2=\begin{bmatrix}1 & 0.9 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 08\\ 1 & 0.5 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

а) Изобразить графы инциденций для каждой из матриц.

б) Найти композицию maxmin, определяющую инциденции A на C.

Лекция 26

Использование матрицы инциденций при исследовании скрытых воздействий в финансовой и производственной областях

Рассматриваются инциденции второго порядка и примеры их применения при исследовании скрытых воздействий.

1°. Инциденции второго порядка. Рассмотрим инциденцию множества A на множество B, которую обозначим M_{AB} и инциденцию множества B на третье множество C – M_{BC}. Последовательное применение двух инциденций приводит к инциденции второго порядка, которая обозначается

$$M_{AC} = M_{AB} \circ M_{BC}. \tag{1}$$

При вычислении инциденций второго порядка по формуле (1) следует помнить, что число столбцов матрицы M_{AB} должно равняться числу строк матрицы M_{BC}.

Матрица M называется *рефлексивной*, если ее диагональ состоит из единиц. Если все элементы матрицы M_1 не больше соответствующих элементов матрицы M_2, то этот факт записывается в виде $M_1 \subset M_2$. Пусть E – единичная матрица, $\tilde{M}$ – нечеткая матрица, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – рефлексивные нечеткие матрицы, определяющие инциденции A на A и B на B соответственно, т.е. $\tilde{A} = M_{AA}$, $\tilde{B} = M_{BB}$.

Так как $E \subset \tilde{A}$ и $E \subset \tilde{B}$, то получим

$$\tilde{M} = \tilde{M} \circ E \subset \tilde{M} \circ \tilde{B} \text{ и } \tilde{M} = E \circ \tilde{M} \subset \tilde{A} \circ \tilde{M}.$$

Тогда

$$\tilde{M} \subset \tilde{A} \circ \tilde{M} \circ \tilde{B}. \tag{2}$$

Матрицей, задающей воздействия первого и второго порядков, является

$$\tilde{M}^* = \tilde{A} \circ \tilde{M} \circ \tilde{B} \tag{3}$$

и скрытые воздействия обнаруживаются после вычисления

$$\tilde{D} = \tilde{M}^* - \tilde{M}. \tag{4}$$

Вычисления по формуле (4) возможны, так как согласно (2) и (3), $\tilde{M} \subset \tilde{M}^*$.

2°. Пример исследования скрытых воздействий с помощью матриц инциденций. Рассмотрим 6 секторов, определяющих жизнедеятельность людей: 1) население; 2) сельское хозяйство; 3) промышленность; 4) энергетика, 5) наука и техника, 6) здравоохранение.

Построим квадратную матрицу, строки и столбцы которой соответствуют введенным секторам, а элементы представляют оценки экспертов.

Таблица 1

$\tilde{M}$	1	2	3	4	5	6
1	1	0.3	0.5	0.7	0.6	0.9
2	0.4	1	0.3	0.2	0.1	0.8
3	0.2	0.2	1	0.2	0.3	0.1
4	0	0.1	1	1	0.2	0
5	0.3	0.4	1	1	1	0.6
6	0.6	0.1	0.1	0.1	0.2	1

В таблице 1 приведены инциденции, оцененные экспертами. Эти оценки составляют рефлексивную нечеткую матрицу. Так, наука и техника имеет инциденцию на промышленность, оцениваемую 1, а на здравоохранение – 0.6 и т.д. Вычислим инциденции второго порядка $\tilde{M}^* = \tilde{M} \circ \tilde{M}$ по формуле композиций maxmin Л. 25.9.

Затем вычислим матрицу $\tilde{D} = \tilde{M}^* - \tilde{M}$ с целью выявления воздействий второго порядка. Получим матрицы, представленные в таблице 2.

Таблица 2

$\tilde{M}^*$	1	2	3	4	5	6
1	1	0.4	0.7	0.7	0.6	0.9
2	0.6	1	0.4	0.4	0.4	0.8
3	0.3	0.3	1	0.3	0.3	0.3
4	0.2	0.2	1	1	0.3	0.2
5	0.6	0.4	1	1	1	0.6
6	0.6	0.3	0.5	0.6	0.6	1

$\tilde{D}$	1	2	3	4	5	6
1	0	0.1	0.2	0	0	0
2	0.2	0	0.1	0.2	0.3	0
3	0.1	0.1	0	0.1	0	0.2
4	0.2	0.1	0	0	0.1	0.2
5	0.3	0	0	0	0	0
6	0	0.2	0.4	0.5	0.4	0

Анализ элементов матрицы $\tilde{D}$ позволяет установить скрытые воздействия, инциденции второго порядка. Выпишем наиболее значимые из них:

(6 → 4) здравоохранение – энергетика;

(6 → 3) здравоохранение – промышленность;

(6 → 5) здравоохранение – наука и техника;

(2 → 5) сельское хозяйство – наука и техника;

(5 → 1) сельское хозяйство – население.

Восстановим теперь промежуточные инциденции, с помощью которых можно обнаружить скрытые воздействия. Для этого используем таблицу 1 и определим наибольшие из минимумов между каждым элементом строки и элементом выхода. Получим:

(6 → 4)	$6 \xrightarrow{0.6} 1 \xrightarrow{0.7} 4$	0.6	
	$6 \xrightarrow{\quad 0.1 \quad} 4$	0.1	0.6 – 0.1 = 0.5
(6 → 3)	$6 \xrightarrow{0.6} 1 \xrightarrow{0.5} 3$	0.5	
	$6 \xrightarrow{\quad 0.1 \quad} 3$	0.1	0.5 – 0.1 = 0.4
(6 → 5)	$6 \xrightarrow{0.6} 1 \xrightarrow{0.6} 5$	0.6	
	$6 \xrightarrow{\quad 0.2 \quad} 5$	0.2	0.6 – 0.2 = 0.4
(2 → 5)	$2 \xrightarrow{0.4} 1 \xrightarrow{0.6} 5$	0.4	
	$2 \xrightarrow{\quad 0.1 \quad} 5$	0.1	0.4 – 0.1 = 0.3
(5 → 1)	$5 \xrightarrow{0.6} 6 \xrightarrow{0.6} 1$	0.6	
	$5 \xrightarrow{\quad 0.3 \quad} 1$	0.3	0.6 – 0.3 = 0.3

Интерпретируем эти результаты.

(6 → 4): Здравоохранение непосредственно почти не влияет на энергетику, но это влияние проявляется через население. Точно также здравоохранение непосредственно слабо влияет на промышленность и науку и технику, но это влияние опять таки сказывается через население.

(2 $\to$ 5): Сельское хозяйство не влияет непосредственно на науку и технику, но это влияние сказывается через население. Из (5 $\to$ 1) видно, что наука и техника влияет на население через здравоохранение.

3^0. Пример исследования скрытых воздействий в производственной области. Рассмотрим модель функционирования предприятия, у которого входными факторами являются:

a_1 – модернизация производственного оборудования;

a_2 – расширение ассортимента и объема товарных запасов;

a_3 – выпуск новых товаров;

a_4 – расширение торговой сети;

a_5 – мероприятия по рекламе;

а выходными факторами:

b_1 – рост числа продаж (в физических единицах);

b_2 – изменение продажных цен;

b_3 – конкурентоспособность;

b_4 – качество продукции;

b_5 – территориальное распределение.

Предполагается, что в данной модели параметры a_i влияют сами на себя, так же и выходные факторы связаны взаимовлиянием, и, конечно, входные факторы влияют на выходные. С помощью экспертов были составлены нечеткие матрицы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ инциденций A на A и B на B, приведенные в таблице 3.

Таблица 3

$\widetilde{M}$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0.9	0.3	0.1	0.9	0
a_2	0.8	0.2	0.3	0	0.6
a_3	1	0	0.8	0	0.6
a_4	0.1	0.2	0.7	0	1
a_5	1	0.6	0.7	0	0.1

$\widetilde{A}\widetilde{M}$	1	2	3	4	5
1	0.9	0.3	0.5	0.9	0.6
2	0.8	0.2	0.4	0	0.6
3	1	0.6	0.8	0.7	0.6
4	0.9	0.6	0.7	0.5	1
5	1	0.6	0.7	0	0.7

Экспертами также была составлена матрица $\widetilde{M}$ инциденций A на B. Инциденции второго порядка находятся с помощью матрицы

$$\widetilde{M}^* = \widetilde{A} \circ \widetilde{M} \circ \widetilde{B}. \tag{5}$$

С помощью правила композиций вычисляем матрицу $\widetilde{A} \circ \widetilde{M}$. Матрицы $\widetilde{M}$ и $\widetilde{A} \circ \widetilde{M}$ образуют следующие таблицы:

Таблица 4

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	0.7	0.5	0.1	0
a_2	0	1	0.1	0.4	0
a_3	0.7	0.9	1	0.5	0.8
a_4	0.5	0.8	0.7	1	0.9
a_5	0	0	0.4	0.7	1

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_1	1	0.6	1	0	0.4
b_2	1	1	1	0.1	0
b_3	0.8	0.3	1	0	0.6
b_4	1	1	0.9	1	1
b_5	1	0	0.2	0	1

Далее, используя формулу (5), вычисляем матрицу $\tilde{M}^*$ и находим разность матриц $\tilde{D}$.

Таблица 5

$\tilde{M}^*$	1	2	3	4	5
1	0.9	0.9	0.9	0.9	0.6
2	0.8	0.6	0.8	0.1	0.6
3	1	0.7	1	0.7	0.6
4	1	0.6	0.9	0.5	1
5	1	0.6	1	0.5	0.7

$\tilde{D}$	1	2	3	4	5
1	0	0.6	0.8	0	0.6
2	0	0.4	0.5	0.1	0
3	0	0.7	0.2	0.7	0
4	0	0.4	0.2	0.5	0
5	0	0	0.3	0.5	0.6

Матрица $\tilde{D}$ позволяет установить скрытые воздействия. Рассмотрим наиболее значимые из них:

(1 $\to$ 3) модернизация оборудования – конкурентоспособность;

(3 $\to$ 2) выпуск новых товаров – изменение продажных цен;

(3 $\to$ 4) выпуск новых товаров – качество продукции;

(1 $\to$ 2) модернизация оборудования – изменение цен;

(1 $\to$ 5) модернизация оборудования – территориальное распределение;

(5 $\to$ 5) мероприятия по рекламе – территориальное распределение.

Для обнаружения скрытых воздействий установим промежуточные инциденции. Просматривая все пути, ведущие от входа к выходу, и выбирая наибольшие из минимумов между каждым элементом входа и элементом выхода, определим инциденции для пары (1 $\to$ 3):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & 0.9 & & 1 & & & \\
1 & \to & 1 & \to & 1 & \to & 3 & & 0.9 \\
 & 1 & & 0.3 & & 1 & & & \\
1 & \to & 1 & \to & 2 & \to & 3 & & 0.3 \\
 & 0.5 & & 0.8 & & 1 & & &
\end{array}$$

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \qquad 0.5$$

$$1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{0.9} 4 \xrightarrow{0.9} 3 \qquad 0.9$$

Выберем наиболее существенные из них и сравним с инциденциями матрицы $\widetilde{M}$.

$$1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{0.9} 1 \xrightarrow{1} 3 \qquad 0.9$$

$$1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{0.9} 4 \xrightarrow{0.9} 3 \qquad 0.9$$

$$1 \xrightarrow{\quad 0.1 \quad} 3 \qquad 0.1 \qquad 0.9 - 0.1 = 0.8$$

Аналогичные сравнения проводим для остальных пар.

$$(3 \rightarrow 2) \qquad 3 \xrightarrow{0.7} 1 \xrightarrow{0.9} 4 \xrightarrow{1} 2 \qquad 0.7$$

$$3 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 2 \qquad 0$$

$$(3 \rightarrow 4) \qquad 3 \xrightarrow{0.7} 1 \xrightarrow{0.9} 4 \xrightarrow{1} 4 \qquad 0.7$$

$$3 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 4 \qquad 0 \qquad 0.7 - 0 = 0.7$$

$$(1 \rightarrow 2) \qquad 1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{0.9} 4 \xrightarrow{1} 2 \qquad 0.9$$

$$1 \xrightarrow{\quad 0.3 \quad} 2 \qquad 0.3 \qquad 0.9 - 0.3 = 0.6$$

$$(1 \rightarrow 5) \qquad 1 \xrightarrow{0.7} 2 \xrightarrow{0.8} 5 \xrightarrow{1} 5 \qquad 0.7$$

$$1 \xrightarrow{\quad 0.1 \quad} 5 \qquad 0.1 \qquad 0.7 - 0.1 = 0.6$$

$$(5 \rightarrow 5) \qquad 5 \xrightarrow{0.7} 4 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{1} 5 \qquad 0.7$$

$$5 \xrightarrow{\quad 0.1 \quad} 5 \qquad 0.1 \qquad 0.7 - 0.1 = 0.6$$

Выводы. Модернизация оборудования влияет на конкурентоспособность через рост числа продажи и качество продукции, выпуск новых товаров влияет на изменение продажных цен через модернизацию оборудования и качество продукции; выпуск новых товаров влияет также на качество продукции через модернизацию производства; модернизация производства влияет на изменение цен через качество продукции и на территориальное распределение через расширение ассортимента и объема товарных запасов; мероприятия по рекламе влияют на территориальное распределение через расширение торговой сети.

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. С помощью графов инциденций доказать ассоциативность операции $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$ для матриц инциденций.

2. Определить скрытые влияния для следующей задачи в финансовой области.

Финансовая система предприятия описывается следующими факторами: a_1 – прибыль; a_2 – наличность; a_3 – основной финансовый капитал; a_4 – основной материальный капитал; b_1 – кредит у поставщиков; b_2 – долгосрочные кредиты; b_3 – прирост капитала; b_4 –платежеспособность по акциям. Параметры $a_1 - a_4$ считаются входными, $b_1 - b_4$ выходными. Заданы матрицы инциденций $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{M}$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.9 & 0.9 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Лекция 27

Случайные величины и законы их распределения

Вводится понятие случайной величины; рассматриваются функции распределения и плотности вероятностей; изучаются дискретные и непрерывные случайные величины; определяется независимость случайных величин.

1°. Случайные величины. *Случайной величиной* $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, называется функция, определенная на множестве элементарных событий Ω. Случайная величина является функцией элементарных исходов ω, поэтому говорят, что случайная величина – это величина, значения которой зависят от случая.

Примеры случайных величин.

1. Число грузовых машин, проезжающих за один час через контрольный пост ГАИ.

2. Время ожидания в очереди.

3. Момент отказа технической системы.

4. Число бракованных изделий, выпускаемых предприятием за определенное время.

Совокупность вероятностей

$$P\{a \le X(\omega) < b\} \tag{1}$$

для различных a и b называется *распределением случайной величины.*

2°. Функция распределения. Рассматривая для любого x вероятность события $\{X(\omega) < x\}$, получим некоторую функцию действительной переменной, которая называется *функцией распределения*:

$$F_X(x) = F(x) = P\{X(\omega) < x\}. \tag{2}$$

Функция распределения однозначно задает распределение случайной величины, так как по ней находятся вероятности вида

$$P\{a \le X(\omega) < b\} = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Выведем эту формулу. Событие $\{X(\omega) < b\}$ равно сумме несовместных событий $\{X(\omega) < a\}$ и $\{a \le X(\omega) < b\}$. Поэтому

$$P\{X(\omega) < b\} = P\{X(\omega) < a\} - P\{a \le X(\omega) < b\}. \tag{4}$$

Учитывая определение функции $F(x)$, получим

$$F(b) = F(a) + P\{a \le X(\omega) < b\},$$

откуда и следует (3).

Рассмотрим основные свойства функции распределения.

1. $0 \le F(x) \le 1$. **(5)**

Действительно, так как значения функции распределения есть вероятности, то неравенство (5) выполняется.

2. Функция распределения есть монотонно неубывающая функция,

$$a < b \to F(a) \le F(b). \qquad (6)$$

Этот факт следует из равенства (4).

Кроме того, функция распределения удовлетворяет следующим свойствам:

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. (7)

4. Функция распределения непрерывна слева.

Можно показать, что любая действительная функция, удовлетворяющая перечисленным выше свойствам свойствам, является функцией распределения некоторой случайной величины.

▷ ***Пример 1.*** Предприятие выпускает изделия, среди которых 60 % стандартных. Наугад выбираются 5 изделий. Найти функцию распределения числа стандартных изделий в выборке.

Решение. Можно считать, что имеются $n = 5$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0.6$, тогда $q = 0.4$. Найдем вероятности m успехов ($m = \overline{0,5}$) по формуле Бернулли:

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^5 = 0.01024; \; P_5(1) = C_5^1 \cdot 0.6^1 \cdot 0.4^4 = 0.0768;$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^3 = 0.2304; \; P_5(3) = C_5^3 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2 = 0.3456;$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^1 = 0.2592; \; P_5(5) = C_5^5 \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^0 = 0.07776.$$

Тогда:

при $x \le 0$

$$F(x) = P\{m < x\} = 0;$$

при $0 < x \le 1$

$$F(x) = P\{m < x\} = P\{m = 0\} = 0.01024;$$

при $1 < x \le 2$

$$F(x) = P\{m < x\} = P\{m = 0, m = 1\} = P_5(0) + P_5(1) = 0.08704\ ;$$

при $2 < x \le 3$

$$F(x) = P\{m = 0, m = 1, m = 2\} = 0.08704 + P_5(2) = 0.31744\ ;$$

при $3 < x \le 4$

$$F(x) = P\{m < x\} = P\{m = 0, 1, 2, 3\} = 0.31744 + P_5(3) = 0.66304\ ;$$

при $4 < x \le 5$

$$F(x) = P\{m < x\} = P\{m = 0,1,2,3,4\} = 0.66304 + P_5(4) = 0.92224\ ;$$

при $x > 5$

$$F(x) = P\{m < x\} = P\{m = 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = 0.92224 + 0.07776 = 1\ .$$

График функции $F(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 27.1:

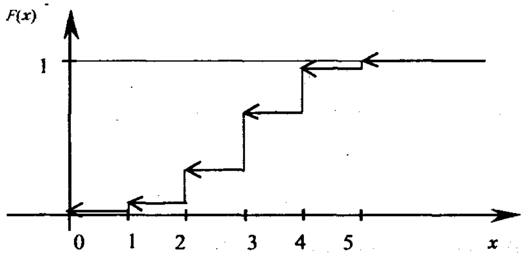


Рис. 27.1 □

▷ ***Пример 2.*** Функция распределения случайной величины X есть $F_X(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $Y = a + \sigma X,\ \sigma > 0$.

Решение.

$$F_Y(x) = P\{Y < x\} = P\{a + \sigma X < x\} = P\left\{X < \frac{x-a}{\sigma}\right\} = F_X\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).\ \square$$

3⁰. Дискретные случайные величины. Случайная величина X называется *дискретной*, если она принимает конечное или счетное множество значений $x_i,\ i = 1, 2, \ldots;$. *Распределение* дискретной случайной величины задается набором значений и их вероятностей:

$$p_i = P\{X = x_i\}\ \ i = 1, 2, \ldots\ , \tag{8}$$

где $\sum_i p_i = 1$.

Если число значений X конечно и равно n, то распределение X задается таблицей:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Функция $F(x)$, изображенная на рис. 27.1, представляет собой типичный пример функции распределения дискретной случайной величины.

4°. Непрерывные случайные величины. Случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна. Для непрерывной случайной величины X вероятность того, что она примет конкретное числовое значение, равна нулю.

Действительно,

$$\{X = x_0\} \subset \{x_0 \le X < x_0 + \Delta x\},$$

а тогда $P\{X = x_0\} \le P\{x_0 \le X < x_0 + \Delta x\} = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Значит $P\{X = x_0\} = 0$.

Плотностью вероятности случайной величины (по аналогии с плотностью физических величин) называется предел

$$P_X(x) = p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X < x + \Delta x\}}{\Delta x}. \qquad \textbf{(9)}$$

Плотность имеет смысл только для случайных величин, у которых функция распределения имеет производную $F'(x)$. Тогда предел в (9) существует и

$$p(x) = F'(x). \qquad \textbf{(10)}$$

Из (10) следует, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \textbf{(11)}$$

Формулы (10) и (11) определяют связь между функцией распределения и ее плотностью.

Из определения плотности следует, что

$$P\{x \le X < x + \Delta x\} = p(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

т.е. вероятность того, что случайная величина попадает в маленький интервал, приблизительно равна плотности вероятности, умноженной на длину этого интервала. Плотность вероятности полностью задает распределение вероятностей, так как из (11) следует ,что

$$P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x. \qquad \textbf{(12)}$$

Из (9) и (11) следуют *основные свойства плотности вероятностей*:

1) $p(x) \ge 0$, **(13)**

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1$. **(14)**

На рис. 27.2 приведены типичные графики функции распределения и плотности вероятностей для непрерывной случайной величины.

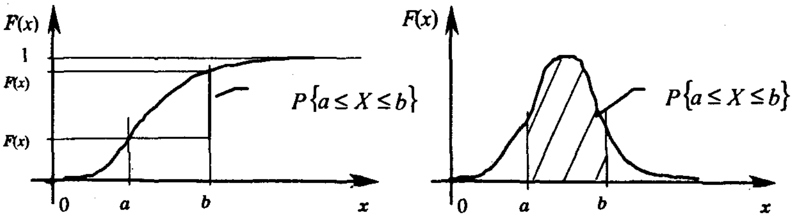


Рис. 27.2

▷ ***Пример 3.*** Пусть X имеет плотность $P_X(x)$; найти плотность случайной величины $Y = a + \sigma X$, $\sigma > 0$.

Решение. Воспользовавшись примером 2, найдем $F_Y(x) = F_X\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$, тогда

$$P_Y(x) = F'_Y(x) = \frac{1}{\sigma} F'_X\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} P_X\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \quad \square$$

▷ ***Пример 4.*** Система состоит из трех элементов и отказывает, если отказывает хотя бы один из них. Моменты отказов элементов не зависят друг от друга. Проверка в момент времени T показала, что система неработоспособна. Считая, что отказы элементов могут происходить в любой момент времени T, найти функцию распределения момента отказа системы.

Решение. Пусть τ_1, τ_2, τ_3 – моменты отказов элементов, а τ – момент отказа системы. Тогда

$$F(x) = P\{\tau < x\} = 1 - P\{\tau > x\} = 1 - P\{\tau_1 > x, \tau_2 > x, \tau_3 > x\} =$$

$$= 1 - P\{\tau_1 > x\}P\{\tau_2 > x\}P\{\tau_3 > x\} = 1 - \left(\frac{T-x}{T}\right)\left(\frac{T-x}{T}\right)\left(\frac{T-x}{T}\right) = 1 - \left(1 - \frac{x}{T}\right)^3$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x}{T}\right)^3. \ \square$$

5^0. Независимые случайные величины. Случайные величины X_1 и X_2 называются *независимыми*, если для любых интервалов I_1, I_2 справедливо

$$P\{X_1 \in I_1, X_2 \in I_2\} = P\{X_1 \in I_1\}P\{X_2 \in I_2\}. \quad \textbf{(15)}$$

Таким образом, случайные величины независимы, если события, связанные с ними, независимы.

Для независимых случайных величин

$$P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\} = F_1(x_1)F_2(x_2).$$

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. В разыгрываемой лотерее из 40 билетов имеется 5 выигрышных. Найти функцию распределения для числа выигрышных билетов из 5 купленных.

2. В объединении имеются два предприятия. Прибыль в у. е. первого предприятия в год есть дискретная случайная величина с распределением

x_i	20000	30000	40000	50000	60000
p_i	0.15	0.3	0.4	0.1	0.05

,

а второго, соответственно,

y_i	20000	30000	40000	50000	60000
p_i	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

.

Найти закон распределения прибыли объединения.

3. Годовая прибыль в у.е. предприятия определяется случайной величиной X с плотностью распределения $P(x)=\dfrac{3\cdot\left(80x-x^2-1500\right)}{4000}$ при $30<x<50$ и $P(x)=0$ при $x<30$ и $x>50$. Найти функцию распределения и вероятность $P\{x>40\}$.

■ *Лекция 28*

Числовые характеристики случайных величин

Даны определения и изучены свойства математического ожидания и дисперсии; введены понятия моды, медианы, асимметрии и эксцесса.

1°. Математическое ожидание случайной величины. Простейшей характеристикой случайной величины является ее *математическое ожидание* или *среднее значение*. Для дискретной случайной величины математическое ожидание определяется как

$$MX = \sum_k x_k p_k , \tag{1}$$

где x_k – значения случайной величины, а p_k – их вероятности.

Для непрерывной случайной величины, имеющей плотность $p(x)$, математическое ожидание определим так:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) \mathrm{d} x . \tag{2}$$

Если $p_k = \frac{1}{n}$, $k = \overline{1, n}$, то математическое ожидание совпадает с обычным средним значением:

$$\mathrm{M} X = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} .$$

Далее, в зависимости от рассматриваемой ситуации, для математического ожидания случайной величины X могут применяться следующие обозначения: MX, $M(X)$, $M[X]$, $\overline{X}$, a, a_X, m, m_X.

Установим свойства математического ожидания (доказательства проведем для дискретных случайных величин).

1. $M(cX) = cMX$. $\qquad$ (3)

Доказательство. $M(cX) = \sum_k c x_k p_k = c \sum_k x_k p_k = cMX$.

2. $Mc = c$. $\qquad$ (4)

Доказательство. Для константы $P\{X = c\} = 1$ и $MX = c \cdot 1 = c$.

3. $M(X+Y)=MX+MY.$ **(5)**

Доказательство. Пусть $P\{X=x_i\}=p_i$, $P\{Y=y_j\}=q_j$, тогда

$$M(X+Y)=\sum_i\sum_j(x_i+y_j)P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_i x_i\sum_j P\{Y=y_j\mid X=x_i\}\times$$

$$\times P\{X=x_i\}+\sum_j\sum_i P\{X=x_i\mid Y=y_j\}P\{Y=y_j\}=\sum_i x_i p_i\cdot 1+\sum_j y_j q_j\cdot 1=$$

$$=MX+MY.$$

4. Если X и Y независимы, то

$$M(XY)=MX\cdot MY. \qquad \textbf{(6)}$$

Доказательство. $M(XY)=\sum\limits_i\sum\limits_j x_i y_j P\{X=x_i,Y=y_j\}=$

$$=\sum_i\sum_j x_i y_j P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}=\sum_i\sum_j x_i y_j p_i q_j=MX\cdot MY.$$

▷ ***Пример 1.*** Найти математическое ожидание первого успеха в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха p

Решение. Момент первого успеха есть дискретная случайная величина X, принимающая значения 1, 2, ... (счетное множество значений) с вероятностями $P\{X=k\}=q^{k-1}p$. Тогда $MX=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=$ $=p\sum\limits_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}$. Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty}q^k=\dfrac{q}{1-q}$, то, дифференцируя это равенство, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=\frac{1-q+q}{(1-q)^2}=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

Отсюда

$$MX=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}. \ \square$$

▷ ***Пример 2.*** Найти среднее значение момента отказа в примере Л. 27.4.

Решение. Так как $F(x)=1-\left(1-\frac{x}{T}\right)^3$, то плотность распределения равна $p(x)=\frac{3}{T}\left(1-\frac{x}{T}\right)^2$ при $0\le x\le T$. Тогда

$$M\tau=\int_0^T x\frac{3}{T}\left(1-\frac{x}{T}\right)^2 dx=\left[x=(1-u)T\right]=$$

$$=3T\int_0^1(1-u)u^2\,\mathrm{d}u=3T\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}T.\ \square$$

▷ ***Пример 3.*** При сборке прибора для наиболее точной подгонки основной детали может потребоваться (в зависимости от удачи) 1, 2, 3, 4 или 5 проб соответственно с вероятностями 0.07, 0.21, 0.55, 0.16, 0.01. Требуется обеспечить сборщика необходимым количеством деталей для сборки 30 приборов. Сколько деталей надо отпустить сборщику?

Решение. Число проб, необходимых для сборки прибора, есть случайная величина X с законом (рядом) распределения

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0.07	0.21	0.55	0.16	0.01

Среднее число проб, необходимых для сборки одного прибора, равно $MX=1\cdot0.07+2\cdot0.21+3\cdot0.55+4\cdot0.16+5\cdot0.01=2.83$. Следовательно, для сборки 30 деталей необходимо иметь $n\cong30\cdot2.83=85$ деталей. $\square$

2⁰. Дисперсия случайной величины. Другой важной характеристикой случайной величины X является *дисперсия*, определяемая как

$$DX=M(X-MX)^2. \tag{7}$$

Из определения следует, что $DX\ge0$ и дисперсия есть среднее значение квадрата отклонения случайной величины от своего среднего значения и, таким образом, является мерой рассеивания случайной величины. *Среднеквадратичным отклонением* называется величина

$$\sigma = \sqrt{M(X - MX)^2} = \sqrt{DX}\,, \tag{8}$$

которая более характерно представляет меру рассеивания случайной величины.

Далее дисперсия случайной величины X, в зависимости от рассматриваемой ситуации, может обозначаться так: DX, $D(X)$, $D[X]$, D_X, σ^2, σ_X^2.

Из (7) находим:

$$DX = M(X - MX)^2 = M\left[X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2\right] = MX^2 - 2MXMX +$$

$$+ M\left[(MX)^2\right] = MX^2 - 2(MX)^2 + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2.$$

Получена формула

$$DX = MX^2 - (MX)^2, \tag{9}$$

которая является более удобной для практических вычислений.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия константы равна 0, т.е.

$$Dc = M(c - Mc)^2 = M(c - c)^2 = 0.$$

2. Константа выносится из-под знака дисперсии в квадрате, т.е

$$D(cX) = M[cX - M(cX)]^2 = M[c(X - MX)]^2 = c^2 DX.$$

3. Если X и Y независимы, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий.

Имеем

$$D(X+Y) = M[X + Y - M(X+Y)]^2 = M[(X - M_X) + (Y - M_Y)]^2 =$$

$$= M(X - M_X)^2 + M[(X - M_X)(Y - M_Y)] + M(Y - M_Y)^2 =$$

$$= DX + M(X - MX)M(Y - MY) + DY = DX + 0 + DY.$$

▷ ***Пример 4.*** Пусть X – случайная величина, закон (ряд) распределения которой равен

x_i	0	1
p_i	q	p

, где $q = 1 - p$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. По определению $MX=\sum_i x_i p_i = 0(1-p)+1\cdot p = p$. Так как $X^2 = X$, то дисперсия равна $DX = MX^2 - (MX)^2 = p - p^2 = pq$. □

▷ ***Пример 5.*** Функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x)=a-be^{-x}$, $x>0$, где $b>0$. Определить a, b, MX, DX.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$, то $a=1$. Плотность вероятности случайной величины равна $p(x)=be^{-x}$. Определим b из условия $\int\limits_0^\infty p(x)dx=1$. Получим

$$\int\limits_0^\infty be^{-x}\,\mathrm{d}\,x=\left[-be^{-x}\right]_0^\infty=b=1,\quad M\xi=\int\limits_0^\infty xp(x)\mathrm{d}\,x=\int\limits_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}\,x=\left[-e^{-x}x\right]_0^\infty+$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}\,x=1,\quad M\xi^2=\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}\,\mathrm{d}\,x=\left[-x^2e^{-x}\right]_0^\infty+2\int\limits_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}\,x=2.$$

Тогда $DX = MX^2 - (M_X)^2 = 1$. □

3⁰. Мода и медиана. В статистических расчетах часто встречаются такие характеристики непрерывных распределений, как мода и медиана.

Модой называется точка максимума плотности вероятности, а *медианой* – число, которое делит распределение на две равные части. Если $P\{X<a\}=P\{X>a\}$, то число a является медианой распределения.

4⁰. Моменты, асимметрия и эксцесс случайной величины. *Начальным моментом k-го порядка* ν_k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k, т.е.

$$\nu_k = M\left(X^k\right). \qquad \textbf{(10)}$$

Для дискретной величины

$$\nu_k = \sum_i x_i^k p_i\,; \qquad \textbf{(11)}$$

для непрерывной случайной величины X с плотностью $p(x)$ имеем

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) \mathrm{d}x. \quad (12)$$

Центральным моментом k-го порядка μ_k случайной величины X азывается математическое ожидание величины $(X - MX)^k$, т.е.

$$\mu_k = M\left[(X - MX)^k\right]. \quad (13)$$

Для дискретной случайной величины

$$\mu_k = \sum_i (x_i - MX) p_i; \quad (14)$$

для непрерывной

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k p(x) \mathrm{d}x. \quad (15)$$

При $k = 1$ имеем $\mu_1 = M(X - MX) = 0$, при $k = 2$ получаем $\mu_2 = M(X - MX)^2 = DX$.

Асимметрией называется выражение

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (16)$$

а *эксцессом*

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (17)$$

Асимметрия характеризует степень отклонения плотности вероятности от симметричной. Эксцесс характеризует остроту пика максимума плотности вероятности.

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Из партии в 20 изделий, среди которых имеются 5 нестандартных, выбирают случайным образом для проверки их качества 3 изделия. Найти математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение для случайной величины X нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

2. Автомобиль проезжает подряд три светофора, дающие независимо друг от друга зеленый сигнал в течение 1.5 мин. и красный в

течение 1.2 мин. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины X числа остановок автомобиля.

3. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<1; \\ a+b\arcsin x, & \text{при} \quad -1\le x\le 1; \\ 1, & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Найти параметры a и b, MX и DX.

Лекция 29

Принятие решений в условиях неопределенности

Вводятся матрицы последствий и рисков; изучается принятие решений в условиях полной и частичной неопределенности; рассмотрен байесовский подход к принятию решений.

1°. Матрицы последствий и рисков. Для разрешения проблем, встающих перед коллективом, руководитель (менеджер) обязан принимать некоторые решения. В теории принятия решений есть специальный термин: ЛПР – *лицо, принимающее решение.*

Принять решение – это решить некоторую экстремальную задачу, т.е. найти экстремум некоторой целевой функции при определенных ограничениях. Например, математическое программирование представляет целый класс таких экстремальных задач. Позже для принятия решений будет рассмотрено так называемое стохастическое программирование, которое использует методы теории вероятностей и математической статистики.

Не все случайное “измеряется” вероятностью. Неопределенность есть более широкое понятие. Неопределенность того, какой цифрой вверх ляжет игральный кубок, отличается от неопределенности того, каково будет состояние экономики Республики Беларусь через 25 лет. Короче говоря, уникальные единичные случайные явления связаны с неопределенностью, массовые случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.

Пусть ЛПР рассматривает несколько возможных решений $i = 1, 2, ..., m$. Ситуация неопределенна, т.е. имеется в наличии какой-то из вариантов $j = 1, 2, ... n$. Если будет принято i-ое решение, а ситуация есть j-ая, то фирма, возглавляемая ЛПР, получит доход q_{ij}. Матрица $Q = (q_{ij})$ называется *матрицей последствий* или *матрицей возможных решений.* Возникает естественный вопрос: какое решение нужно принять ЛПР? В этой ситуации полной неопределенности можно высказать лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты ЛПР, так как многое будет зависеть, например, от его склонности к риску. Но как оценить риск в данной ситуации?

Допустим, что нужно оценить риск, который несет i-ое решение, хотя неизвестна реальная ситуация. Но если бы ее знали, то выбрали бы наилучшее решение, т.е. приносящее наибольший доход, а это значит при j-ой ситуации было бы принято решение, дающее доход $g_j = \max q_{ij}$. Значит, принимая i-ое решение, мы рискуем получить не q_j, а только q_{ij}, т.е. принятие i-го решения несет риск недобрать $r_{ij} = q_j - q_{ij}$. Матрица $R = (r_{ij})$ называется *матрицей рисков.*

▷ ***Пример 1.*** Пусть матрица последствий $Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 6 \\ 8 & 5 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Составить матрицу рисков.

Решение. Имеем $q_1 = \max_i q_{i1} = 8$, $q_2 = 5$, $q_3 = 8$, $q_4 = 10$. Следовательно, матрица рисков $R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. □

Несомненно, что риск – одна из важнейших категорий предпринимательской деятельности, неотъемлемая черта этой деятельности. Риск – понятие многогранное и далее нам придется не раз с ним встретиться.

2°. Принятие решений в условиях полной неопределенности. Некоторыми ориентирами могут служить следующие правила-рекомендации.

Правило Вальда (правило крайнего пессимизма). Рассматривая i-ое решение, считаем, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход $a_i = \min_j q_{ij}$. Теперь выберем решение i_0 с наибольшим a_{i_0}. Итак, правило Вальда рекомендует принять такое решение i_0, что $a_{i_0} = \max_i a_i = \max_i\left(\min_j q_{ij}\right)$.

Для примера 1 имеем: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 1$, $a_{i_0} = \max\{1, 3, 4, 1\} = 4$. Значит, правило Вальда рекомендует принять третье решение.

Правило Сэвиджа (правило минимального риска). При использовании этого правила анализируем матрицу рисков $R = (r_{ij})$. Рассматривая i-ое решение, считаем, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i = \max_j r_{ij}$. Но теперь уж выбираем решение i_0 с наименьшим b_{i_0}. Таким образом, правило Сэвиджа рекомендует принять такое решение i_0, что $b_{i_0} = \min_i b_i = \min_i\left(\max_j r_{ij}\right)$.

В частности, для примера 1 имеем: $b_1 = 9$, $b_2 = 4$, $b_3 = 4$, $b_4 = 6$, $b_{i_0} = \min\{9, 4, 4, 6\} = 4$. Значит, правило Сэвиджа рекомендует второе или третье решение.

Правило Гурвица (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации). Принимается решение i, на котором достигается максимум $\left(\lambda \min_j q_{ij} + (1-\lambda)\max_j q_{ij}\right)$, где $0 \le \lambda \le 1$. Значение λ выбирается из субъективных соображений. Если λ приближается к единице, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении λ к нулю правило Гурвица приближается к так называемому правилу “розового оптимизма”.

Для примера 1 при $\lambda = \frac{1}{2}$ правило Гурвица рекомендует третье решение.

3^0. Принятие решений в условиях частичной неопределенности. Допустим, что в рассматриваемой схеме известны вероятности p_j того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Такое положение называют *частичной неопределенностью*. В этом случае для принятия решения можно выбрать одно из следующих правил.

Правило максимизации среднего ожидаемого дохода. Доход, который получит фирма при реализации i-го решения, является случайной величиной Q_i с рядом распределения $\begin{array}{|c|c|c|}\hline q_{i_1} & \dots & q_{i_n} \\ \hline p_1 & \dots & p_n \\ \hline\end{array}$. Математическое ожидание MQ_i и есть средний ожидаемы доход, который обозначим $\overline{Q_i}$. Итак, правило рекомендует принять решение, которое приносит максимальный средний ожидаемый доход.

Пусть, например, в схеме из п. 2 вероятности p_j следующие: $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{6}$, $p_3 = \frac{1}{6}$, $p_4 = \frac{1}{6}$. Тогда $\overline{Q_1} = \frac{23}{6}$, $\overline{Q_2} = \frac{31}{6}$, $\overline{Q_3} = \frac{43}{6}$, $\overline{Q_4} = \frac{19}{6}$. Максимальный средний ожидаемый доход равен $\frac{43}{6}$ и он соответствует третьему решению.

Правило минимизации среднего ожидаемого риска. Риск фирмы при реализации i-го решения является случайной величиной R_i с рядом распределения $\begin{array}{|c|c|c|}\hline r_{i_1} & \dots & r_{i_n} \\ \hline p_1 & \dots & p_n \\ \hline\end{array}$. Математическое ожидание MR_i – средний ожидаемый риск $\overline{R_i}$. Правило рекомендует принять решение с минимальным средним ожидаемым риском.

При указанных выше вероятностях для примера 1 получим: $\overline{R_1} = 4$, $\overline{R_2} = \frac{8}{3}$, $\overline{R_3} = \frac{2}{3}$, $\overline{R_4} = \frac{14}{3}$. Минимальный средний ожидаемый риск равен $\frac{2}{3}$ и соответствует третьему решению.

Отметим, что иногда в условиях полной неопределенности применяют *правило Лапласа равновозможности*, которое состоит в том, что в приведенной схеме вероятности p_j считают равными и после этого выбирают какое-нибудь из двух сформулированных выше правил-рекомендаций принятия решений.

4⁰. Риск как среднее квадратическое отклонение. Дадим еще одно понятие риска. Рассмотрим какую-нибудь операцию, доход которой есть случайная величина Q, а $\overline{Q} = MQ$ – средний ожидаемы доход. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_Q = \sqrt{DQ} = \sqrt{M\left[\left(Q - \overline{Q}\right)^2\right]}$ – это мера разбросанности возможных значений дохода вокруг среднего ожидаемого дохода. Найдем риски r_i (в новом определении) доходов Q_i для примера 1 с вероятностями p_j из п. 3.

Ряды распределения, средние ожидаемые доходы и новые риски:

$$Q_1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 8 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}, \overline{Q_1} = \frac{23}{6} \approx 3.83 \ , \ r_1 \approx 2.2 \ ;$$

$$Q_2 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 3 & 7 & 6 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}, \ \overline{Q_2} = \frac{31}{6} \approx 5.16 \ , \ r_2 \approx 1.2 \ ;$$

$$Q_3 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 5 & 4 & 10 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}, \ \overline{Q_3} = \frac{43}{6} \approx 7.16 \ , \ r_3 \approx 2.1 \ ;$$

$$Q_4 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 4 & 8 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}, \ \overline{Q_4} = \frac{19}{6} \approx 3.16 \ , \ r_4 \approx 2.3 \ .$$

Нанесем средние ожидаемые доходы и риски на плоскость – доход $\overline{Q} = q$ откладываем по горизонтали, а риски – по вертикали (рис. 29.1).

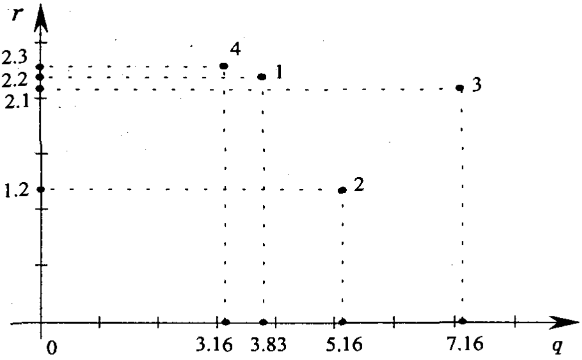


Рис. 29.1

Получили четыре точки. Чем правее точка $(q; r)$, тем более доходная операция, чем точка выше – тем более она рисковая. Значит, нужно выбирать точку правее и ниже. Точка $(q'; r')$ доминирует точку $(q; r)$, если $q' \geq q$ и $r' \leq r$.

В нашем случае вторая операция доминирует первую и четвертую; третья доминирует также первую и четвертую. Но вторая и третья операции несравнимы – доходность третьей больше, но риск ее тоже больше.

Точка, не доминирующая никакой другой, называется *оптимальной по Парето*, а множество всех таких точек называется *множеством оптимальности по Парето* (см. Л. 21). Ясно, что если из рассмотренных операций надо выбирать лучшую, то ее обязательно надо выбрать из операций, оптимальных по Парето.

Для нахождения лучшей операции иногда применяют подходящую взвешивающую формулу, которая для пар $(q; r)$ дает одно число и определяет лучшую операцию. Например, если взять взвешивающую формулу $E(\overline{Q}, r) = 5\overline{Q} - r$, то в рассматриваемом выше случае имеем: $E(\overline{Q_3}, r_3) = 35.8 - 2.1 = 33.7$, $E(\overline{Q_2}, r_2) = 25.8 - 1.2 = 24.6$, и лучшей в указанном смысле будет третья операция.

5⁰. Байесовский подход к принятию решений. Рассмотрим следующий пример.

▷ ***Пример 2.*** Экспериментатор показал два совершенно одинаковых на вид мешочка и сказал, что в одном 80 % белых фасолин и 20 % коричневых (назовем этот мешочек белым), а в другом 80 % коричневых фасолин и 20 % белых (назовем этот мешочек коричневым). Затем он унес оба мешочка, потом вернулся с одним и предложил угадать какой это мешочек. Если угадаете, то получаете 10 долл., не угадаете – ничего не получите. Ясно, что ваш выигрыш V случаен и имеет ряд распределения

10	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

. При этом средний выигрыш в расчете на одну игру равен $MV = \overline{V} = 10 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 5$ долл. Через некоторое время экспериментатор усложнил игру. Он предложил вам вытащить одну фасолину, увидеть ее цвет и после этого сказать, какой это мешочек. Но за это он попросил уплатить предварительно 1 долл. Возникает вопрос: надо ли платить?

Решение. Подсчитаем, надо ли платить. Теперь мы уже не будем наугад говорить, какой мешочек перед нами, а скажем, что перед нами мешочек цвета вытащенной фасоли (это называется "решающее правило"). Какова вероятность угадывания? Ясно, что эта вероятность равна вероятности вытащить из мешочка фасолину того же цвета и, очевидно, равна 0.8 □

В примере 2 – суть байесовского подхода к принятию решения.

Допустим, что предприниматель раздумывает над выбросом на рынок нового перспективного товара. Но он не знает, "пойдет" ли товар. Для уточнения ситуации он производит пробную партию и смотрит, как она раскупается. После этого ситуация становится более определенной, т.е. более прогнозируемой. Для уточнения ситуации можно выпустить еще одну пробую партию и проанализировать какие-нибудь другие моменты.

В общем, байесовский подход выглядит так. Пусть имеется вероятностный прогноз ситуации S: $P(S = H) = p$. Имея такой прогноз, можно найти средний ожидаемый доход $\overline{Q}$ или средний ожидаемый риск $\overline{R}$ и т.д. Рассмотрим возможность проведения пробной операции, которая может уточнить распределение вероятностей $\{p_j\}$, и новое распределение вероятностей есть $\{p'_j\}$. Новому распределению вероятностей соответствуют новый ожидаемый доход $\overline{Q'}$, средний ожидаемый риск $\overline{R'}$ и т.д. Если ЛПР решит, что при таком уточнении пробная операция оправдывается (например, если увеличение среднего ожидаемого дохода превышает затраты на проведение пробной операции), то он ее проводит. Новое распределение вероятностей $\{p'_j\}$ обычно находят по формулам Байеса.

Задания для самостоятельной работы

1. Для матриц последствий $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

составить матрицу рисков и определить какие решения рекомендуют правила Вальда, Сэвиджа, Гурвица при $\lambda = \frac{1}{4}$.

2. Пусть в случае матрицы A_1 распределение вероятностей следующее: $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{2}$. Найти решение, максимизирующее средний ожидаемый доход, минимизирующее средний ожидаемый риск. Пробная операция сместила распределение вероятностей так: $p'_1 = \frac{1}{8}$, $p'_2 = \frac{1}{8}$, $p'_3 = \frac{3}{4}$. При какой стоимости пробной операции ее проведение целесообразно, если в качестве критерия взять средний ожидаемый доход?

3. Рассмотреть три различных операции со случайным доходом.

Q_1:

−5	0	−5	10
0.1	0.2	0.5	0.2

; Q_2:

−5	0	5	10
0.3	0.2	0.2	0.3

;

Q_3:

−5	0	−5	10
0.3	0.2	0.2	0.3

;

Вычислить для всех операций ожидаемый доход $\overline{Q}$, среднее квадратическое отклонение *r*. Изобразить указанные операции графически и с помощью взвешивающей формулы $E(\overline{Q}, r) = 10\overline{Q} - r$ найти лучшую и худшую операции.

Лекция 30

Основные вероятностные распределения

Изучены биномиальный закон распределения, распределение Пуассона, равномерное и показательное распределения; введено понятие функции надежности системы.

1°. Биномиальный закон распределения. Биномиальный закон есть закон распределения числа успехов в n независимых испытаниях Бернулли.

Дискретная случайная величина X распределена по биномиальному закону, если она принимает целые значения $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ с вероятностями, определяемыми формулой Бернулли

$$P\{X = m\} = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{1}$$

где $0 \le p \le 1$, $p + q = 1$.

При этом $\sum\limits_{m=0}^{n} p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию введенного распределения. Для этого рассмотрим функцию

$$f(p) = \sum_{m=0}^{n} p^m q^{n-m} = (p+q)^n.$$

Дифференцируя эту функцию по p, получим

$$\sum_{m=1}^{n} m p^{m-1} q^{n-m} = n(p+q)^{n-1} \to \sum_{m=0}^{n} m p^m q^{n-m} = np(p+q)^{n-1}. \tag{2}$$

Так как $p + q = 1$, а левая часть (2) есть MX, то будем иметь

$$MX = np. \tag{3}$$

Продифференцировав равенство (2) по p и умножив результат на p, получим

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 p^m q^{n-m} = np\left[(p+q)^{n-1} + p(n-1)(p+q)^{n-2}\right],$$

а так как $p + q = 1$, то $M(X^2) = np[1 + p(n-1)]$.

Тогда дисперсия равна

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np(1-p) = npq,$$

$$DX = npq\,. \qquad \textbf{(4)}$$

▷ ***Пример 1.*** В цехе находятся 10 станков, каждый из которых находится в рабочем состоянии с вероятностью 0.9. Каково среднее значение работающих станков?

Решение.

$$m = np = 10 \cdot 0.9 = 9\,. \ \square$$

2^0. Закон Пуассона. Рассмотрим следующую задачу: счетчик улавливает космические частицы, которые появляются независимо друг от друга, причем вероятность появления одной частицы за время Δt равна $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, $\lambda > 0$, а вероятность появления двух и более частиц равна $o(\Delta t)$. Требуется найти вероятность $p_k(t)$ появления k частиц за время наблюдений t.

Пусть $\{k,t\}$ – событие, заключающееся в том, что в течении времени t счетчик зарегистрирует ровно k частиц. Тогда, очевидно,

$$P\{k,t+\Delta t\} = P\{k,t\}P\{0,\Delta t\} + P\{k-1,t\}P\{1,\Delta t\} + P\{l,\Delta t, l \ge 2\}\,.$$

Отсюда следует уравнение для $p_k(t)$:

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t)(1 - p_1(\Delta t) + o(\Delta t)) + p_{k-1}(t)p_1(\Delta t) + o(\Delta t) \to$$

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_{k-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t) \to$$

$$\frac{p_k(t+\Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\,.$$

Устремив $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение для $p_k(t)$ $(k > 0)$:

$$p'_k(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t)\,. \qquad \textbf{(5)}$$

При $k = 0$ получается уравнение

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t)\,. \qquad \textbf{(6)}$$

Легко проверить, что решением системы уравнений (5), (6) при начальных условиях $p_0(0) = 1$, $p_k(0) = 0$ $(k > 0)$ будут функции

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\,.$$

При $t = 1$ получим формулу Пуассона

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \qquad (7)$$

Случайная величина X называется *распределенной по закону Пуассона*, если она принимает целые неотрицательные значения k с вероятностями p_k, определяемыми формулой (7).

Заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$.

Найдем числовые характеристики этого распределения.

$$MX = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda \cdot 1 = \lambda .$$

Для вычисления дисперсии рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda .$$

Дифференцируя это равенство по λ, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2 \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} - \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right) = 1 \to$$

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda = 1 \to \frac{1}{\lambda} M(X^2) - \lambda = 1 \to M(X^2) = \lambda(1 + \lambda).$$

Тогда дисперсия DX будет равна:

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda .$$

Таким образом, для закона Пуассона математическое ожидание и дисперсия равны параметру распределения:

$$MX = \lambda , \quad DX = \lambda . \qquad (8)$$

▷ ***Пример 2.*** При движении по проселочной дороге автомобиль испытывает в среднем 60 толчков в течении 1 часа. Какова вероятность того, что за 30 с. не будет ни одного толчка?

Решение. Число толчков в течении времени t есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λt, где $\lambda = 1$, t (мин.). Тогда

$$p_k=\frac{e^{-\lambda}(\lambda t)^k}{k!};\; p_0=e^{-\lambda t}=e^{-\frac{1}{2}}=0.61.\; \square$$

3°. Равномерное распределение. Случайная величина X называется *равномерно распределенной* на отрезке $[a,b]$, если ее функция распределения есть

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases} \tag{9}$$

Плотность распределения равномерной случайной величины есть

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & x<a,\quad x>b.\end{cases} \tag{10}$$

На рис. 30.1 приведены графики функций $F(x)$ и $p(x)$.

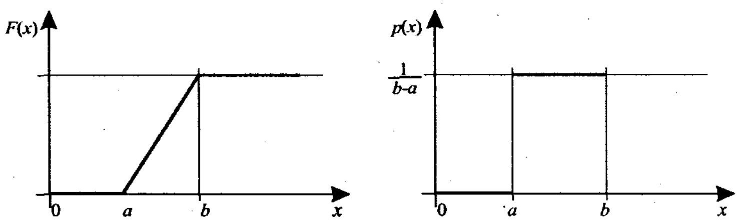


Рис. 30.1

Из выражения для плотности видно, что для равномерно распределенной случайной величины вероятность попадания в любой интервал, содержащийся в $[a,b]$, пропорциональна длине этого интервала.

Найдем числовые характеристики распределения.

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b x\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2}; \tag{11}$$

$$M\left(X^2\right)=\int_a^b\frac{1}{b-a}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Тогда

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad \textbf{(12)}$$

▷ ***Пример 3.*** Интервал движения троллейбуса равен 15 минут. Какова вероятность того, что пассажир, приходя на остановку троллейбуса в случайный момент времени, будет ожидать транспорт не более 5 минут? Найти среднее время ожидания.

Решение. Пусть X – время ожидания. Очевидно, случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0,15]$. Тогда

$$P\{X < 5\} = F(5) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \text{ а } MX = \frac{0+15}{2} = 7.5 \text{ (мин)}. \ \square$$

4⁰. Показательное распределение. Показательное распределение является одним из основных распределений в теории массового обслуживания и теории надежности. Функция распределения в этом случае имеет вид

$$F(x) = P\{X < x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0, \qquad \textbf{(13)}$$

где $\lambda > 0$, а плотность вероятности

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \qquad \textbf{(14)}$$

Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots$ случайные моменты времени, в которые происходит некоторое событие A (например, отказ некоторой системы), а X – случайная величина – число появлений события A за время t. Поток событий называется *простейшим*, если X распределена по закону Пуассона.

Найдем вероятность того, что время до появления первого события будет меньше t.

$$P\{\nu_1 < t\} = 1 - P\{\nu_1 \ge t\} = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

т.е. момент времени ν_1 распределен по показательному закону. Можно показать, что в случае простейшего потока все интервалы между наступлениями события A, т.е. величины $\nu_{k+1} - \nu_k$ также распределены по показательному закону.

Вычислим числовые характеристики распределения.

$$MX=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda}, \quad (15)$$

$$M(X^2)=\int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}\,dx=\frac{2}{\lambda^2},$$

$$DX=M(X^2)-(MX)^2=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \quad (16)$$

Для показательного распределения математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение равны $\frac{1}{\lambda}$, где $0<\lambda$ – параметр распределения.

5^0. Функция надежности. Пусть ν – момент отказа некоторой технической системы. Функция надежности $R(t)$ определяется как вероятность того, что система будет работать безотказно до момента времени t, т.е.

$$R(t)=P\{\nu>t\}. \quad (17)$$

В частности, если поток отказов простейший, то случайная величина ν распределена по показательному закону и

$$R(t)=\lambda e^{-\lambda t}. \quad (18)$$

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. В цехе имеются 6 одинаковых станков, коэффициент использования каждого из которых равен 0.7. Найти вероятность того, что в некоторый момент работают 3 станка.

2. Среднее число вызовов на АТС за время t = 5 мин. равно 30. Найти вероятность того, что за 1 мин. поступит не более двух вызовов.

3. На остановке человек ожидает автобуса. Для поездки ему подходят 2 маршрута, интервал движения автобусов одного маршрута – 30 мин., а второго –15 мин. Какова вероятность, что его время ожидания не превосходит 5 мин.?

4. Для зерноуборочного комплекса момент отказа считается распределенным по показательному закону. В технической документации устанавливается норма надежности: в 90% случаях отказ не должен происходить в течение 80 часов работы. Найти среднее время безотказной работы и функцию надежности комплекса.

■ Лекция 31

Нормальное распределение

Рассмотрен закон нормального распределения, вычислены его основные характеристики и приведен способ их оценки.

1°. Функция распределения и плотность. Нормальное распределение играет наиболее значительную роль в прикладных задачах теории вероятностей и в частности в экономике. Случайная величина X называется распределенной по нормальному закону с параметрами a и σ (записывают $X \in N(a, \sigma)$), если ее функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}t\,. \tag{1}$$

В соответствии с этим, плотность вероятности нормально распределенной величины будет равна

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{2}$$

Покажем, что функция (2) действительно является плотностью, т.е. что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Пусть $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}t$, после замены $u = \frac{t-a}{\sigma}$ получим $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \mathrm{d}t$. Вычислим выражение

$$I^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t_1^2}{2}} \mathrm{d}t_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t_2^2}{2}} \mathrm{d}t_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}} \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\,.$$

Рассматриваем последний интеграл как двойной и сделаем в нем переход к полярным координатам, $t_1 = r\cos\varphi$, $t_2 = r\sin\varphi$. Якобиан преобразования равен r. Получим

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \mathrm{d}r^2 =$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cdot 2e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{\infty}=1\to I=1\,.$$

Графики функции распределения $F(x)$ и $f(x)$ плотности имеют вид, показанный на рис. 31.1.

При больших σ кривая плотности становится более поло-

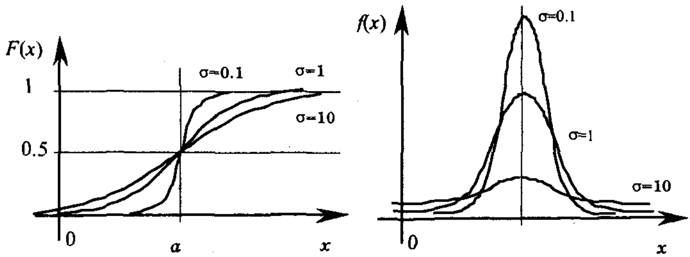


Рис. 31.1

гой, а чем меньше σ, тем острее пик функции в точке $x = a$, при $\sigma\to 0$ $f(x)\to\delta(x-a)$, $\delta(x)$ – функция Дирака.

Если $a = 0$, $\sigma=1$, то говорят, что $X(X_0)$ имеет *стандартное нормальное распределение*. В этом случае функция распределения $F(x)$ ($F(x)=\frac{1}{2}+\Phi(x)$)и плотность $\varphi(x)$ определяются так:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,,\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,. \qquad \textbf{(3)}$$

Функция $\Phi(x)$ называется *стандартной функцией Лапласа*, а $\varphi(x)$ часто называют *малой функцией Лапласа*. Значения этих функций при $x\geq 0$ приведены в таблицах нормального распределения. Очевидно, $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. При пользовании таблицами следует отличать $\Phi(x)$ от функции $\widetilde{F}(x)$, которая определяется как

$$\widetilde{F}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,. \qquad \textbf{(4)}$$

Функция $F(x)$ равна вероятности $P\{X < x\}$ и на рис. 31.2 представлена площадью заштрихованной области от $-\infty$ до x, а $\widetilde{F}(x)$ равна $P\{-x < X < x\}$ и представлена площадью криволинейной трапеции от $-x$ до x.

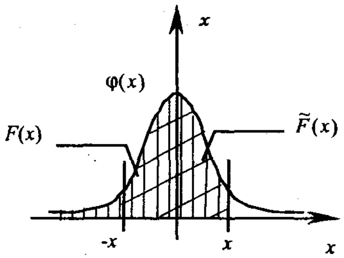


Рис. 31.2

Связь между функциями $\Phi(x)$ и $\widetilde{F}(x)$ выражается формулами

$$\Phi(x) = \frac{\widetilde{F}(x)}{2}, \quad \widetilde{F}(x) = 2\Phi(x). \qquad \textbf{(5)}$$

Таким образом, получаем

$$P\{|X| < x\} = \widetilde{F}(x) = 2\Phi(x). \qquad \textbf{(6)}$$

Если $P\{X_0 < t\} = \alpha$, то $t = F^{-1}(\alpha)$ и значение t называется *квантилем* распределения уровня α. Из (5) следует, что если $\widetilde{F}(t) = \alpha$, то t является квантилем уровня $\dfrac{1+\alpha}{2}$.

Из примера Л. 27.2 следует, что если $X_0 \in N(0,1)$, то $X = \sigma X_0 + a \in N(a,\sigma)$. Обратно, если $X \in N(a,\sigma)$, то $X_0 = \dfrac{(X-a)}{\sigma} \in N(0,1)$.

▷ ***Пример 1.*** В технических приложениях часто встречается "*правило трех сигм*", согласно которому значениями нормальной случайной величины, отличающимися от среднего значения больше чем на 3σ, пренебрегают. Найдем вероятность этого события.

$$P\{|X-a|>3\sigma\}=1-P\left\{\left|\frac{X-a}{\sigma}\right|<3\right\}=1-P\{|X_0|<3\}=$$

$$=1-\widetilde{F}(3)=1-0.9973=0.0027. \ \square$$

2^0. Параметры нормального распределения. Вычислим числовые характеристики нормального распределения.

$$MX=M(\sigma X_0+a)=\sigma MX_0+a=a+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=a,$$

так как подинтегральная функция нечетная. Очевидно, что $MX_0=0$.

$$M(X^2)=M\left[(\sigma X_0+a)^2\right]=M(\sigma^2X_0^2+2a\sigma X_0+a^2)=\sigma^2M(X_0^2)+2a\sigma MX_0+$$

$$+Ma^2=\sigma^2M(X_0^2)+a^2=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x+a^2=-\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2}}+a^2=$$

$$=\left[-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x+a^2=\sigma^2+a^2.$$

Тогда $DX=M(X^2)-(MX)^2=\sigma^2+a^2-a^2=\sigma^2$.

Таким образом,

$$MX=a,\quad DX=\sigma^2. \tag{7}$$

Параметры a и σ нормального распределения равны математическому ожиданию и среднеквадратичному отклонению. Для определения закона нормального распределения достаточно найти параметры a и σ, так как они однозначно определяют плотность распределения.

Путем несложных вычислений можно показать, что асимметрия и эксцесс для нормального распределения равны нулю. Эти параметры характеризуют меру отклонения распределения случайной величины от нормального.

▷ ***Пример 2.*** Отклонения диаметров подшипников от своего номинального значения подчинены нормальному закону. Выборочные данные показали, что в 90 % случаев эти отклонения не превосходят 1.5 Мк. Определить величину рассеивания значений диаметров.

Решение. Из условия задачи следует, что $P\{|X - MX| \le 1.5\} = 0.9$. Тогда

$$P\left\{\left|\frac{X - MX}{\sigma}\right| \le \frac{1.5}{\sigma}\right\} = 0.9 \to P\left\{|X_0| \le \frac{1.5}{\sigma}\right\} = 0.9 .$$

Используя таблицу П. 2, находим $\frac{1.5}{\sigma} = 1.65$, откуда $\sigma = 0.91$. □

3°. Определение характеристик нормального распределения. На практике параметры нормального распределения, как и любого другого, находятся по экспериментальным данным. Пусть имеется выборка из n значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайной величины $X \in N(a, \sigma)$. Эти значения можно рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные величины. В качестве оценок для a и σ естественно взять величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 . \tag{8}$$

Посмотрим, насколько хороши такие оценки. Считая x_i случайными величинами, получим, что $\bar{x}$ и $\hat{\sigma}^2$ также есть некоторые случайные величины.

Определим их средние значения.

$$M\bar{x} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i = \frac{1}{n} na = a .$$

Среднее значение оценки совпадает с истинным значением, такую оценку считаем удовлетворительной. Далее, пусть $y_i = x_i - a$, тогда y_i также будут независимыми случайными величинами со средними $My_i = 0$ и дисперсиями $Dy_i = \sigma^2$. Вычислим

$$M\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = M\sum_{i=1}^{n}\left(y_i + a - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k + a)\right)^2 = M\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2 =$$

$$= M\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2 - \frac{2}{n} y_i \sum_{k=1}^{n} y_k + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^{n}\left[My_i^2 - \frac{2}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_i y_k \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{n}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} M(y_k y_l)\right] = n\sigma^2 - \frac{2n}{n}\sigma^2 + \frac{1}{n} n\sigma^2 = (n-1)\sigma^2,$$

так как $M(y_i y_j) = My_i My_j = 0$.

Поэтому $M\hat{\sigma}^2 \neq \sigma^2$ и оценку $\hat{\sigma}^2$ из (8) следует подправить. В качестве оценки для σ^2 берут величину

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2, \tag{9}$$

тогда $Ms^2 = \sigma^2$.

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами 1, 0.5. Найти вероятности $P\{X > 0\}$, $P\{0 \le X < 2\}$.

2. Нагрузка на вал двигателя распределена по нормальному закону с параметрами $a = 450$, $\sigma = 30$. Найти пределы, в которых изменяется нагрузка с вероятностью 0.9.

3. Случайная величина $X > 0$ распределена по логарифмически нормальному закону, если ее логарифм есть нормальная случайная величина.

Пусть $\ln X \in N(a,b)$. Найти MX, DX.

Лекция 32

Закон больших чисел и локальные предельные теоремы

Доказано неравенство Чебышева и установлен закон больших чисел; сформулирован усиленный закон больших чисел; приведены локальная предельная теорема Муавра-Лапласа и теорема Пуассона.

1°. Неравенство Чебышева. Нормальный закон является универсальным в том смысле, что при сложении большого числа достаточно произвольных случайных величин получается нормальное распределение. Этот факт устанавливают так называемые законы больших чисел.

Для доказательства важных теорем закона больших чисел выведем сначала неравенство Чебышева.

Неравенство Чебышева.

Пусть X произвольная случайная величина со средним MX и конечной дисперсией DX. Тогда

$$P\{|X-MX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (1)$$

Доказательство (для непрерывной случайной величины с плотностью p(x)).

$$DX=M\left[(X-MX)^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2p(x)\,\mathrm{d}x=\int_{|x-MX|<\varepsilon}(x-MX)^2p(x)\,\mathrm{d}x+$$

$$+\int_{|x-MX|\geq\varepsilon}(x-MX)^2p(x)\,\mathrm{d}x\geq\int_{|x-MX|\geq\varepsilon}(x-MX)^2p(x)\,\mathrm{d}x\geq\varepsilon^2\int_{|x-MX|\geq\varepsilon}p(x)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\varepsilon^2P\{|X-MX|\geq\varepsilon\}.$$

Отсюда следует неравенство (1). □

2°. Закон больших чисел в форме Чебышева.

Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ попарно независимы и их дисперсии ограничены одним и тем же числом c. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k\right| < \varepsilon\right\} \to 1. \qquad \textbf{(2)}$$

Доказательство. Обозначим $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Тогда $MY_n = M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k$ и, так как X_k попарно независимы, то

$$DY_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k \le \frac{1}{n^2} nc = \frac{c}{n}.$$

Применим к случайной величине Y_n неравенство Чебышева.

$$P\{|Y_n - MY_n| \ge \varepsilon\} \le \frac{DY_n}{\varepsilon^2} \le \frac{c}{n\varepsilon^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда

$$P\{|Y_n - MY_n| < \varepsilon\} = 1 - P\{|Y_n - MY_n| \ge \varepsilon\} \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Подставляя вместо Y_n и MY_n их выражения, получим соотношение (2). В частном случае, если все X_k одинаково распределены и $MX_k = a$, то из (2) получим

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right\} \to 1. \qquad \textbf{(3)}$$

Тогда говорят, что *последовательность случайных величин* $\{Y_n\} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right\}$ *стремится к своему среднему значению* a *по вероятности*, □

3⁰. Теорема Бернулли.

Пусть имеется n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p, где m – число успехов, а $q = 1 - p$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\to 1,\ n\to\infty, \qquad (4)$$

т.е. частота события A стремится к его вероятности при неограниченном увеличении числа испытаний.

Эта теорема дает обоснование стохастическому определению вероятности, т.е. при больших n за вероятность события можно принять его частоту.

Доказательство. Рассмотрим неравенство Чебышева для схемы независимых испытаний Бернулли. Здесь m – число успехов, и, заменяя в (1) ε на $n\varepsilon$, получим

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (5)$$

Переходя в (5) к пределу при $n\to\infty$, получим теорему Бернулли. □

▷ ***Пример 1.*** При штамповке пластинок из пластмассы по данным ОТК брак составляет 3 %. Оценить вероятность того, что при просмотре партии в 10000 пластинок, выявится отклонение от установленного процента брака меньше, чем на 1 %.

Решение. Здесь следует определить

$$p_0=P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\} \text{ при } p=0.03,\ \varepsilon=0.01,\ n=1\,000.$$

По теореме Бернулли искомая вероятность

$$p_0>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}, \text{ где } \frac{pq}{n\varepsilon^2}=\frac{0.03\cdot 0.97}{1\,000\cdot 0.01^2}=0.291.$$

Получаем $p_0\geq 0.709$. □

4°. Усиленный закон больших чисел. Закон больших чисел (2) утверждает, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}MX_k\to 0 \qquad (6)$$

по вероятности. Усиленный закон больших чисел утверждает, что соотношение (6) выполняется с вероятностью 1, т.е.

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}MX_k\to 0\right\}=1. \qquad (7)$$

Вывод этого закона опускаем.

5°. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа. Рассмотрим n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p и неуспеха q. Пусть X есть число успехов в n испытаниях. Вероятность $P_n(m)=P\{X=m\}$ выражается формулой Бернулли, Л. 24.1. Однако, при больших n вычисления по этой формуле становятся практически невозможными. Для вычисления вероятностей $P_n(m)=p_n^m$ используют предельные теоремы.

Предельная теорема Муавра-Лапласа.

При $n\to\infty$

$$\lim\left(p_n^m:\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\right)=1, \qquad (8)$$

где $x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ *равномерно для всех* m, *для которых* x *находится в конечных пределах* $a\le x\le b$.

▷ ***Пример 2.*** При массовом производстве изделий при штамповке вероятность брака равна 0.7. Какова вероятность того, что из 100 взятых наугад изделий окажется 20 бракованных?

Решение. Непосредственный подсчет вероятности $C_{100}^{20}0.2^{20}0.8^{80}$ весьма затруднителен. Используем предельную теорему Муавра-Лапласа. Тогда

$$P_{100}(20)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{100\cdot 0.2\cdot 0.8}}\exp\left\{\frac{20-100\cdot 0.2}{\sqrt{100\cdot 0.2\cdot 0.8}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 4}=0.0997.$$

□

6°. Теорема Пуассона. Если в серии испытаний Бернулли $p=p_n$ зависит от номера испытаний таким образом, что $np_n\to a$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left[P_n(k)-\frac{a^k e^{-a}}{k!}\right]=0 . \qquad \textbf{(9)}$$

Доказательство. Имеем

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{a}{n}\right)^k\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^k}\to\frac{a^k}{k!}e^{-a}\ \text{при}\ n\to\infty .$$

□

Из этой теоремы следует, что если p мало, а n велико, как что $np\cong a$, то

$$P_n(k)=\frac{a^k e^{-a}}{k!} . \qquad \textbf{(10)}$$

▷ ***Пример 3.*** Завод отправил потребителю партию из 200 изделий. Вероятность повреждения в пути равна 0.01. Найти вероятность того, что поврежденных изделий будет не более 3.

Решение. Здесь p = 0.01, n = 200, и для вычисления вероятностей применим теорему Пуассона.

$$a=np=2 ;$$

$$P\{\mu\le 3\}=\sum_{k=0}^{3}P_5(k)=e^{-2}+2e^{-2}+2e^{-2}+\frac{4}{3}e^{-2}=\frac{19}{3e^2}=0.857 .$$ □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Число телевизоров повышенного качества составляет в среднем 40 % общего их выпуска. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что в партии из 500 телевизоров доля повышенных по качеству отличается от средней не более, чем на 0.06.

2. Вероятность изготовления размеров деталей в пределах допуска равна 0.85. Найти вероятность того, что из 100 деталей половина окажется в номинале.

3. В порту каждые сутки может появиться одно большегрузное судно с вероятностью $p = \frac{1}{30}$. Вероятность появления более одного судна пренебрежимо мала. Найти вероятность того, что за месяц (30 дней) порт посетят не более 5 судов.

■ Лекция 33

Центральная предельная теорема. Применения закона больших чисел и центральной предельной теоремы

Сформулированы центральная предельная теорема (ЦПТ) и ее следствие – интегральная теорема Муавра-Лапласа; указаны применения закона больших чисел и ЦПТ.

1°. Центральная предельная теорема. Эта теорема устанавливает предельное распределение сумм большого числа случайных величин и ее простейшая форма следующая.

Пусть $X_1,\ldots,X_i,\ldots$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины, $MX_i=a$, $DX_i=\sigma^2$ $(i=1,2,\ldots)$; $Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_n$. Тогда при $n\to\infty$ равномерно по α и β имеем

$$P\left(\alpha\le\frac{Y_n-na}{\sigma\sqrt{n}}\le\beta\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Это значит, что закон распределения случайной величины $\frac{Y_n-na}{\sigma\sqrt{n}}$ неограниченно приближается к нормальному закону с параметрами 0, 1. Итак, универсальность нормального закона распределения заключается в том, что *при соответствующей нормировке последовательность независимых случайных величин стремится к нормальному закону.*

▷ ***Пример 1.*** Количество тонн цемента, взятое за день с цементного склада, является случайной величиной с рядом распределения

0	20	40
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

. С какой вероятностью 2 000 т цемента хватит на квартал (90 дней)?

Решение. Пусть X_i – случайное количество цемента, взятое в i-ый день со склада. Считаем, что эти величины независимы и одинаково распределены с указанным выше рядом распределения. Тогда $MX_i = 20$, $DX_i = 200$. В соответствии с ЦПТ закон распределения их суммы за квартал Y_{90} – приближенно нормальный с параметрами $M(Y_{90}) = 90 \cdot 20 = 1\,800$, $D(Y_{90}) = 90 \cdot 200 = 18\,000$ и $\sigma_{Y_{90}} = \sqrt{18\,000} \cong 134$.

Следовательно, $P(Y_{90} \le 2000) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{2000 - 1800}{134}\right) \cong 0.93$, где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t. \quad \square$$

2⁰. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Оказывается, что при больших n нормированное биноминальное распределение стремится к нормальному. Этот факт отражает интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа, являющаяся следствием ЦПТ.

Пусть имеется n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p; m – число успехов. Тогда для любых α и β при $n \to \infty$ справедливо

$$P\left\{\alpha \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \beta\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \tag{2}$$

Для доказательства этой теоремы отметим, что число m можно представить суммой n независимых и одинаково распределенных случайных величин, после чего надо воспользоваться ЦПТ.

Используя соотношение (2), получим несколько формул, удобных для практических вычислений вероятностей при больших n.

Преобразовывая события в левой части (2), находим:

$$P\{\alpha \le m \le \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{2}\left[\tilde{F}\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \tilde{F}\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right)\right], \tag{3}$$

$$P\{|m - np| < \alpha\} = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{npq}}\right) = \tilde{F}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{npq}}\right), \tag{4}$$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\alpha\right\}=2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)=\widetilde{F}\left(\alpha\sqrt{\frac{pq}{n}}\right). \qquad \textbf{(5)}$$

Здесь $\widetilde{F}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

▷ ***Пример 2.*** Вероятность попадания в цель из скорострельного орудия равна 0.8. Найти вероятность того, что при 900 выстрелах число попаданий будет заключено в границах от 690 до 740.

Решение. Имеем: $p=0.8$; $q=0.2$; $n=900$; $\alpha=690$; $\beta=740$.

Тогда $\frac{\beta-np}{\sqrt{npq}}=\frac{740-900\cdot 0.8}{\sqrt{900\cdot 0.8\cdot 0.2}}=\frac{740-720}{12}\cong 1.667$; $\frac{\alpha-np}{\sqrt{npq}}=$

$=\frac{690-720}{12}=-2.5$.

Из формулы (3) получаем

$P\{690\le m\le 740\}=\Phi(1.667)-\Phi(-2.5)=0.905-(1-0.988)=0.893$. □

▷ ***Пример 3.*** При вытачивании болтов наблюдается в среднем 10 % брака. Исследуется партия из 400 болтов. Найти с вероятностью 0.9 пределы, в которых заключено число бракованных болтов в этой партии.

Решение. Используем формулу (4). Здесь $p=0.1$; $q=0.9$; $n=400$; $p_0=0.9$.

Тогда $np=40$; $\sqrt{npq}=\sqrt{400\cdot 0.1\cdot 0.9}=6$; $\widetilde{F}\left(\frac{\alpha}{36}\right)=0.9$.

Используя таблицу П. 2, определим $\frac{\alpha}{36}=1.64$, т.е. $\alpha=59.04$. С требуемой вероятностью p_0 имеем $|m-np|<\alpha$, т.е. $|m-40|<59.04\to 0<m<100$. □

▷ **Пример 4**. Каково должно быть n, чтобы с вероятностью p_0 отклонение частоты от вероятности появления события A в n испытаниях Бернулли в вероятностью успеха p не превосходила ε ?

Решение. Из таблиц функции $\widetilde{F}(x)$ по заданной вероятности p_0 определим квантиль t_{p_0} функции $\widetilde{F}(x)$, т.е. такое значение t_{p_0}, что $\widetilde{F}(t_{p_0}) = p_0$. Из формулы (5) получим $\varepsilon\sqrt{\frac{pq}{n}} = t_{p_0}$, откуда находим n. □

Рассмотрим некоторые применения закона больших чисел и ЦПТ.

3⁰. Усреднение влияния независимых факторов. Закон больших чисел утверждает, что при очень большом числе случайных явлений их результат перестает быть случайным и может быть представлен с большей степенью определенности.

Пусть, например, крупный банк ведет множество финансовых операций: на межбанковском рынке кредитует другие банки и сам занимает деньги, принимает и выдает вклады физических лиц, продает и покупает акции и облигации и т. п. При этом проигрыш по некоторым направлениям компенсируется выигрышем на других, что обеспечивает банку устойчивое финансовое положение.

Указанная стратегия банка представляет, по существу, единственный разумный вариант на финансовом рынке. Научное название этого принципа – *принцип диверсификации* (“разнообразия”). Он означает, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом операции, тогда убытки от одних операций будут более или менее покрыты прибылью от других операций. Отметим, что следование этому принципу не принесет максимально большого дохода, но зато обеспечит устойчивую работу, некоторый средний доход и убережет от больших убытков.

Математическим выражением этого принципа является следующее **утверждение**: *пусть* $X_1,\dots,X_n$ *– независимые, одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием* a *и средним квадратическим отклонением* σ. *Пусть* X *– их среднее арифметическое; тогда* $MX = a$, $\sigma_X = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Если случайные величины X_i трактовать как случайные доходы от некоторых независимых и примерно одинаковых по масштабам операций, а среднее квадратическое отклонение как величину риска, то получаем следующий **вывод о диверсификации**: *при усреднении результатов независимых и примерно одинаковых по масштабности операций средний доход также усредняется, а риск однозначно уменьшается, т.е. диверсификация ведет к усреднению дохода и к уменьшению риска.*

Рассмотрим, например, две независимые операции со случайным доходом: $Q_1 = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 10 & 20 \\ \hline 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.3 \end{vmatrix}$, $Q_2 = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 10 & 20 \\ \hline 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{vmatrix}$.

Вычислим средние доходы и риски: $\overline{Q_1} = 10$, $DQ_1 = 80$, $\sigma_1 \cong 8.9$; $\overline{Q_2} = 10$, $DQ_2 = 100$, $\sigma_2 = 10$. Вместо проведения только одной какой-нибудь операции (на обе не хватает средств), вложим половину денег в каждую операцию, т.е. проведем операцию $Q = 0.5Q_1 + 0.5Q_2$. Получаем $\overline{Q} = 10$, $DQ = \frac{1}{4}DQ_1 + \frac{1}{4}DQ_2 = \frac{180}{4} = 45$. Значит, $\sigma_Q = \sqrt{45} \cong 6.4$. Итак, ожидаемый средний доход остался прежним, а риск стал меньше минимального из рисков операций.

4^0. Страхование. Поясним некоторые термины страхования. *Страхователь* (или застрахованный) – тот, кто страхуется. *Страховщик* – тот, кто страхует.

Страховая сумма – сумма денежных средств, на которую застраховано имущество, жизнь, здоровье страхователя. Эта сумма выплачивается страховщиком страхователю при наступлении страхового случая. Размер страховой суммы зависит от очень многих обстоятельств и варьируется в весьма широких пределах. Выплата страховой суммы называется *страховым возмещением.*

Страховой тариф – плата с единицы страховой суммы. Тариф состоит из нетто-ставки, предназначенной для выплат страховых сумм, и нагрузки к нетто-ставке, необходимой для обеспечения рентабельности работы страховщика. Плата со всей страховой суммы называется *страховым платежом* – платится страхователем страховщику.

Теория страхования базируется на следующей аксиоме.

Аксиома.

Среднее суммарное страховое возмещение (по всем страховым *договорам) должно быть равно суммарным страховым платежам по нетто-ставкам.*

Пусть, например, разрабатывается кампания по страхованию дачных домиков от пожара сроком на один год на одну и ту же сумму S в дачном товариществе. Предполагаем, что будет заключено довольно много договоров страхования. Какую назначить нетто-ставку и нагрузку к ней?

Считаем для простоты, что все n членов товарищества заключат договоры страхования, а вероятность сгореть за год одна и та же для всех домиков и равна p. Определим случайную величину X_i, принимающую два значения 1 и 0 в зависимости от того, сгорит ли i-ый домик или нет. Тогда все X_i независимы, одинаково распределены с рядом распределения $\left|\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline p & q \end{array}\right|$, математическим ожиданием $M(X_i) = p$ и дисперсией $D(X_i) = pq$.

Число домов, сгораемых в данном товариществе за год, есть случайная величина $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Имеем $MX = np$, $DX = npq$, $\sigma_X = \sqrt{npq}$, и по ЦПТ случайная величина X распределена по нормальному закону.

Суммарное страховое возмещение $Z = XS$, где S – страховая сумма. Математическое ожидание Z будет $MX \cdot S = npS$, и столько же страховщик должен получить со всех страхователей; значит, нетто-ставка равна $\dfrac{npS}{nS} = p$.

Итак, по крайней мере, в теоретическом плане нетто-ставка есть вероятность страхового случая.

Определим нагрузку к нетто-ставке. Так как суммарное страховое возмещение $Z = XS$ – случайная величина, то при страховом тарифе t, равном нетто-ставке p, страховщик получит со всех страхователей сумму $E = pnS$. Из свойств нормального распределения $P\{Z > E\} = \dfrac{1}{2}$. Другими словами, в половине случаев страховщик будет в убытке. Естественно ему это не подходит, и он сам должен "подстраховаться", т.е. он должен назначить тариф t больше, чем нетто-ставка. Пусть страховщик задался вероятностью γ того, чтобы суммарное страховое возмещение оказалось меньше суммарных страховых платежей $E_t = tnS$. Тогда нужно найти t из условия $P(Z < E_t) = \gamma$. Имеем

$$P\{Z < E_t\} = P\{XS < tnS\} = P\{X < tn\} = \Phi\left(\frac{nt - np}{\sqrt{npq}}\right) + \frac{1}{2},$$

т.е. $\Phi\left(\frac{nt - np}{\sqrt{npq}}\right) = \gamma - \frac{1}{2}$. Отсюда получаем $\frac{(t-p)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} = \nu$, значит,

$t = p + \frac{\nu\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$, где значение ν определяется из равенства $\Phi(\nu) = \gamma - \frac{1}{2}$.

Последняя формула и есть основа для формирования тарифа. При этом в среднем суммарные страховые платежи превысят суммарное страховое возмещение на величину $\frac{nS\nu\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} = S\nu\sqrt{npq}$, с учетом которой тариф может еще увеличиться или уменьшиться для обеспечения необходимой рентабельности работы страховщика.

Реально страховщик не располагает величиной p, а знает только статистику числа сгоревших дачных домиков в этом товариществе в разные годы, т.е. он имеет ряд $x_1, \ldots, x_l$ числа сгоревших домиков. Поэтому приходится неизвестные величины, т.е. прежде всего p, заменять их статистическими оценками. В частности, вместо p используется ее оценка-частота $\hat{p} = \frac{x_1 + \ldots + x_l}{l}$.

В реальности страховщики действуют от достигнутого. Это значит, что в зависимости от конкретных обстоятельств они увеличивают или уменьшают тариф. Например, если предстоящее лето прогнозируется очень жарким и сухим, то тариф может быть увеличен.

В заключение этого пункта отметим, что вопросами страхования жизни и здоровья людей занимается так называемая *актуарная математика*, которая представляет собой серьезную и строгую теорию.

✍ Задания для самостоятельной работы

1. Найти вероятность того, что при 900 бросаниях монеты число гербов будет менее 450.

2. Из 900 малых предприятий, каждое в течение года может обанкротиться с вероятностью 0.2. Найти вероятность того, что число действующих малых предприятий в конце года будет заключено в пределах от 690 до740.

3. При массовом производстве продукции 5 % выходит в брак. Сколько изделий нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0.99 можно было утверждать, что среди них доля брака отличается от 5 % не более чем на 1 %.

4. Каждый двадцатый кредит не возвращается в срок. В этом году банк планирует выдать около 300 кредитов. Найти вероятность того, что только не более 10 кредитов не будут возвращены в срок.

5. Каждый десятый проданный телевизор возвращают обратно в магазин. В прошедший месяц было продано примерно 1000 телевизоров. Найти вероятность того, что возвращено будет не менее 70 телевизоров.

■ Лекция 34

Системы случайных величин

Изучены системы случайных величин, ковариация и корреляция, функции случайных величин.

1°. Системы случайных величин. Часто результат опыта описывается не одной случайной величиной X, а несколькими случайными величинами $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

В этом случае говорят, что *указанные случайные величины образуют систему* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Систему двух случайных величин (X, Y) можно изобразить случайной точкой на плоскости.

Событие, состоящее в попадании случайной точки $(X; Y)$ в область D обозначим в виде $(X; Y) \subset D$.

Закон распределения системы двух дискретных случайных величин можно задать в виде таблицы 1.

Таблица 1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\ldots$	p_{mn}

Здесь $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$; p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$, т.е. $p_{ij} = P\{X = x_i;\ Y = y_j\}$; при этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Закон распределения системы непрерывных случайных величин (X, Y) будем задавать с помощью плотности вероятности $f(x,y)$.

Вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в область D определяется равенством

$$P\{(X;Y)\subset D\}=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Функция $f(x,y)$ обладает следующими **свойствами**:

1⁰. $f(x,y)\geq 0$.

2⁰. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$.

Если все случайные точки $(X;\ Y)$ принадлежат некоторой конечной области D_0, то условие 2^0 примет вид $\iint\limits_{D_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$.

Математические ожидания дискретных случайных величин X и Y, входящих в систему, определяются так:

$$m_X=MX=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i p_{ij}\,,\ \ m_Y=MY=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_j p_{ij}\,, \qquad \textbf{(1)}$$

а соответствующие характеристики непрерывных случайных величин – по формулам

$$m_X=MX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \ m_Y=MY=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad \textbf{(2)}$$

Точку $(m_X;m_Y)$ называют *точкой рассеивания системы случайных величин* (X,Y).

Отметим, что если случайные величины X и Y независимы и известны их законы распределения, то математические ожидания m_X и m_Y можно найти проще, если использовать соответствующие формулы из Л. 28.

Дисперсии дискретных случайных величин X и Y определяются формулами

$$DX=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(x_i-m_X)^2\,,\ \ DY=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(y_j-m_Y)^2\,, \qquad \textbf{(3)}$$

а дисперсии непрерывных случайных величин X, Y, входящих в систему, находятся по формулам

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\quad DY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-m_Y)^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \qquad \mathbf{(4)}$$

Средние квадратичные отклонения случайных величин X и Y определяются так:

$$\sigma_X=\sqrt{DX}\,,\ \sigma_Y=\sqrt{DY}\,. \qquad \mathbf{(5)}$$

Для дисперсий можно использовать также формулы из Л. 28:

$$DX=M(X^2)-(MX)^2,\ DY=M(Y^2)-(MY)^2\,.$$

▷ ***Пример 1.*** Пусть (X,Y) имеет следующую таблицу распределения:

X \ Y	-1	0	1
0	0	0.1	0.5
1	0.2	0.1	0.1

Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y.

Решение. Имеем:

$$m_X=0\cdot 0+1\cdot 0.2+0\cdot 0.1+1\cdot 0.1+0\cdot 0.5+1\cdot 0.1=0.4\,;$$

$$m_Y=-1\cdot 0+0\cdot 0.1+1\cdot 0.5-1\cdot 0.2+0\cdot 0.1+1\cdot 0.1=0.4\,.$$

От системы величин (X,Y) перейдем к системе центрированных величин $(\tilde{X},\tilde{Y})$, где $\tilde{X}=X-m_X=X-0.4$, $\tilde{Y}=Y-m_Y=Y-0.4$.

Составим таблицу

$\tilde{X}$ \ $\tilde{Y}$	-1.4	-0.4	0.6
-0.4	0	0.1	0.5
0.6	0.2	0.1	0.1

Получаем:

$$DX=(-0.4)^2\cdot 0+(0.6)^2\cdot 0.2+(-0.4)^2\cdot 0.1+(0.6)^2\cdot 0.1+$$
$$+(-0.4)^2\cdot 0.5+(0.6)^2\cdot 0.1=(0.6)^2\cdot 0.4+(0.4)^2\cdot 0.6=0.24\,;$$

$$DY = (-1.4)^2 \cdot 0.2 + (0.4)^2 \cdot 0.2 + (0.6)^2 \cdot 0.6 = 0.392 + 0.032 + 0.216 = 0.64 .$$

□

2°. Ковариация и корреляция. Важную роль в теории систем случайных величин играет так называемый *корреляционный момент* (*ковариация*)

$$\operatorname{cov}(X, Y) = K_{XY} = M\big[(X - m_X)(Y - m_Y)\big].$$

Для дискретных случайных величин корреляционный момент находится по формуле

$$K_{XY} = \sum_m \sum_n (x_n - m_X)(y_m - m_Y) p_{nm} ,$$

а для непрерывных

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y .$$

Случайные величины X и Y называют *некоррелированными*, если их корреляционный момент K_{XY} равен нулю, и *коррелированными* – в противном случае.

По свойствам математического ожидания

$$M\big[(X - m_X)(Y - m_Y)\big] = M(XY - m_X Y - m_Y X + m_X m_Y) =$$
$$= M(XY) - m_X MY - m_Y MX + m_X m_Y = M(XY) - m_X m_Y .$$

Такое выражение для корреляционного момента иногда удобнее для вычислений, и отсюда следует, что независимые случайные величины некоррелированы.

Если корреляционный момент положителен, то случайные величины называются *положительно коррелированными*, если отрицателен – то *отрицательно коррелированными*.

Вместо корреляционного момента часто удобно использовать *коэффициент корреляции*

$$k_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} ,$$

являющийся безразмерной величиной.

Если случайные величины X и Y связаны точной линейной зависимостью $Y = aX + b$, то $k_{XY} = \operatorname{sgn} a$, т.е. $k_{XY} = 1$ при $a > 0$ и $k_{XY} = -1$ при $a < 0$.

Вообще, как легко видеть, коэффициент корреляции удовлетворяет условию $-1 \le k_{XY} \le 1$.

▷ ***Пример 2.*** Найти коэффициент корреляции k_{XY} для случайных величин X, Y из примера 1.

Решение. Найдем $M(XY)$. Для этого переберем все клетки таблицы, перемножим значения компонент X, Y и вероятности, записанные в этих клетках, и все эти произведения сложим. Тогда, $M(XY) = 0+0+0+(-1)\cdot 0.2+0+1\cdot 0.1 = -0.1$. Значит, $K_{XY} = M(XY) - m_X m_Y = -0.1 - 0.16 = -0.26$. Теперь получаем $k_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \dfrac{-0.26}{\sqrt{0.64\cdot 0.24}} \cong -0.66$. □

3⁰. Функции случайных величин. Пусть X – случайная величина, а $y = \varphi(x)$ – обычная функция, область определения которой содержит множество значений случайной величины X. Тогда $Y = \varphi(X)$ – случайная величина, являющаяся функцией от случайной величины X, которая свои значения y принимает так: $y = \varphi(x)$, где x – какое-то значение, принятое в ходе опыта случайной величиной X.

Говорят также, что X есть *аргумент функционально зависимой случайной величины* Y.

Возникает задача: как, зная распределение случайного аргумента X, определить закон распределения функции $Y = \varphi(X)$? Если X – дискретная случайная величина, то это сделать нетрудно; а если X – непрерывная случайная величина, то это сложнее, и на этот счет справедлива следующая теорема.

Теорема.

Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, а $\varphi(x)$ – монотонная дифференцируемая функция; тогда плотность распределения случайной величины $Y = \varphi(X)$ есть

$$g(y)=f(\psi(y))|\psi'(y)|,$$

где $\psi(y)$ *– функция, обратная к* φ.

Математическое ожидание случайной величины $Y=\varphi(X)$ находится так: $MY=\sum_i \varphi(x_i)p_i$, если случайная величина X дискретна;

$MY=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x$, если X непрерывна и ее плотность есть $f(x)$.

▷ ***Пример 3.*** За каждый процент перевыполнения плана полагается 40 руб., а за каждый процент недовыполнения заработок уменьшается на 30 руб., но не более, чем на 100 руб. Найти ожидаемый размер премии, если прогноз выполнения плана следующий:

96	97	98	99	100	101	102	103
0.01	0.02	0.03	0.2	0.2	0.2	0.2	0.14

Каков ожидаемый размер премии, если известно, что план выполнен?

Решение. Найдем ожидаемый размер премии Y. Это есть функция от процента выполнения плана. К прогнозу выполнения плана снизу пристраиваем еще одну строку значений Y (руб.).

96	97	98	99	100	101	102	103
0.01	0.02	0.03	0.2	0.2	0.2	0.2	0.14
-100	-90	-60	-30	0	40	80	120

Имеем: $MY=\frac{(-100-180-180-600+800+1600+1680)}{100}=30.2$ руб. □

В заключение данной лекции отметим, что зависимость между случайными величинами подробно будет рассмотрена позже в Л.43.

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Дана таблица, определяющая закон распределения системы двух случайных величин (X,Y):

$X \backslash Y$	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Найти:

1) коэффициент λ;

2) математические ожидания m_X и m_Y;

3) дисперсии σ_X^2 и σ_Y^2;

4) коэффициент корреляции k_{XY}.

2. Дана случайная величина X с рядом

−4	−1	1	3	4	6
0.1	0.2	0.1	0.1	0.4	0.1

распределения. Составить ряды распределения случайных величин $Y = 2X$ и $Y = X^2$; вычислить математическое ожидание и дисперсию этих случайных величин; построить графики их функций распределения.

■ Лекция 35

Системы массового обслуживания в экономике и финансах

Даны описания систем массового обслуживания, выведены формулы для расчета характеристик одноканальных и многоканальных систем.

1°. Структура и характеристики системы массового обслуживания. Одним из видов моделей, описывающих процессы в экономике и финансах, являются системы массового обслуживания. Ими можно описывать функционирование предприятий, банков, организаций сферы обслуживания, деятельность которых связана с исполнением каких-то однотипных операций.

Система массового обслуживания (СМО) включает в себя обслуживающие устройства, называемые *каналами обслуживания*, обрабатывающие поток заявок (требований), поступающий на ее вход в случайные моменты времени. После обслуживания канал освобождается и готов к приему новой заявки. Случайный характер поступления и обслуживания заявок может приводить к очередям или к простаиванию канала. Таким образом, в СМО имеются: *входящий поток заявок*, *очередь*, *поток необслуженных заявок*, *каналы обслуживания* и *выходной поток обслуженных заявок*. *Характеристиками СМО* являются вид потока заявок, число обслуживающих каналов, их производительность и правила организации работы СМО. В результате показатели эффективности функционирования СМО выражаются через параметры СМО и потока заявок, а также характера работы СМО. Наиболее характерный вид СМО – это когда все потоки событий (потоки заявок, потоки обслуживания заявок и др.) являются *пуассоновскими*, т.е. обладают свойствами *отсутствия* (для любых двух непересекающихся промежутков времени число событий, наступающих за один из них, не зависит от числа событий, наступающих за другой) и *ординарности* (вероятность наступления за малый промежуток времени более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления за этот промежуток одного события). Для простейшего пуассоновского потока промежутки между двумя событиями распределены по показательному закону.

2°. Одноканальная СМО с отказами. Система содержит один канал, на вход которого поступает пуассоновский поток требований, *ин-*

тенсивность которого (среднее число событий в единицу времени) равна λ.

Одноканальная СМО с отказами характеризуется двумя состояниями: E_0 – канал свободен и E_1 – канал занят. Переход из E_0 в E_1 происходит при поступлении требования, переход из E_1 в E_0 – при обслуживании требования. Плотности вероятностей перехода из E_0 в E_1 и из E_1 в E_0 равны λ и μ, т.е.

$P\{E_0 \xrightarrow{\Delta t} E_1\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$, $P\{E_1 \xrightarrow{\Delta t} E_0\} = \mu\Delta t + o(\Delta t)$ (см. рис. 35.1).

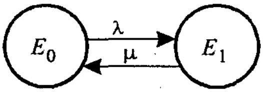


Рис. 35.1

Пусть $p_0(t)$ вероятность того, что в момент t система находится в состоянии E_0, а $p_1(t)$ – в состоянии E_1. Тогда

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)(1-\lambda\Delta t) + p_1(t)\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_1(t+\Delta t) = p_1(t)(1-\mu\Delta t) + p_0(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t),$$

откуда

$$\frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \to 0$ получим дифференциальное уравнение

$$p_0' = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \qquad (1)$$

Аналогично,

$$p_1'(t) = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t). \qquad (2)$$

Добавим к этим уравнениям условие $p_0(t) + p_1(t) = 1$ и начальные условия $p_1(0) = 0$, $p_0(0) = 1$.

Для решения этих уравнений перейдем к преобразованиям Лапласа.

$$P(s) = \int_0^\infty e^{-st} p(t)\mathrm{d}t, \text{ тогда } \int_0^\infty e^{-st} p'(t)\mathrm{d}t = p(0) + sP(s).$$

Учитывая начальные условия, из (1) и (2) получим

$$\begin{cases} 1+sP_0(s)=-\lambda P_0(s)+\mu\, P_1(s), \\ sP_1(s)=-\mu P_1(s)+\lambda\, P_0(s). \end{cases}$$

Решая эту алгебраическую систему уравнений, получим

$$P_0(s)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{s}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{s+\lambda+\mu},$$

$$P_1(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{s}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{s+\lambda+\mu}.$$

Находим обратные преобразования Лапласа. Так как

$$\frac{1}{s}\leftrightarrow 1,\ \frac{1}{s+a}\leftrightarrow e^{-at},\ \text{то}$$

$$p_0(t)=\frac{1}{\lambda+\mu}\left(\mu+\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right),\ p_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right). \qquad (3)$$

В установившемся режиме (при $t\to\infty$) получим

$$p_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu},\ p_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \qquad (4)$$

где $p_0=\lim\limits_{t\to\infty}p_0(t)$, $p_1=\lim\limits_{t\to\infty}p_1(t)$.

Используя предельные вероятности, выпишем основные характеристики эффективности функционирования СМО в установившемся режиме.

1. Вероятность того, что канал свободен $p_0=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$.

2. Вероятность того, что поступившая заявка будет принята к обслуживанию $p_{\text{об}}=p_0=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$.

3. Вероятность занятости канала $p_1=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

4. Вероятность отказа заявке $p_{\text{отк}}=p_1=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

5. Относительная пропускная способность канала (средняя доля обслуженных заявок среди поступивших) $Q = p_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$.

6. Абсолютная пропускная способность канала (среднее число обслуживаемых заявок в единицу времени) $A = \lambda Q = \lambda p_0 = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$.

7. Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок $\nu = A = \lambda p_0 = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$.

8. Среднее время обслуживания заявок $T_{об} = \dfrac{1}{\mu}$.

9. Среднее время пребывания заявок в системе $T_c = p_0 \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{(\lambda+\mu)}$.

▷ ***Пример 1.*** Пусть на телефонную линию филиала банка производительностью $\mu = 0.8$ вызовов/мин. и простейшим потоком обслуживания поступает простейший поток вызовов клиентов с интенсивностью $\lambda = 0.9$ вызовов/мин. Определить показатели эффективности работы линии, влияющие на итоговый доход филиала.

Решение. Математической моделью телефонной линии является одноканальная СМО с $\lambda = 0.9$ и $\mu = 0.8$. Используя приведенные формулы для показателей эффективности, получим:

вероятность того, что канал свободен $p_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} = 0.47$; вероятность занятости канала $p_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} = 0.529$; среднее время простоя канала $T_{пр} = \dfrac{1}{\lambda} = 1.1$ мин.; среднее время обслуживания $T_{об} = \dfrac{1}{\mu} = 1.25$ мин.; вероятность отказа $p_{\text{отк}} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} = 0.529$; абсолютная пропускная способность $A = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} = 0.424$.

Вероятность того, что канал занят, больше вероятности того, что канал свободен, т.е. $p_1 > p_0$, это происходит из-за того, что интенсивность входящего потока $\lambda = 0.9$ больше производительности канала $\mu = 0.8$. $\square$

3⁰. Многоканальная СМО с отказами. *Многоканальная СМО* определяется $n+1$ состояниями: E_k – в системе занято k каналов, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Вероятности переходов равны:

$$P\left\{E_k \xrightarrow{\Delta t} E_{k+1}\right\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t), \quad k = \overline{0, n-1};$$

$$P\left\{E_{k+1} \xrightarrow{\Delta t} E_k\right\} = k\mu\Delta t + o(\Delta t), \quad k = \overline{1, n},$$

а граф состояний имеет вид (см. рис. 35.2)

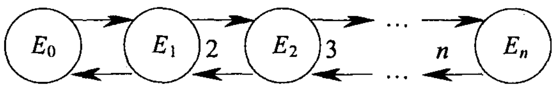


Рис. 35.2

Выведем дифференциальные уравнения для $p_k(t)$ – вероятности того, что занято k каналов.

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)(1-\lambda\Delta t) + p_1(t)\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\ldots$$

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t)(1-\lambda\Delta t - k\mu\Delta t) + p_{k-1}(t)\lambda\Delta t + p_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\ldots$$

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t)(1-n\mu\Delta t) + p_{n-1}\lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dots \\ p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \\ \dots \\ p_n'(t) = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t). \end{cases} \tag{5}$$

Кроме того, $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k(t) = 1$ и $p_0(0) = 1, p_k(0) = 0,\ k = \overline{1,n}$.

Предельные вероятности при $t \to \infty$ (p_k) удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \dots \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \\ \dots \\ \lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0, \end{cases} \tag{6}$$

так как $\lim\limits_{t\to\infty} p_k'(t) = 0$.

Для решения этой системы введем величины $a_k = -\lambda p_k - (k+1)\mu\, p_{k+1}$, тогда из (6) получим $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, значит

$$\lambda_k = (k+1)\mu\, p_{k+1},\ k = \overline{0, n-1}.$$

Тогда

$$p_{k+1} = \frac{\lambda}{\mu(k+1)} p_k = \frac{\lambda^2}{\mu^2(k+1)k} p_{k-1} = \dots = \frac{\lambda^{k-1}}{\mu^{k+1}(k+1)!} p_0$$

или

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{p_0}{k!},\ k = \overline{0,n}.$$

Так как $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$, то $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{p_0}{k!} = 1$, откуда

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{\mu^k k!}} \qquad (7)$$

и

$$p_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k! \sum\limits_{m=0}^{n} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!}}, \quad k = \overline{1,n}. \qquad (8)$$

Для многоканальной системы вероятность того, что требование получит отказ, равна вероятности того, что все каналы заняты,т.е. $p_{\text{отк}} = p_n$, а вероятность того, что оно будет обслужено $p_{\text{об}} = Q = 1 - p_n$. Среднее число занятых каналов будет равно

$$\overline{k} = \sum_{k=1}^{n} k p_k. \qquad (9)$$

Среднее число требований A, обслуживаемых СМО в течение единицы времени, будет равно

$$A = \lambda Q = \lambda(1 - p_n). \qquad (10)$$

4⁰. Другие разновидности СМО. Из множества видов СМО, в зависимости от условий их функционирования, рассмотрим следующие.

1. *СМО с ожиданием.* Если заявка поступит в момент, когда все n каналов заняты, то она становится в очередь и ожидает своего обслуживания. У такой системы бесконечно много состояний: E_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ – k каналов заняты и очереди нет, E_{n+k} $(k = 1, 2, \ldots)$ – все каналы заняты и в очереди находится k заявок. Граф состояний такой СМО изображен на рис. 35.3а).

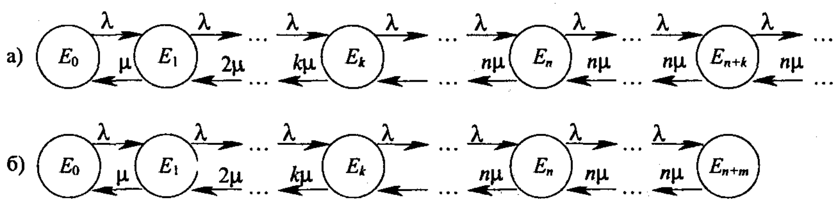


Рис. 35.3

2. *СМО с ожиданием и конечной очередью.* Здесь система такая же, как и в СМО с ожиданием, только требование теряется, если в очереди к моменту его поступления находится m требований. Граф состояний этой СМО показан на рис. 35.3б).

✍ Задание для самостоятельной работы

В офисе банка находятся трое служащих. Если клиент заходит в офис и все служащие заняты, то он уходит. Среднее количество клиентов, обращающихся в офис за 1 час, равно 5 чел. Определить: а) вероятность того, что клиент получит отказ $p_{отк}$ или будет обслужен $p_{об}$; б) среднее число клиентов A, обслуживаемых в течение 1 часа; в) среднее число занятых служащих.

■ Лекция 36

Стохастическое программирование

Рассмотрены различные виды задач стохастического программирования и приведен конкретный пример решения задачи СТП.

1°. Виды задач стохастического программирования. Значительная доля управленческих решений сводится к решению задач оптимизации выбора, управления и распределения ресурсов, математической моделью которых является задача линейного программирования, где переменные величины являются строго детерминированными. Однако, на практике такая определенность существует редко, так как часто бывают неизвестны сроки, условия и объемы поставок ресурсов и товаров, причем чем больше период планирования или прогнозирования, тем выше неопределенность в оценке ресурсов b_i, норм расхода a_{ij} и коэффициентов целевой функции c_j. Так как a_{ij}, b_i, c_j случайны, то ЛПР (лицо, принимающее решения) вынужден решать задачи не линейного, а *стохастического программирования* (СТП). Так как реализации случайных величин неизвестны, то используют характеристики случайных величин и законы их распределения. Задача стохастического программирования формулируется в трех ММ, МП или ПП постановках.

При *ММ постановке* целевая функция записывается в виде

$$F = M\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \to \max(\min)$$

или

$$F = \sum_{j=1}^{n} Mc_j \cdot x_j \to \max(\min). \qquad (1)$$

При ММ постановке для решения задачи требуется найти такие значения переменных x_j, при которых математическое ожидание целевой функции оптимально.

В этом случае ограничения записывают в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \le \overline{b_i}, \qquad (2)$$

где $\overline{a_{ij}}$, $\overline{b_i}$ – математические ожидания случайных величин a_{ij} и b_i. Из

(1) и (2) следует, что задача сводится к обычной задаче линейного программирования с заменой $c_j \to Mc_j$, $a_{ij} \to \overline{a_{ij}}$ и $b_i \to \overline{b_i}$.

В *МП постановке* целевая функция записывается в виде (1), а ограничения имеют вид

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right\} \ge g_i, \qquad (3)$$

т.е. вероятность выполнения каждого ограничения должна быть не менее заданной величины. Задачу, включающую условие (3), называют *задачей с вероятностными ограничениями.*

При *ПП постановке* вначале задается предельно допустимое наихудшее значение целевой функции. При максимизации задается минимально допустимое значение $F_{\min}$ и требуется выполнение условия $F \ge F_{\min}$. При минимизации задается максимально допустимое значение $F_{\max}$ и нужно выполнить условие $F \le F_{\max}$. Задача в ПП постановке состоит в том, чтобы найти такие ограниченные значения x_j $(d_j \le x_j \le D_j)$, при которых максимизируется вероятность того, что целевая функция будет не хуже предельно допустимого значения. Таким образом, задача СТП в ПП постановке формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} F = P\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge F_{\min}\right\} \to \max, \\ P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right\} \ge g_i, \\ d_j \le x_j \le D_j, \quad j=\overline{1,n}; \quad i=\overline{1,m}. \end{cases} \qquad (4)$$

Данные зависимости слишком сложны для вычислений даже для нормального распределения случайных величин и в дальнейшем не рассматриваются. Задача МП, определенная условиями (1), (2), также не решается в общем виде. Для решения задачи МП переходят к ее детерминированному эквиваленту.

Предположим, что величины a_{ij}, b_i, c_j подчиняются нормальному распределению и t_{g_i} – квантиль нормального распределения, соответствующий заданному уровню ограничений g_i.

Пусть $X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, тогда из (3) $P\{X_i \le b_i\} = P\{X_i - b_i \le 0\} =$

$$= P\left\{ \frac{X_i - MX_i - b_i + \overline{b_i}}{\sqrt{DX_i + Db_i}} \le \frac{-MX_i + \overline{b_i}}{\sqrt{DX_i + Db_i}} \right\} = g_i .$$

Так как случайная величина $\dfrac{X_i - MX_i - \left(b_i - \overline{b_i}\right)}{\sqrt{DX_i + Db_i}} \in N(0,1)$, то

$t_{g_i} = \dfrac{-MX_i + \overline{b_i}}{\sqrt{DX_i + Db_i}}$, откуда $MX_i = \overline{b_i} - t_{g_i}\sqrt{DX_i + Db_i}$, и получаем *детерминированный эквивалент задачи МП СТП* в виде:

$$\begin{cases} F = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_{ij}} x_j \to \max(\min), \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \le \overline{b_i} - t_{g_i}\left(\sum_{j=1}^{n} Da_{ij} \cdot x_j^2 + Db_i \right)^{\frac{1}{2}}; \\ d_j \le x_j \le D_j, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) является нелинейной, и для ее решения обычно используется метод линейной аппроксимации.

2^0. Анализ влияния случайностей на решение задач СТП. Проведем анализ модели (5). Для этого обозначим

$$z_i = t_{g_i}\left(\sum_{j=1}^{n} Da_{ij} \cdot x_j^2 + Db_i \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Отличие от задачи линейного программирования заключается в том, что ресурс $\overline{b_i}$ уменьшается на величину z_i, т.е. за принятие решений в условиях неопределенности приходится платить, и платой является необходимость в дополнительном ресурсе z_i (плата за риск). Для гарантии выпуска продукции в заданном объеме в условиях неопределенности предполагаемый ресурс необходимо увеличить на величину z_i, иначе может оказаться, что $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ge b_i$, что приведет к уменьшению выпуска продукции.

Из (6) видно, что на величину z_i влияют вероятностные характеристики: Da_{ij} – дисперсия значений норм расхода, Db_i – дисперсия ресурсов b_i. Увеличение заданного уровня вероятности g_i также ведет к увеличению z_i, что соответствует увеличению платы за неопределенность. Для определения степени влияния неопределенности на результаты решения задачи вводятся коэффициенты: относительное ухудшение β целевой функции

$$\beta = \frac{|F_0 - F|}{F_0} \cdot 100\,\% \tag{7}$$

и относительное увеличение ресурса (плата за неопределенность)

$$\gamma_i = \frac{z_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + z_i\right)} \cdot 100\,\%, \tag{8}$$

где F_0 и F соответственно значения целевой функции при $z_i = 0$ и в задаче СТП.

3⁰. Пример решения задачи СТП. Приведем пример задачи СТП вида МП, допускающей явное решение.

Рассмотрим задачу распределения двух видов ресурсов для выпуска двух типов продукции.

Пусть задана целевая функция

$$F = \overline{c_1} x + \overline{c_2} y \to \max, \quad \overline{c_1} = 2, \quad \overline{c_2} = 3,$$

а система ограничений имеет вид

$$P\{a_{11} x + a_{12} y \le b_1\} = 0.9;$$

$$P\{a_{21} x + a_{22} y \le b_2\} = 0.9; \quad 0 \le x \le 5, \quad y \ge 0,$$

где $Ma_{11} = 1$, $Ma_{12} = 4$, $Ma_{21} = 2$, $Ma_{22} = 1$; $Mb_1 = 5$, $Mb_2 = 10$; $Da_{ij} = 0.305$, $Db_i = 0.61$.

Для вероятности $g_i = 0.9$ находим квантиль $t_{g_i} = 1.28$. Тогда детерминированный вариант задачи будет иметь вид:

$$\begin{cases} F = 2x + 3y \to \max, \\ x + 4y \le 5 - 1.28\sqrt{0.305(x^2 + y^2) + 0.61}, \\ 2x + y \le 10 - 1.28\sqrt{0.305(x^2 + y^2) + 0.61}. \end{cases}$$

Решим неравенства ограничений.

$$\begin{cases} x + 4y \le 5 - \sqrt{0.5(x^2 + y^2) + 1}, \\ 2x + y \le 10 - \sqrt{0.5(x^2 + y^2) + 1} \end{cases} \to \begin{cases} \sqrt{0.5(x^2 + y^2) + 1} \le 5 - x - 4y, \\ \sqrt{0.5(x^2 + y^2) + 1} \le 10 - 2x - y. \end{cases}$$

При $x \le 5$, $y \ge 0$ имеем $5 - x - 4y \le 10 - 2x - y$, поэтому полученная система неравенств эквивалентна неравенству

$$\sqrt{0.5(x^2 + y^2) + 1} \le 5 - x - 4y \to (\text{при } x + 4y \le 5) \to 0.5(x^2 + y^2) + 1 \le$$

$$\le (5 - x - 4y)^2 \to x^2 + 31y^2 + 16xy - 20x - 80y + 48 \ge 0\,.$$

Приведем квадратичную форму в правой части последнего неравенства к каноническому виду, тогда

$$x_1^2 - y_1^2 \ge 3.523\,, \tag{9}$$

где

$$\begin{cases} x = x_1 - 1.3926y_1 + 0.3061, \\ y = 0.1741y_1 + 1.212. \end{cases}$$

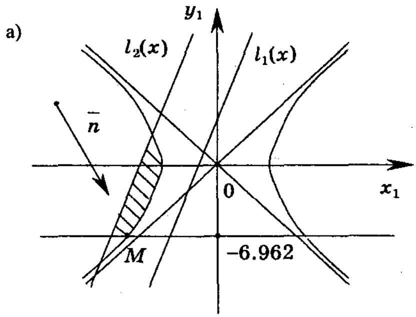
Неравенство (9) определяет область, ограниченную гиперболой.

Из условий $x + 4y \le 5$ и $y \ge 0$ получаем дополнительные ограничения на переменные x_1, y_1:

$$\begin{cases} 0 \le x_1 - 0.6962y_1 + 5.1541 \le 5, \\ 0.1741y_1 + 1.212 \ge 0, \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} 1.436x_1 + 7.403 \ge y_1 \ge 1.436x_1 + 0.221, \quad (l_1(x) \le y \le l_2(x)), \\ y_1 \ge -6.962. \end{cases}$$

Целевая функция в новых переменных равна $F = 2(x_1 - 1.3926y_1 +$



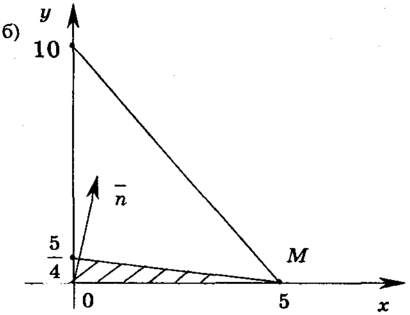


Рис. 36.1

$+0.3061)+3(0.1741y_1+1.212)=2x_1-2.263y_1+4.248\to\max$, что эквивалентно $F_1=2x_1-2.263y_1\to\max$. Так как $\bar{n}=\operatorname{grad}F=\operatorname{col}(2;-2.263)$, то, легко видеть, что точка максимума находится в точке M при $y_1=-6.962$, тогда $x_1=-\sqrt{3.523+48.469}=-7.211$ (рис. 36.1а).

При этом $F=-2\cdot 7.211+2.263\cdot 6.962+4.248=5.581$. Точка максимума исходной задачи СТП находится в точке M^* с координатами $x^*=-7.211+1.3926\cdot 6.962+0.3061=2.79$, $y^*=-0.1741\cdot 6.962+$ $+1.212=0.0001$.

Решим графическим методом задачу линейного программирования (рис. 36.1б).

$$F=2x+3y\to\max,$$

$$\begin{cases}x+4y\le 5;\\ 2x+y\le 10;\ 0\le x\le 5,\ y\ge 0.\end{cases}$$

Ограничениям удовлетворяет заштрихованная область, $\bar{n}=\operatorname{grad}F=\operatorname{col}(2;3)$. Очевидно, максимум F достигается в точке $M(5;0)$ и $F_{\max}=10$.

Из-за неопределенности возникло большое относительное ухудшение целевой функции

$$\beta=\frac{(10-5.581)}{10}\cdot 100=44.2\ \%.$$

Вычислим $z_i = \sqrt{0.5\left[(x^*)^2 + (y^*)^2\right] + 1} = 2.212$; $\sum_{j=1}^{2} \overline{a_{1j}} x_j = 2.79$;

$\sum_{j=1}^{2} \overline{a_{2j}} x_j = 5.58$; тогда относительные увеличения ресурсов будут равны

$\gamma_1 = \dfrac{2.212 \cdot 100}{2.79 + 2.212} = 44.2\ \%$; $\gamma_2 = \dfrac{2.212 \cdot 100}{5.58 + 2.212} = 28.4\ \%$ – такова плата за неопределенность данных.

✍ *Задание для самостоятельной работы*

Решить в ММ постановке задачу СТП распределения двух видов ресурсов для выпуска двух типов продукции с целевой функцией

$$F = 20x_1 + 25x_2 \to \max$$

и ограничениями (2), для которых $Ma_{11} = 3$, $Ma_{12} = 1$, $Ma_{21} = 4$, $Ma_{22} = 3$, $Mb_1 = 6$, $Mb_2 = 12$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

■ Лекция 37

Основные понятия математической статистики

Вводятся основные понятия математической статистики. генеральная и выборочная совокупности, вариационный ряд и рассматриваются их простейшие свойства

1°. Генеральная и выборочная совокупности. Основной задачей математической статистики является разработка методов исследования массовых явлений и процессов на основании некоторых наблюдений или эксперимента. Другими словами, требуется оценить характеристики генеральной совокупности по выборочным данным.

Под *генеральной совокупностью* подразумеваем все исходы случайного испытания, всю совокупность реализаций случайной величины X или всевозможные наблюдения интересующего нас показателя или, в этом случае говорят, параметра. Примером генеральной совокупности могут быть данные о доходах всех жителей республики, множество всех рыб в озере и т.д.

Генеральную совокупность можно изучать путем сплошного наблюдения ее объектов. Так поступают, например, в случае переписи населения страны. Однако чаще имеют дело лишь с некоторой частью возможных наблюдений, взятых из генеральной совокупности, т.е. имеют дело с выборочной совокупностью или выборкой. Таким образом, *выборка* – это множество наблюдений, составляющих лишь часть генеральной совокупности. Для иллюстрации введенных понятий рассмотрим следующую задачу.

Предприятие выпустило партию продукции, состоящую из N изделий. Некоторое число изделий из этой партии может иметь дефекты. Осматривать все изделия дорого и трудоемко. Поэтому из всей партии производится выборка из n элементов, и все изделия этой выборки подвергаются проверке. На основании полученных данных требуется сделать вывод о числе дефектных деталей во всей партии.

Таким образом, *задача математической статистики* состоит в том, чтобы исследовать свойства выборки и обобщить эти свойства на всю генеральную совокупность.

Заметим, что количество элементов генеральной или выборочной совокупности называют ее *объемом*. В приведенной выше задаче объем генеральной совокупности равен N, а объем выборки – n элементов.

Естественно предположить, что выборку целесообразно формировать случайным образом.

Выборка называется *случайной*, если каждый элемент генеральной совокупности имеет равные шансы попасть в выборку.

Случайные выборки подразделяют еще на повторные и бесповторные. Выборка называется *бесповторной*, если каждый отобранный элемент перед выбором следующего обратно в генеральную выборку не возвращается. Если же после извлечения элемента из генеральной совокупности он фиксируется и возвращается обратно, то это будет *повторная выборка*.

Подчеркнем, что *целью математической статистики* является получение выводов о параметрах, виде распределения и других свойствах случайных величин генеральной совокупности по конкретной выборке. Но всегда в этом случае возникает вопрос: насколько хорошо воспроизводит выборка характеристики генеральной совокупности?

Выборка называется *репрезентативной* (*представительной*), если она достаточно полно представляет изучаемые признаки и параметры генеральной совокупности. Понятие "достаточно полно представляет", безусловно, не является однозначным. В связи с этим заметим, что любая выборка, как правило, не дает точной характеристики всей генеральной совокупности. Но поскольку выборка является случайной, то к ней применимы положения и теоремы теории вероятностей. На основании закона больших чисел можно предполагать, что чем больше объем выборки, тем точнее будет она представлять генеральную совокупность. Требуемая точность представления по тем или иным параметрам и является условием для определения объема выборки.

2^0. Вариационный ряд и его характеристики. Предположим, что генеральная совокупность описывается случайной величиной X. Тогда выборку можно определить как совокупность

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

наблюдаемых значений случайной величины X, соответствующих n независимым повторениям экспериментов. Исходы испытаний можно представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

i	– номер испытания	1	2	$\cdots$	n
x_i	– исход испытания	x_1	x_2	$\cdots$	x_n

Такую таблицу называют *простым статистическим рядом*. Он является первичной формой представления статистических данных.

Простейшим способом организации данных в выборке является их группировка по возрастанию либо по убыванию. Если предположить, что

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n,$$

то последовательность (1) называют *вариационным рядом*, а члены этой последовательности – *вариантами*. Разность между максимальным и минимальным элементами называют *размахом выборки*.

Совокупность (1) может содержать равные между собой члены. Если подсчитать частоты, с которымивстречаются различные члены в последовательности (1), то можно составить следующую таблицу 2.

Таблица 2

$x^{(i)}$	– исход испытания	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$\cdots$	$x^{(k)}$
m_i	– частоты	m_1	m_2	$\cdots$	m_k

В данном случае варианты $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ являются различными и их располагают обычно в порядке возрастания.

Данные таблицы 2 иногда представляют графически следующим образом. Взяв на плоскости систему координат, на оси абсцисс откладывают варианты, а на оси ординат – частоты. В результате на плоскости получим систему из k точек: $(x^{(1)}; m_1)$, $(x^{(2)}; m_2)$, ..., $(x^{(k)}; m_k)$. Если соединить эти точки, то получим ломаную линию, которая называется *полигоном распределения* или *частотным полигоном*.

Объемом вариационного ряда называют число $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. Объем простого статистического ряда, очевидно, равен n. Числа m_i еще называют *абсолютными частотами*.

Относительными частотами рассматриваемого вариационного ряда называют числа $\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$. Легко видеть, что

$$\sum_{i}^{k} \omega_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} = 1.$$

Последовательность пар $\left(x^{(i)}, \omega_i\right)$ называют *статистическим распределением выборки*. Статистическое распределение также записывают в виде таблицы, первая сторона которой содержит различные варианты $x^{(i)}$, а вторая – их относительные частоты.

При неограниченном росте числа испытаний относительные частоты ω_i стремятся к вероятностям $p_i = P(x^{(i)})$ события $x^{(i)}$, а статистическое распределение выборки переходит в закон распределения дискретной случайной величины X.

Статистической (эмпирической) функцией распределения выборки называется функция $F_n(x)$, определяющая для всякого $x \in R$ относительную частоту события, т.е.

$$F_n(x) = \sum_{i:\, x_i < x} \frac{m_i}{n} = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le x_1; \\ \dfrac{m_1}{n}, & \text{при} \quad x_1 < x \le x_2; \\ \dfrac{m_1}{n} + \dfrac{m_2}{n}, & \text{при} \quad x_2 < x \le x_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{m_i}{n}, & \text{при} \quad x_{k-1} < x \le x_k; \\ 1, & \text{при} \quad x \ge x_k. \end{cases} \qquad (2)$$

Очевидно, статистическая функция распределения выборки (2) обладает *свойствами*:

а) $0 \le F_n(x) \le 1$, $x \in R$.

б) $F_n(x)$ – неубывающая функция.

в) $F_n(x) = 0$ при $x \le x_1$ и $F_n(x) = 1$ при $x \ge x_k$, x_1 и x_k – соответственно наименьшее и наибольшее значение вариант.

Эмпирическая (статистическая) функция распределения выборки характеризует, в некоторой мере, теоретическую функцию распределения генеральной совокупности.

Процедуру обработки данных выборочной совокупности рассмотрим на примере объема продаж телевизоров в универмаге за 10 рабочих дней. Пусть объемы продаж задаются следующей таблицей 3.

Таблица 3

i – порядковый номер дня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i – количество проданных телевизоров за день	6	6	4	5	7	5	6	5	2	4

Данная таблица представляет собой простой статистический ряд. Объем выборки равен 10. Теперь составим вариационный ряд. Он имеет вид

$$2,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6,\ 7.$$

Размах выборки, очевидно, равен 5. Подсчитав частоты, составим следующую таблицу 4:

Таблица 4

x_i – варианты	2	4	5	6	7
m_i – абсолютные частоты	1	2	3	3	1
ω_i – относительные частоты	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1
$F_n\left(x^{(i)}\right)$ – значения статистической функции распределения	0	0.1	0.3	0.6	0.9

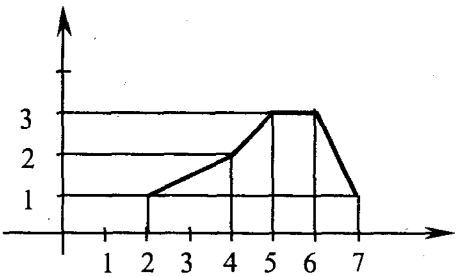


Рис. 37.1

Построим полигон распределения (рис. 37.1).

Легко строится также график статистической функции распределения (рис. 37.2).

Выше рассматривались дискретные вариационные ряды. Если же число вариант x_k велико или случайная величина X, описывающая выборку, является непрерывной, то отдельные значения изучаемой случайной величины объединяют в группы или интервалы,

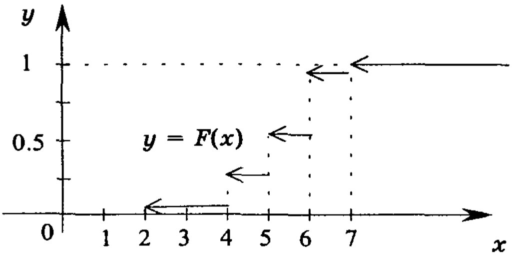


Рис. 37.2

указывая верхнюю и нижнюю границы каждого интервала. В этом случае говорят уже об интервальных вариационных рядах.

В качестве примера рассмотрим данные об активах (в млн. руб.) 40 крупнейших коммерческих банков России по состоянию на 01.07.1997 г. Вариационный ряд здесь будет выглядеть следующим образом:
324.6; 27.3; 24.1; 23.1; 22.1; 21.9; 18.0; 16.2; 13.9; 12.8; 12.7; 12.2; 11.9; 10.6; 9.9; 9.8; 9.8; 9.4; 8.9; 8.0; 8.0; 7.7; 7.6; 7.4; 7.0; 4.8; 4.7; 4.4; 4.1; 3.4; 3.2; 3.1; 3.1; 2.8; 2.5; 2.4; 2.4; 2.4; 2.3; 2.3.

Объем выборки $N = 40$, ее размах в этом случае равен

$$x_1 - x_{25} = 324.6 - 2.3 = 322.3.$$

В данном случае для характеристики активов банков удобно прибегнуть к интервальному вариационному ряду. Выбор интервалов можно осуществлять исходя из каких-либо практических или иных соображений. Однако часто с этой целью прибегают к *методу Стерджесса*. В этом случае число интервалов рассчитывается по формуле:

$$k = 1 + 3.322 \lg N.$$

В нашем случае будем иметь

$$k = 1 + 3.322 \lg 40 \approx 6\,.$$

Теперь определим длину интервала. Заметим, что актив первого банка (сбербанка России) сильно отличается от остальных. Поэтому этот банк можно выделить из интервального ряда и рассчитать длину интервала по следующей формуле:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{27.3 - 2.3}{k} \approx 4\,.$$

Длина первого интервала обычно берется равной $\frac{h}{2}$, причем концы интервалов для удобства округляются до целых чисел.

Теперь интервальный вариационный ряд распределения 39 банков по величине активов будет иметь вид:

Таблица 5

Интервалы (величина активов в млн. руб.	[2; 4]	(4;8]	(8;12]	(12;16]	(16;20]	(20;24]	(24;28]	Всего
Число банков m_i	11	10	7	4	2	3	2	39

Интервальный вариационный ряд также можно изображать графически. С этой целью на плоскости строят систему координат и по оси абсцисс откладывают интервалы значений параметра, а на основании интервалов строят прямоугольники с высотой равной соответствующей частоте. Полученная фигура называется *гистограммой* (рис. 36.3).

Причем как в случае построения гистограмм, так и в случаях поли-

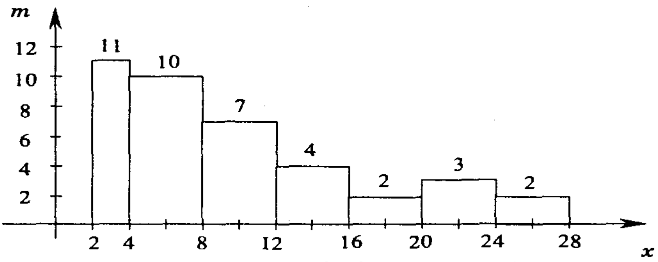


Рис. 36.3

гонов распределения, масштаб на осях абсцисс и ординат может быть различным.

Заметим, что иногда удобно выбирать интервалы различной длины.

Величина $\frac{m_i}{x_{i+1} - x_i}$ называется *эмпирической плотностью распределения на интервале* (x_i, x_{i+1}).

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Для выборки 5, 10, 11, 13, 7, 8, 10, 0, 11, 3, 8, 11, 3, 11, 7 построить вариационный ряд, частотный полигон и эмпирическую функцию распределения.

2. Построить интервальный вариационный ряд и гистограмму следующей выборки:

31	26	42	41	35	24	42	19	41	31
35	38	48	21	35	37	44	30	35	32
24	28	23	33	25	26	32	24	33	14
27	26	50	20	45	48	30	17	42	33
46	51	23	35	43	44	32	40	29	15.

■ Лекция 38

Числовые характеристики выборки случайной величины и аппроксимация выборочного распределения

Даны числовые характеристики случайной величины, полученные по выборке; изложен метод моментов построения оценки плотности непрерывного распределения.

1°. Среднее значение выборки и выборочная статистическая дисперсия. Пусть имеется генеральная совокупность, описываемая случайной величиной X. Обозначим через $F(x)$ закон распределения этой случайной величины. Пусть совокупность $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – какая-либо выборка из рассматриваемой генеральной совокупности. Тогда для этой выборки можно построить эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$, по которой можно приближенно оценивать функцию $F(x)$. Для распределения выборки можно вычислить все характеристики положения центра группирования, характеристики рассеивания, асимметрию и эксцесс. Эти характеристики будут эмпирическими, полученными из наблюдений. Так как функцию $F_n(x)$ мы считаем оценкой по выборке функции $F(x)$ генеральной совокупности, то будем также считать эмпирические характеристики оценками соответствующих характеристик $F(x)$.

Так, *средним значением выборки* называют число

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{1}$$

Естественно, что величину $\bar{x}$ можно считать оценкой математического ожидания MX величины X.

Легко видеть, что если $x^{(i)}$ – варианты выборки, m_i – их частоты, $i = \overline{1,k}$, то

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x^{(i)} \,. \tag{1'}$$

Выборочной статистической дисперсией случайной величины X называется число

$$D_n(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \tag{2}$$

или

$$D_n(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}m_i\left(x^{(i)}-\overline{x}\right)^2 . \qquad (2')$$

Безусловно, выборочная статистическая дисперсия характеризует меру рассеивания вариант вокруг среднего выборочного.

Также как и в лекции 28, легко показать, что

$$D_n(X)=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2 .$$

Действительно, по формуле (2$'$) имеем

$$D_n(X)=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{n}\left(x^{(i)}-\overline{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{n}\left(\left(x^{(i)}\right)^2-2x^{(i)}\overline{x}+\overline{x}^2\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{n}\left(\left(x^{(i)}\right)^2\right)-2\overline{x}\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{n}x_i+\overline{x}^2\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{n} .$$

Теперь воспользуемся определением величины $\overline{x}$ и тем, что

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{n}\left(\left(x^{(i)}\right)^2\right)=\overline{x^2},\quad \sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{n}=1,$$

и получим

$$D_n(X)=\overline{x^2}-2\overline{x}\cdot\overline{x}+\overline{x}^2=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2 .$$

Дисперсия есть средняя величина квадратов отклонений. Чтобы получить характеристику меры разброса случайной величины вокруг выборочного среднего, имеющую ту же размерность, извлекают квадратный корень из дисперсии. *Средним квадратическим отклонением* или *стандартным отклонением* случайной величины X называют число

$$\sigma=\sigma_n(X)=\sqrt{D_n(X)} . \qquad (3)$$

Если рассматриваются интервальные вариационные ряды, то в формулах (1)-(3) в качестве значений x_i, как правило, берут среднее значение параметра на интервале (x_i, x_{i+1}).

▷ ***Пример 1.*** Данные о валовом сборе зерновых фермерских хозяйств района приведены в таблице 1.

Таблица 1

Хозяйство	1	2	3	4	5	6	7	8
Валовый сбор (ц)	400	320	250	300	170	240	140	180

Найти среднее значение выборки, дисперсию и стандартное отклонение.

Решение. Вначале найдем среднее арифметическое по исходным данным валового сбора зерновых в хозяйствах,

$$\bar{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{2000}{8} = 250 \text{ ц.}$$

Для вычисления $D = D_8(X)$ и $\sigma = \sigma_8(X)$ целесообразно построить следующую таблицу 2.

Таблица 2

Хозяйства	Валовый сбор (ц)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	400	150	22500
2	320	70	4900
3	250	0	0
4	300	50	2500
5	170	−80	6400
6	240	−10	100
7	140	−110	12100
8	180	−70	4900
Итого	2000	0	53400

Теперь легко найти, что выборочная статистическая дисперсия

$$D = \frac{53400}{8} = 6675.$$

Извлекая из дисперсии корень, получим величину стандартного отклонения

$$\sigma \approx 82 \text{ ц.} \qquad \square$$

Таким образом, можем заключить, что степень разброса в данной выборочной совокупности невелика.

Для сравнения средних стандартных отклонений различных выборок из одной генеральной совокупности вычисляют коэффициент вариации, который определяется по формуле:

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\,\%,$$

т.е. коэффициент вариации равен процентному отношению среднего стандартного отклонения к среднему выборочному.

2⁰. Мода и медиана. Наряду со средним выборочным в качестве статистических характеристик вариационных рядов рассчитываются так называемые структурные средние – мода и медиана.

Мода m_0 выборки представляет собой значение варианты, повторяющееся с наибольшей частотой. Если две или более несмежных вариант имеют разные наибольшие частоты, то вариационный ряд называют *бимодальным* или *полимодальным*. В этом случае можно говорить об неоднородности выборки.

Медианой m_e называют значение параметра, относительно которого статистическая совокупность делится на две равные по объему части, причем в одной из них содержатся члены, у которых значения параметра не больше m_e, а в другой – члены со значениями параметра не меньше m_e.

Если сумма частот n дискретного вариационного рада нечетная, то медиана m_e определяется по формуле

$$m_e = a_{\frac{n+1}{2}},$$

если n – четное, то

$$m_e = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right).$$

▷ ***Пример 2.*** Рабочие бригады из 11 человек имеют следующие тарифные разряды: 9, 5, 9, 6, 6, 8, 7, 6, 7, 8, 6. Найти моду и медиану выборки.

Решение. Проведем упорядочивание статистического ряда по возрастанию:

5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9.

Очевидно, $m_0 = 6$. Мода отражает наиболее распространенный вариант рассматриваемого признака. В данном случае это будет рабочий шестого разряда. Можно заметить, что моду легко определять, если воспользоваться полигоном частот.

Легко найти также медиану, $m_e = 7$. Именно рабочий седьмого разряда находится на середине статистического ряда. □

В отличие от дискретных вариационных рядов определение моды и медианы по интервальным рядам требует более сложных расчетов. Если предположить, что интервалы вариационного ряда имеют одинаковую длину h и (x_i, x_{i+1}) – модальный интервал, т.е. интервал, которому соответствует наибольшая частота m_i, то мода m_0 вычисляется по формуле

$$m_0 = x_i + h\frac{m_i - m_{i-1}}{(m_i - m_{i-1}) + (m_i - m_{i+1})}, \tag{4}$$

где m_{i-1}, m_{i+1} – частоты, которые соответствуют предмодальному и послемодальному интервалам.

Чтобы найти медиану интервального вариационного ряда, вначале также следует определить медианный интервал. *Медианным* называют первый интервал, накопленная частота которого превышает или равна половине общей суммы частот, т.е.

$$\sum_{j=1}^{i-1} m_j < \frac{n}{2} \le \sum_{j=1}^{i} m_j \,. \tag{5}$$

Тогда медиана m_e вычисляется по формуле

$$m_e = x_i + \frac{h}{m_{\text{ме}}}\left(\frac{n}{2} - \sum_{j=1}^{i-1} m_j\right), \tag{6}$$

где h и $m_{\text{ме}}$ – длина и частота медианного интервала, соответственно.

▷ ***Пример 3.*** Обследование качества пряжи на прочность дало следующие результаты:

Прочность нити	120–140	140–160	160–180	180–200	200–220	220–240	240–260	260–280
Частота (число случаев порыва)	1	6	19	58	53	24	16	3

Найти моду и медиану выборки.

Решение. Модальным интервалом является интервал (180, 220), ему соответствует частота $m_i = 58$. Следовательно, в формуле (4) следует положить: $x_i = 180$, $h = 20$, $m_{i-1} = 19$, $m_{i+1} = 53$.

Получим

$$m_0 = 180 + 20\frac{58-19}{(58-19)+(58-53)} \approx 198.1 .$$

Для нахождения медианы воспользуемся формулой (6). Вначале с помощью неравенств (5) найдем медианный интервал. Нетрудно посчитать, что сумма всех частот равна $n = 180$. Таким образом, неравенства (5) имеют вид:

$$\sum_{j=1}^{i} m_j \le \frac{180}{2} < \sum_{j=1}^{i+1} m_j .$$

Если положить $i = 5$, то

$$\sum_{j=1}^{4} m_j = 1+6+19+58 = 84 ,$$

$$\sum_{j=1}^{5} m_j = 84+53 = 137 ,$$

и будем иметь

$$84 < 90 < 137.$$

Следовательно, медианным является интервал (200, 220), $m_{\text{ме}} = 53$ и

$$m_e = 200 + \frac{20}{53}(90-84) \approx 102.3 . \quad \square$$

3°. Моменты вариационного ряда. Моменты вариационного ряда определяются аналогично соответствующим характеристикам случайной величины из лекции 28.

Начальным моментом r-го порядка выборки называется величина

$$\hat{\nu}_r = \sum_{i=1}^{k} \left(x^{(i)}\right)^r \frac{m_i}{n} , \qquad (7)$$

где n – объем выборки, $x^{(i)}$ – варианты, $\frac{m_i}{n}$ – относительная частота варианты $x^{(i)}$.

Рассмотрим частный случай формулы (7):

$$\hat{\nu}_0 = \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot \frac{m_i}{n} = 1 ;$$

$$\hat{\nu}_1 = \sum_{i=1}^{k} x^{(i)} \frac{m_i}{n} = \bar{x};$$

$$\hat{\nu}_2 = \sum_{i=1}^{k} \left(x^{(i)}\right)^2 \frac{m_i}{n} = \overline{x^2};$$

$$\hat{\nu}_3 = \sum_{i=1}^{k} \left(x^{(i)}\right)^3 \frac{m_i}{n} = \overline{x^3}.$$

Центральным моментом r-го порядка выборки называется величина

$$\hat{\mu}_r = \sum_{i=1}^{k} \left(x^{(i)} - \bar{x}\right)^r \frac{m_i}{n}, \tag{8}$$

где $\bar{x}$ – среднее значение выборки.

Легко видеть, что

$$\hat{\mu}_0 = \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot \frac{m_i}{n} = 1.$$

Далее имеем:

$$\hat{\mu}_1 = \sum_{i=1}^{k} \left(x^{(i)} - \bar{x}\right) \frac{m_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x^{(i)} m_i - \bar{x} = 0;$$

$$\hat{\mu}_2 = \sum_{i=1}^{k} \left(x^{(i)} - \bar{x}\right)^2 \frac{m_i}{n} = \nu_2 - \nu_1^2;$$

$$\hat{\mu}_3 = \sum_{i=1}^{k} \left(x^{(i)} - \bar{x}\right)^3 \frac{m_i}{n} = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

4°. Асимметрия и эксцесс. *Асимметрией* распределения выборки называют величину

$$\alpha = \frac{\hat{\mu}_3}{\sigma^3},$$

а *эксцесс* определяют следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\hat{\mu}_4}{\sigma^4} - 3.$$

Асимметрия и эксцесс характеризуют форму распределения. При симметричном распределении вариант в вариационном ряде равноудаленные от $\bar{x}$ варианты будут иметь одинаковую частоту и $\hat{\mu}_3 = 0$, а следовательно, и $\alpha = 0$. Если в вариационном ряду преобладают варианты меньшие, чем средняя $\bar{x}$, то $\alpha < 0$ и ряд будет отрицательно асимметричен, т.е. будет наблюдаться более длинная ветвь влево. Положительная асимметрия (более длинная ветвь вправо) будет наблюдаться в случае, когда $\alpha > 0$, т.е. когда преобладают варианты большие, чем $\bar{x}$ (см. рис. 38.1). Таким образом, асимметрия характеризует "меру симметричности" эмпирической кривой распределения по сравнению с нормальной кривой распределения, для которой $\alpha = 0$.

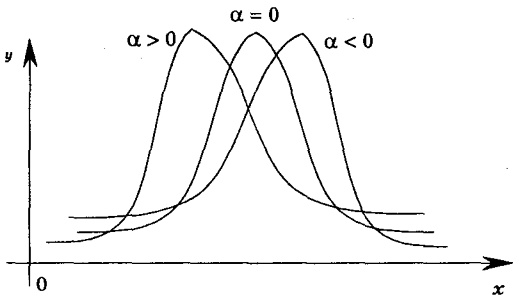


Рис. 38.1

Эксцесс характеризует высоту вершины эмпирической кривой распределения по сравнению с нормальной кривой. Как известно, $\frac{\hat{\mu}_4}{\sigma^4} = 3$ для нормального распределения. Поэтому, если $\varepsilon > 0$, то это свидетельствует о большей разбросанности вариант, и при $\varepsilon < 0$ будет наблюдаться большая концентрация вариант вокруг $\bar{x}$ (см. рис. 38.2).

5⁰. Аппроксимация выборочного распределения. После построения гистограммы распределения случайной величины X нужно приближенное аналитическое представление неизвестного закона распределения X.

В случае непрерывной случайной величины X такое представление полезно по следующим причинам: а) аналитический вид плотности распределения сглаживает выборочный ряд наблюде-

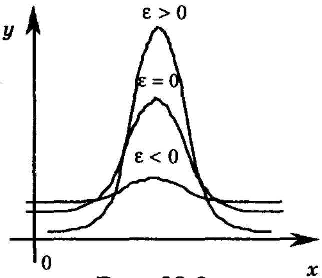


Рис. 38.2

ний и дает представление о стохастической природе механизмов изучаемого явления; б) аналитическое представление позволяет интерполировать наблюдения; в) аналитический вид плотности распределения дает основания выдвигать гипотезы о природе стохастического механизма изучаемого явления.

Таким образом, возникает задача выбора аналитического вида аппроксимирующего распределения. Аппроксимирующую функцию можно выбрать различными способами, например, можно взять полином $B(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k$, при этом чем выше степень полинома, тем точнее он описывает гистограмму. К аппроксимации плотности распределения обычно предъявляют следующие требования: аналитический вид должен соответствовать предполагаемому закону распределения, число параметров распределения не должно быть слишком велико (как правило, не более четырех).

Для выбора кривой аппроксимирующей функции иногда применяют *метод моментов*, суть которого состоит в следующем. Пусть X – непрерывная случайная величина и $f(x)$ – ее неизвестная плотность распределения. Требуется по выборке найти ее оценку $\hat{f}(x)$.

Возьмем в качестве аппроксимирующей функции $\hat{f}(x)$ следующую

$$\hat{f}(x)=\frac{B(x)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(b_0+b_1x+\ldots+b_kx^k\right).$$

Оценки $k + 1$ параметров b_0, b_1, ..., b_n в (9) нужно выбрать так, чтобы наилучшим образом приблизить $\hat{f}(x)$ к $f(x)$.

Определим меру близости $\hat{f}(x)$ к $f(x)$ числом y:

$$y=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\hat{f}(x)-f(x)\right)^2}{\frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}\,\mathrm{d}x. \qquad \textbf{(10)}$$

Для наилучшей оценки коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_k$ естественно потребовать, чтобы y из (10) была наименьшей как функция переменных $b_0, b_1, \ldots, b_k$.

Необходимое условие минимума: $\frac{\partial y}{\partial b_0}=0$; $\frac{\partial y}{\partial b_1}=0$; …; $\frac{\partial y}{\partial b_k}=0$

можно переписать так:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\hat{f}(x)-f(x)\right)x^s\,\mathrm{d}x=0,\ s=0,1,2,\ldots,k. \qquad \textbf{(11)}$$

Обозначая $\nu_s=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^s f(x)\mathrm{d}x$, перепишем равенство (11) следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^s\,\hat{f}(x)\mathrm{d}x=\nu_s,\ s=0,1,2,\ldots,k. \qquad \textbf{(12)}$$

Эту систему из $(k+1)$ уравнений называют *системой уравнений моментов*.

Если в правой части соотношений (12) поставить выборочные моменты $\hat{\nu}_s$, то полученная система $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^s\,\hat{f}(x)\mathrm{d}x=\hat{\nu}_s$ решает поставленную задачу.

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. В таблице 3 дано распределение участков по урожайности зерновых.

Таблица 3

Урожайность, $\frac{\text{ц}}{\text{га}}$ (x_i)	10.5	16.5	24	30.5	37	44	50.5	55
Число участков (m_i)	3	5	15	26	20	5	4	2

Найдите числовые характеристики выборки и постройте график эмпирической функции распределения.

2. Распределение работников предприятия по возрасту задается в виде таблицы 4.

Таблица 4

Возраст, лет	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
Число работников, человек	12	37	41	15	5

Найдите числовые характеристики выборки и постройте график эмпирической функции распределения.

3. В таблице 5 дана выборка предприятий одного из регионов по численности рабочих.

Таблица 5

Предприятия со средней численностью рабочих	до 100	101–102	201–500	501–1000	1001–3000	3001–10000
Число предприятий	35	22	26	8	6	3

Найти числовые характеристики выборки (среднее выборочное, дисперсию, стандартное отклонение, асимметрию и эксцесс), построить график эмпирической функции распределения.

■ Лекция 39

Статистические оценки параметров распределения

Приведены основные характеристики оценок параметров; даны точечные статистические оценки математического ожидания и дисперсии; изложен эффективный метод интервальной оценки математического ожидания случайной величины X с известной дисперсией

1°. Оценки параметров. Состоятельность, несмещенность и эффективность оценки. Как указывалось выше, задачей статистики является описание характера распределения некоторого признака в генеральной совокупности на основании изучения этого признака у некоторой части совокупности (выборки), полученной в результате случайного отбора.

При этом распределение относительных частот в выборке рассматривается как эмпирическое приближение к теоретическому распределению вероятностей в генеральной совокупности. Выяснение закона распределения по данным выборки и составляет главную проблему математической статистики, так как на основании закона распределения изучаемого признака можно решать задачи по анализу и предсказанию результатов массового процесса. На практике часто теоретический закон распределения случайной величины в генеральной совокупности известен (или построено его приближенное аналитическое представление), т.е. известно, что закон распределения принадлежит к тому или иному семейству (нормальный закон, закон Пуассона и т.д.), зависящему от одного или нескольких параметров. Если бы точные значения параметров были известны, например, a и σ при нормальном законе, λ при законе Пуассона, то и закон распределения был бы полностью определен. Поэтому именно для определения этих параметров и проводится само статистическое исследование.

На основании закона больших чисел в форме Чебышева можно приближенно найти параметр a (математическое ожидание), положив его равным среднему выборочному. Аналогично можно рассматривать дисперсию выборки как оценку теоретической дисперсии. Это означает, что будет найдена с некоторым приближением функция нормального закона распределения вероятностей.

Таким образом, задача оценивания неизвестного параметра θ состоит в построении приближенных формул

$$\theta \cong \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Функцию $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют *выборочной функцией* или *статистикой*, а ее значение в приближенном равенстве – *оценкой*.

Любая выборка является случайной. Следовательно, все выборочные функции $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ также являются случайными. Поэтому оценку $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ будем рассматривать как случайную величину, распределенную по тому же закону, что и генеральная случайная величина, а ее значение, вычисленное по данной выборке объема n, – как одну реализацию случайной величины.

Оценки параметров подразделяются на точечные и интервальные. *Точечная оценка параметра* θ определяется одним числом $\hat{\theta}$. *Интервальная оценка* определяется двумя числами $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ – концами интервала, внутри которого содержится неизвестный параметр θ.

Естественно стремиться, чтобы оценка $\hat{\theta}$ была в определенном смысле близка к истинному значению параметра θ.

Как определить близость оценки $\hat{\theta}$ к истинному значению θ и как проверить качество этой оценки? С этой целью формулируются определенные требования к статистическим оценкам: состоятельность, несмещенность и эффективность.

Оценка $\hat{\theta}$ называется *состоятельной*, если при увеличении числа испытаний эта оценка сходится по вероятности к истинному значению параметра θ, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$, где ε – сколь угодно малое положительное число.

Свойство состоятельности является обязательным, не состоятельные оценки в статистике не используются.

Оценка $\hat{\theta}$ называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно истинному значению, т.е.

$$M\hat{\theta} = \theta. \qquad (1)$$

Это свойство является желательным, но не обязательным. Иногда полученная оценка бывает смещенной, т.е. содержащей систематическую ошибку, но ее можно изменить так, чтобы она стала несмещенной. Рассматривают также *асимптотически несмещенные оценки*, т.е. такие, что $M\hat{\theta} \to \theta$ при увеличении объема выборки.

Наконец, оценка $\hat{\theta}$ называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию по сравнению с другими оценками.

Другими словами, оценка $\hat{\theta}$ будет эффективной, если при рассмотрении всех выборок данного объема n она будет иметь минимальную дисперсию.

2°. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии. Пусть из генеральной совокупности образуется повторная выборка объема n со значениями признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для простоты рассуждений будем полагать, что эти значения различны. В качестве оценки математического ожидания a генеральной совокупности будем брать среднее выборочное (см. предыдущую лекцию)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k. \qquad (2)$$

Покажем, что оценка $\hat{a} = \bar{x}$ удовлетворяет указанным выше условиям.

Прежде всего подчеркнем, что можно рассматривать величину $\bar{x}$ как случайную, а результаты выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – как n независимых случайных величин, каждая из которых распределена по тому же закону, что и генеральная случайная величина.

В лекции 31 было показано, что

$$M\bar{x} = a. \qquad (3)$$

Это означает, что оценка $\hat{a} = \bar{x}$ является несмещенной.

Состоятельность этой оценки следует из того, что на основании закона больших чисел среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих ограниченную дисперсию, сходится по вероятности к математическому ожиданию. Можно показать также, что оценка $\hat{a} = \bar{x}$ имеет минимальную дисперсию и, следовательно, является эффективной.

Теперь обратимся к изучению дисперсии. Пусть σ^2 – дисперсия генеральной совокупности. Ее оценкой является:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2 .$$

Величину $\hat{\sigma}^2$ также естественно рассматривать как случайную, причем

$$\begin{aligned} Mx_1 = Mx_2 = \ldots = Mx_n = a, \\ Dx_1 = Dx_2 = \ldots = Dx_n = \sigma . \end{aligned} \tag{4}$$

Проверим оценку $\hat{\sigma}^2$ на несмещенность. В лекции 31 показано, что

$$M\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 . \tag{5}$$

Отсюда следует, что оценка $\hat{\sigma}^2$ имеет систематическое смещение на величину $\left(\frac{-\sigma^2}{n}\right)$. Правда, при $n \to \infty$ естественно предположить, что $\left(\frac{-\sigma^2}{n}\right) \to 0$ и рассматриваемая оценка является асимптотически несмещенной.

Однако на ее основании легко построить несмещенную оценку. Для этого нужно рассмотреть следующую оценку:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 .$$

Ее называют *исправленной статистической дисперсией выборки.* Нетрудно проверить, что

$$Ms^2 = \sigma^2 .$$

Таким образом, мы исследовали свойство несмещенности оценки дисперсии. Можно также показать, что эта оценка является состоятельной.

3^0. Метод максимального правдоподобия. Для применения этого метода нахождения оценки неизвестного параметра α сначала составляют функцию правдоподобия. Допустим, что X – исследуемая случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до некоторого параметра α. При проведении n независимых опытов получаем n-мерную случайную величину $Y = \mathrm{col}\,(x_1; \ldots; x_n)$, где x_i – значение случайной величины X, принятое ею в i-ом опыте. Проведем n независимых опытов и получим выборку $(a_1, \ldots, a_n)$. Если X – дискретная случайная величина, то вероятность полученной выборки равна произведению вероятностей $P(X = a_1, \alpha) \cdot \ldots \cdot P(X = a_n, \alpha)$, а если X – непрерывная случайная величина с плотностью $f(x, \alpha)$, то значение плотности n-мерной случайной величины $Y = \mathrm{col}\,(x_1; \ldots; x_n)$ в точке $y = \mathrm{col}\,(a_1; \ldots; a_n)$ равно произведению плотностей $f(a_1, \alpha) \cdot \ldots \cdot f(a_n, \alpha)$. Функция $L(a_1, \ldots, a_n, \alpha)$, равная произведению вероятностей или плотностей (последнее зависит от того, дискретная случайная величина или нет), называется *функцией правдоподобия*.

Найдем теперь значение α_0 параметра α, при котором функция правдоподобия имеет максимум, которое и есть оценка настоящего значения параметра α.

▷ ***Пример 1.*** Пусть X – случайная величина с двумя возможными значениями: единица с вероятностью p и нуль с вероятностью $1 - p$. Покажем, что среднее по серии опытов есть оценка p по методу максимального правдоподобия.

Решение. Пусть в n опытах получены значения $(a_1, \ldots, a_n)$, из них k единиц. Функцию правдоподобия получаем по формуле Бернулли: $L(a_1, \ldots, a_n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Для нахождения ее максимума продифференцируем ее по p (считая $a_1, \ldots, a_n$ константами) и приравняем производную к нулю. Получим $kp^{k-1}(1-p) - (n-k)p^k(1-p)^{n-k-1} = 0$, откуда $k(1-p) - (n-k)p = 0$ и, значит, $p = \dfrac{k}{n}$. Но $\dfrac{k}{n}$ и есть среднее по серии проведенных опытов.

Отсюда следует, что частота наступления события в серии опытов есть оценка вероятности этого события по методу максимального правдоподобия. □

4°. Интервальные оценки. Как было отмечено выше, оценка $\hat{\theta}$ является приближенным представлением параметра θ. Тогда возникает вопрос: в каких пределах находится истинное значение θ, т.е. ставится вопрос о нахождении интервала (θ_1, θ_2), которому принадлежит θ. Естественно, что такой интервал также находится не точно, а с определенной вероятностью, желательно как можно близкой к единице.

Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал (θ_1, θ_2), содержащий истинное значение параметра с заданной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$, т.е. $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma$. Число $\gamma = 1 - \alpha$ называется *доверительной вероятностью*, а значение α – *уровнем значимости*. На практике обычно используют следующие значения уровня значимости: $0.1, 0.05, 0.01$.

Построим доверительные интервалы для математического ожидания в случае нормально распределенной генеральной совокупности.

Величину математического ожидания a будем оценивать известным образом:

$$a \approx \bar{x}.$$

Оценим точность этого приближенного равенства, т.е. укажем доверительный интервал, в котором практически достоверно лежит неизвестное число a. Воспользовавшись формулой (см. Л. 33)

$$P\left\{\left|\bar{x} - a\right| < \varepsilon\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}} e^{\frac{-x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right), \qquad (6)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$ – стандартная нормальная функция Лапласа (см. таблицу П.2).

Пусть задан α – уровень значимости, а следовательно, и γ – доверительная вероятность. Тогда найдем корень уравнения

$$2\Phi(t) = \gamma. \qquad (7)$$

Обозначим его через t_α. Теперь легко найти соответствующие значение ε:

$$t_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \text{ и } \varepsilon = \frac{\sigma t_\alpha}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, для данного ε будем иметь:

$$P\left\{\left|\bar{x} - a\right| < \varepsilon\right\} = \gamma.$$

Значит, доверительный интервал для параметра a, соответствующий уровню значимости α, задается неравенством

$$\left|\bar{x} - a\right| < \varepsilon,$$

или

$$\bar{x} - \frac{\sigma t_\alpha}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{\sigma t_\alpha}{\sqrt{n}}. \quad (8)$$

Поскольку число σ, как правило, неизвестно, то его заменяют приближенным значением (исправленной статистической дисперсией)

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2}. \quad (9)$$

Отметим, что в следующей лекции будет изложен эффективный алгоритм оценки математического ожидания случайной величины X с неизвестной дисперсией.

4^0. Предельная ошибка и необходимый объем выборки. Как и раньше будем рассматривать выборку

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

как n независимых случайных одинаково распределенных величин. Тогда, как известно,

$$M\bar{x} = a.$$

Найдем также $D\bar{x}$,

$$D\bar{x} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Dx_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (10)$$

Таким образом, дисперсия средней выборочной в n раз меньше дисперсии генеральной совокупности.

Средней ошибкой выборки называют величину

$$\mu = \sqrt{D\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{11}$$

Предельной ошибкой выборки называют наибольшее отклонение выборочной средней от математического ожидания a, которое возможно с данной доверительной вероятностью γ. Обычно за предельную ошибку выборки принимают величину

$$\Delta = \mu t_{\alpha}, \tag{12}$$

где μ – средняя ошибка выборки, t_{α} – корень уравнения (7). Последнее равенство можно записать в виде (см. формулу (9))

$$\Delta = \frac{\sigma t_{\alpha}}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда легко находим, что

$$n = \left(\frac{\sigma t_{\alpha}}{\Delta}\right)^2. \tag{13}$$

Таким образом, получена формула для определения необходимого объема повторной выборки.

В формуле (13) величины t_{α} и Δ, как правило, известны. Величина σ неизвестна и ее, как и в оценке (8), заменят приближенным значением (см. (11)).

Формула (12) применяется и в случае бесповторной выборки при условии, что μ вычисляется по формуле

$$\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{n}{N}}, \tag{14}$$

где n и N – соответственно объемы выборки и генеральной совокупности. Следовательно, предельная ошибка для бесповторной выборки будет вычисляться по формуле

$$\Delta = \frac{\sigma t_{\alpha}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{n}{N}}.$$

Решая это уравнение относительно n, найдем

$$n = \frac{N\sigma^2 t_{\alpha}^2}{N\Delta^2 + \sigma^2 t_{\alpha}^2}. \tag{15}$$

В этой формуле параметр σ также заменяют исправленной статистической дисперсией.

▷ ***Пример 2***. Из 2000 деталей было отобрано 400, распределение которых дается в таблице 1.

Таблица 1

Размер детали, мм	7.95 – 8.00	8.00 – 8.05	8.05 – 8.10	8.10 – 8.15	8.15 – 8.20	8.20 – 8.25
Количество деталей	12	28	132	150	62	16

Найти среднюю ошибку выборки при определении в случае повторной и бесповторной выборки.

Решение. По условию задачи полагаем $n = 400$, $N = 2000$. Вместо интервалов будем рассматривать их средние значения:

$$x_1 = 7.975,\ x_2 = 8.025,\ x_3 = 8.075,\ x_4 = 8.125,$$
$$x_5 = 8.175,\ x_6 = 8.225.$$

Далее будем использовать формулы (11) и (14), заменив в их неизвестную величину σ статистической дисперсией выборки (см. (9)).

Найдем вначале $\bar{x}$ (см. (1′) из Л. 38):

$$\bar{x} = \frac{1}{400}\left(12\cdot 7.975 + 28\cdot 8.025 + 132\cdot 8.075 + 150\cdot 8.125 + \right.$$
$$\left. + 62\cdot 8.175 + 16\cdot 8.225\right) \cong 8.11\,.$$

Теперь получим s,

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \left[\frac{1}{399}\left(12\cdot(0.135)^2 + 28\cdot(0.085)^2 + 132\cdot(0.035)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 150\cdot(0.015)^2 + 62\cdot(0.065)^2 + 16\cdot(0.115)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \cong 0.052\,.$$

В результате будем иметь:

а) для повторной выборки

$$\mu \approx \frac{0.052}{\sqrt{400}} = 0.0026\,;$$

б) для бесповторной выборки

$$\mu \cong \frac{0.052}{\sqrt{400}}\sqrt{1-\frac{400}{2000}} = \frac{0.052}{20}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{0.0052}{\sqrt{5}} \cong 0.0023. \ \square$$

▷ ***Пример 3.*** Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 12$ (см. табл. 2).

Таблица 2

x_i	−0.5	−0.4	−0.2	0	0.2	0.6	0.8	1	1.2	1.5
m_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Найти доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности, если доверительная вероятность $\gamma = 0.95$.

Решение. В данном примере воспользуемся формулой (8). Также как и в предыдущем примере, найдем параметры $\bar{x}$ и s:

$$\bar{x} \approx 0.417,$$

$$s \approx 0.720.$$

Теперь найдем корень уравнения (см. (7))

$$2\Phi(t) = 0.95,$$

обратившись к таблице П.2. Получим $t_\alpha = 1.96$.

Следовательно, доверительный интервал будет таким:

$$\left(0.417 - \frac{0.720}{\sqrt{12}}\cdot 1.96, 0.417 + \frac{0.720}{\sqrt{12}}\cdot 1.96\right)$$

или (0.01, 0.82).

Смысл полученного результата состоит в следующем: если будет произведено достаточно большое число выборок данного объема, то в 95 % из них найденный доверительный интервал накроет математическое ожидание и только в 5 % случаев оцениваемое математическое ожидание может выйти за границы доверительного интервала. □

▷ ***Пример 4.*** Определить объем повторной и бесповторной выборок для определения средней продолжительности горения лампочек в партии из 5000 лампочек, чтобы с вероятностью 0.99 предельная ошибка выборки не превосходила 25 часов. Дисперсия оказалась равной 150.

Решение. Здесь воспользуемся формулами (13) и (15). Очевидно, имеем

$$\sigma = 150\ ,\ \Delta = 25\ ,\ \gamma = 0.99\ .$$

С помощью таблиц находим t_α, $\alpha = 1 - \gamma = 0.01$:

$$t_\alpha = 2.58\ .$$

Следовательно, необходимый объем выборки в случае повторной выборки

$$n = \left(\frac{150 \cdot 2.58}{25}\right)^2 = (\ 6 \cdot 2.58\ )^2 \cong 240\ ,$$

а в случае бесповторной выборки –

$$n = \frac{5000 \cdot (150 \cdot 2.58)^2}{5000 \cdot (25)^2 + (150 \cdot 2.58)^2} \cong 229\ .\ \square$$

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Из партии в 10 000 электрических лампочек отобрано случайно 200 лампочек. Срок службы лампочек в генеральной и выборочной совокупности дан в таблицах 3 и 4 соответственно.

Таблица 3

Срок службы, г.	Количество лампочек
900 – 1100	1000
1100 – 1300	6000
1300 – 1500	3000
	$N = 10000$

Таблица 4

Срок службы, г.	Количество лампочек
900 – 1100	10
1100 – 1300	120
1300 – 1500	70
	$n = 200$

Найти генеральные и выборочные средние, дисперсии, средние квадратичные отклонения, а также среднюю и предельную ошибки выборки.

2. Из генеральной совокупности с нормальным распределением извлечена выборка с объемом $n = 10$ (см. табл. 5).

Таблица 5

x_i	–2	0	1	2	3	4	5
m_i	1	1	2	1	2	2	1

Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью $\gamma = 0.99$.

3. Какой должен быть объем бесповторной выборки для определения среднего возраста 1 000 мужчин, если дисперсия не превышает 16, а доверительная вероятность равна 0.95. Ошибка в определении возраста не должна превышать одного года.

■ Лекция 40

Некоторые замечательные статистические распределения

Приведены характеристики законов распределений "хи-квадрат" (χ^2) и Стьюдента, дано интервальное оценивание математического ожидания случайной величины X с неизвестной дисперсией, изложен метод интервального оценивания среднеквадратического отклонения нормально распределенной случайной величины.

Наряду с нормальным распределением, которое занимает центральное место в теории и практике вероятностно-статистических исследований, в математической статистике нужны и некоторые другие важные распределения, которые используются для построения разного рода статистических оценок и в других целях. К таким распределениям относятся в первую очередь распределения "хи-квадрат" (χ^2), Стьюдента и Фишера. Далее приведем подробные характеристики и таблицы таких распределений (см. таблицы П.3-5).

1°. Распределение "хи-квадрат" (χ^2). Случайная величина χ^2 используется при интервальном оценивании параметров распределений, при статистической проверке гипотез и т.д.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – последовательность независимых случайных величин и $X_i \in N(0,1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда плотность распределения случайной величины

$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

определяется так:

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}, & x \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ – гамма-функция от аргумента $\frac{n}{2}$. Если $\frac{n}{2}$ – целое число, то

$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)!$.

Распределение χ_n^2 полностью определяется величиной n, называемой *числом степеней свободы*.

Если на величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ наложено $k < n$ связей, то число степеней свободы уменьшается на k. Например, если известно, что $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \beta$, то число степеней свободы случайной величины χ^2 равно $n-1$.

Приведем *числовые характеристики* случайной величины χ_n^2:

1. $M(\chi_n^2)=n$; 2. $D(\chi_n^2)=2n$; 3. Ассиметрия $\varepsilon_1=\frac{2^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{n}}$; 4. Эксцесс $\varepsilon=\frac{12}{n}$.

Функция $f_{\chi_n^2}(x)$ при $x>0$ монотонно убывает, если $n\le 2$, а при $n>2$ имеет единственный максимум. В таблице П. 4 для различных значений вероятности α и числа степеней свободы k приведены значения $\chi_{\text{кр}}^2$, являющиеся решениями уравнения

$$P\left(\chi_k^2>\chi_{\text{кр}}^2\right)=\int\limits_{\chi_{\text{кр}}^2}^{\infty} f_{\chi_k^2}(x)\,\mathrm{d}x=\alpha. \qquad (2)$$

Величину $\chi_{\text{кр}}^2$ называют *критической точкой*, а вероятность α – *уровнем значимости*.

Важным свойством распределения χ^2 является его *воспроизводимость по параметру*. Это означает, что сумма k независимых случайных величин, распределенных по закону χ^2, также распределена по этому закону с числом степеней свободы, равным сумме степеней свободы слагаемых.

2°. Распределение Стьюдента. Как и распределение χ^2, распределение Стьюдента играет в основном роль вспомогательного вычислительного средства и используется при построении доверительного интервала для математического ожидания, проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормальных случайных величин и т.д. Оно впервые описано в 1908 г. английским статистиком В. Госсетом, который опубликовал свою научную работу под псевдонимом Стьюдент.

Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_n$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины и $X_i \in N(0,1)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Тогда плотность распределения случайной величины

$$T_n = \frac{X_0}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$$

определяется формулой

$$f_{T_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \qquad (3)$$

где $\Gamma(k)$ – гамма-функция.

В этом случае говорят, что случайная величина T_n имеет *распределение Стьюдента* с n степенями свободы.

Можно убедиться, что $f_{T_n}(x)$ является унимодальной функцией x, т.е. найдется точка x^*, что

$f_{T_n}(x_1) > f_{T_n}(x_2)$, если $x_1 < x_2 < x^*$;

$f_{T_n}(x_1) < f_{T_n}(x_2)$, если $x^* < x_1 < x_2$.

Числовые характеристики случайной величины T_n:

1. $M(T_n)=0$; 2. $D(T_n)=\dfrac{n}{n-2}$ и существует только при $n>2$; 3. Асимметрия $\varepsilon_1=0$; 4. Эксцесс $\varepsilon=\dfrac{6}{n-4}$ и существует только при $n>4$.

Отметим, что с ростом n распределение Стьюдента быстро сходится к нормальному (практически уже при $n>50$).

В таблице П. 3 для различных значений α и k приведены величины $t_{\alpha,k}$, являющиеся решениями уравнения

$$P\left(T_n>t_{\alpha,k}\right)=\int\limits_{t_{\alpha,k}}^{\infty} f_{T_n}(x)\mathrm{d}x=\alpha. \tag{4}$$

При нахождении критических точек по таблице П.3 нужно иметь ввиду, что эта таблица составлена для односторонней критической области. В случае двусторонней критической области те же критические точки $t_{\alpha,k}$ будут соответствовать уровню значимость 2α.

При решении задач интервального оценивания нахождение значений $t_{\gamma,k}$ производится по таблице П.3, причем $t_{\gamma,k}=t_{1-\alpha,k}$.

3^0. Распределение Фишера. Пусть X и Y – независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы $\nu_1=m$ и $\nu_2=n$ соответственно. Тогда величина

$$F=\frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$$

имеет *распределение Фишера* со степенями свободы $\nu_1=m$ и $\nu_2=n$ ($F\sim F_{m,n}$). Таким образом, распределение Фишера F определяется двумя параметрами m и n.

При больших m и n это распределение приближается к нормальному. Заметим также, что $T_n^2=F_{1,n}$, где T_n – случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\nu=n$, $F_{1,n}$ – случайная величина, имеющая распределение Фишера с числами степеней свободы $\nu_1 = 1$ и $\nu_2 = n$.

Распределение Фишера используется при проверке статистических гипотез и для него составлена таблица П.5 критических точек $F_{\alpha;\nu_1;\nu_2}$, как правило, при уровнях значимости $\alpha = 0.10$; $\alpha = 0.05$; $\alpha = 0.01$. Например, $F_{0.05;10;10} = 2.98$.

4⁰. Интервальное оценивание математического ожидания случайной величины *X* с неизвестной дисперсией. Пусть случайная величина $X \in N(a, \sigma)$, где σ неизвестно. Нужно построить доверительный интервал для оценки математического ожидания a с заданной доверительной вероятностью γ (надежностью).

Для решения сформулированной задачи по выборке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вычисляем выборочное среднее $\bar{x}$ и исправленную статистическую дисперсию s^2.

Введем случайную величину

$$T = \frac{\bar{x} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}},$$

которая не зависит ни от a, ни от σ и имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенью свободы. Можно записать

$$P(|T_k| < \delta) = \int_{-\delta}^{\delta} f_{T_k}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\delta} f_{T_k}(x)\,\mathrm{d}x = \gamma,$$

где $f_{T_k}(x)$ – плотность распределения случайной величины T_k с k степенями свободы.

По таблице П.3 определяем аргумент функции Стьюдента, соответствующий значению γ и числу степеней свободы $n - 1$, т.е. величину $t_{\gamma,n-1}$.

Получаем

$$|T| < t_{\gamma,n-1} \text{ или } \left| \frac{\bar{x}-a}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| < t_{\gamma,n-1}.$$

Значит, окончательное выражение для доверительного интервала запишется так:

$$\bar{x} - \frac{t_{\gamma,n-1} \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_{\gamma,n-1} \cdot s}{\sqrt{n}}. \tag{5}$$

▷ ***Пример 1.*** Пусть $X \in N(a,\sigma)$. По выборке объема $n = 36$ найдены значения $\bar{x} = 4.1$; $s = 3$. С надежностью $\gamma = 0.95$ построить для a доверительный интервал.

Решение.

1. По таблице П.3 находим $t_{\gamma,n-1} = t_{0.95;35} = 2.032$.

2. Определяем $\delta = \dfrac{t_{\gamma,n-1} \cdot s}{\sqrt{n}} = \dfrac{2.032 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 1.02$.

3. Находим доверительный интервал

(4.1 – 1.02, 4.1 + 1.02) = (3.08, 5.12). □

5⁰. Интервальное оценивание среднеквадратического отклонения нормально распределенной случайной величины. Пусть $X \in N(a,\sigma)$. Величины a и σ неизвестны. Требуется по выборке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ построить доверительный интервал для σ с надежностью γ.

Решим эту задачу. По определению доверительного интервала имеем:

$$P(|\sigma - s| < \delta) = P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma.$$

Преобразуем двойное неравенство в круглых скобках так:

$$s\left(1 - \frac{\sigma}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\sigma}{s}\right). \tag{6}$$

Обозначив $q=\dfrac{\delta}{s}$, запишем (6) в виде

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q). \qquad (6')$$

Типична для подобных задач ситуация, когда $\delta<s$, т.е. $q<1$. Считаем, что последнее выполняется. Тогда из (6')

$$\frac{1}{s(1+q)}<\frac{1}{\sigma}<\frac{1}{s(1-q)}$$

или после умножения на $s\sqrt{n-1}>0$ получаем

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}<\frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma}<\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Введем случайную величину $\chi^2=\dfrac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$, которая не зависит ни от a, ни от σ и имеет плотность распределения χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы.

Получаем окончательные формулы для доверительного интервала:

$$\frac{s\sqrt{n-1}}{\chi_2}<\sigma<\frac{s\sqrt{n-1}}{\chi_1}, \qquad (7)$$

где $\chi_1^2=\chi^2\left(\dfrac{1+\gamma}{2};n-1\right)$ и $\chi_2^2=\chi^2\left(\dfrac{1-\gamma}{2};n-1\right)$ определяются по таблице П.4.

При построении доверительного интервала для дисперсии достаточно возвести все члены последнего неравенства в квадрат.

Если $q\geq 1$, то неравенство (6) приобретает вид

$$0<\sigma<s(1+q)$$

и соответственно видоизменяется формула (7) для доверительного интервала.

▷ ***Пример 2.*** Пусть по выборке объема 20 найдено $s=0.03$. Требуется с надежностью $\gamma=0.90$ построить доверительный интервал для σ.

Решение. По таблице П.4 для $\gamma = 0.90$ и $n = 20$ находим:

$$\chi_1^2 = \chi^2\left(\frac{1+0.90}{2}; 20-1\right) = \chi^2(0.95; 19) = 10.1;$$

$$\chi^2\left(\frac{1-0.90}{2}; 20-1\right) = \chi^2(0.05; 19) = 30.1.$$

Доверительный интервал строим исходя из формулы (7):

$$\frac{0.03\cdot\sqrt{20-1}}{\sqrt{30.1}} < \sigma < \frac{0.03\cdot\sqrt{20-1}}{\sqrt{10.1}} \quad \text{или} \quad 0.024 < \sigma < 0.041.$$

В заключении отметим, что с учетом предельного свойства распределения χ^2 в случае большой выборки ($n > 50$) для построения доверительного интервала для σ^2 можно использовать следующую формулу:

$$s^2\left(1 - t_\gamma\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) < \sigma^2 < s^2\left(1 + t_\gamma\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right),$$

где t_γ определяется по таблице П.2. □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n и результаты наблюдений сведены в интервальный вариационный ряд. Построить доверительные интервалы для a и σ при доверительной вероятности $\gamma = 0.95$:

1. Проводилось выборочное обследование продуктивности коров на молочных фермах Северо-Западного экономического региона РФ. Получены следующие результаты:

Надой за год (в кг)	3000÷3400	3400÷3800	3800÷4200	4200÷4600	4600÷5000
Количество коров	43	71	102	64	27

2. В универсаме проводилась контрольная проверка веса расфасованных товаров. Выборочная проверка дала следующие результаты:

Ошибка взвешивания (в г)	-15 ÷ -10	-10 ÷ -5	-5 ÷ 0	0 ÷ 5	5 ÷ 10	10 ÷ 15
Число наблюдений, попавших в данный интервал	12	34	102	87	21	4

3. На станции технического обслуживания автомобилей исследовались затраты времени на ремонт карбюратора. Были зафиксированы следующие результаты:

Затраты времени (в мин.)	10 ÷ 20	20 ÷ 30	30 ÷ 40	40 ÷ 50	50 ÷ 60	> 60
Число наблюдений, попавших в данный интервал	9	21	48	70	40	12

■ Лекция 41

Статистическая проверка гипотез

Приводятся основные понятия проверки гипотез; рассмотрены критерии согласия Пирсона и Колмогорова; изложена методика проверки гипотезы о среднем значении при известной и неизвестной дисперсиях.

1°. Статистическая гипотеза. Уровень значимости и мощность критерия. Результаты выборочных исследований широко используются в статистике для проверки предположений, выдвигаемых относительно характера или параметров распределения случайной величины в генеральной совокупности. Такие предположения называются *статистическими гипотезами*. Гипотеза называется *параметрической*, если в ней содержится некоторое утверждение о значении параметра известного распределения. Гипотезу, в которой сформулированы предположения относительно вида распределения, называют *непараметрической*.

Параметрическая гипотеза называется *простой*, если она содержит только одно предположение относительно параметра; в противном случае имеем дело со *сложной* гипотезой.

Если исследовать всю генеральную совокупность, то, безусловно, можно было бы наиболее точно установить истинность той или другой гипотезы. Однако такое исследование далеко не всегда возможно, и суждение об истинности статистических гипотез проверяется на основании некоторой выборки.

Обычно выделяют некоторую основную или *нулевую гипотезу* H_0. Наряду с нулевой гипотезой H_0 рассматривают *альтернативную гипотезу* H_1, являющуюся логическим отрицанием H_0. Так, относительно параметров нормально распределенной генеральной совокупности можно вдвинуть следующие гипотезы:

а) нулевую – H_0: $a = a_0$; альтернативные – H_1: $a \neq a_0$, либо H_1: $a < a_0$, либо H_1: $a > a_0$;

б) нулевую H_0: $\sigma = \sigma_0$; альтернативные – H_1: $\sigma \neq \sigma_0$, либо H_1: $\sigma < \sigma_0$, либо H_1: $\sigma > \sigma_0$;

в) нулевую $H_0 : \begin{cases} a = a_0, \\ \sigma = \sigma_0; \end{cases}$ альтернативную – $H_1 : \begin{cases} a \neq a_0, \\ \sigma \neq \sigma_0. \end{cases}$

Правило, по которому решают о принятии или отклонении гипотезы H_0 (соответственно – отклонении или принятии H_1), называют *критерием*. Множество значений статистического критерия разделяются на два подмножества: область S отклонения нулевой гипотезы и область $\overline{S}$ принятия этой гипотезы. Если значение x критерия попало в область S, то нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1; если же точка x попала в $\overline{S}$, то принимается H_0, а H_1 отвергается.

При этом могут иметь место ошибки двух родов. Если будет принята H_1, тогда как на самом деле верна гипотеза H_0, то это ошибка первого рода, ее вероятность обозначают через α:

$$\alpha = P\{x \in S / H_1\} = P\{H_1 / H_0\},$$

где $P\{H_1 / H_0\}$ – вероятность того, что будет принята гипотеза H_1, если на самом деле верна гипотеза H_0. Число α называют ***уровнем значимости***, и обычно для α используют стандартные значения: 0.1; 0.05; 0.01 и др.

Если же будет принята гипотеза H_0, тогда как на самом деле верна гипотеза H_1, то такая ошибка – ошибка второго рода, ее вероятность обозначают через β,

$$\beta = P\{x \in \overline{S} / H_1\} = P\{H_0 / H_1\}.$$

Правильные решения также подразделяют на два вида. Если будет прията гипотеза H_0, тогда как и на самом деле в генеральной совокупности она верна, то вероятность такого решения будет

$$1 - \alpha = P\{x \in \overline{S} / H_0\} = P\{H_0 / H_0\}.$$

Может быть принята гипотеза H_1, тогда как и на самом деле она верна. Вероятность этого решения равна $1 - \beta$,

$$1 - \beta = P\{x \in S / H_1\} = P\{H_1 / H_1\}. \qquad \textbf{(1)}$$

Число (1) называют ***мощностью критерия***.

Для определения лучшего критерия проверки гипотезы H_0 необходимо среди всех критериев, которые имеют одну и ту же вероятность ошибки первого рода, выбрать тот, для которого вероятность ошибки второго рода наименьшая. Допускаемая ошибка первого рода или уровень значимости задается заранее.

2°. Критерии согласия. Рассмотрим критерии согласия, которые применяются для проверки непараметрических гипотез о том, что распределение изучаемой случайной величины подчиняется некоторому известному закону распределения, например, нормальному, биноминальному и т.д.

Выдвигается гипотеза о том, что случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$. Выдвижению гипотезы предшествует предварительная обработка опытных данных, например, строится эмпирическая функция распределения или гистограмма. Для сравнения близости эмпирических данных с выдвигаемой гипотезой необходимо выбрать некоторую меру близости, которая, вообще говоря, зависит от характера решаемой задачи. Например, в качестве меры близости можно взять расстояние между гипотетической F и эмпирической функцией F_n одним из следующих способов:

$$\chi(F_n, F) = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \text{ – локальная мера,}$$

$$\chi(F_n, F) = \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n(x) - F(x)]^{2k} g(x) \mathrm{d}x \text{ – интегральная мера,}$$

где k – целое положительное число, $g(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \mathrm{d}x < \infty$.

Отметим, что мера близости – это случайная величина, так как является функцией выборки и характеризуется своим законом распределения.

2°.1 Общая схема построения критериев согласия.

1. Выбирается мера близости $\chi(F_n, F)$, причем желательно, чтобы она не зависела от конкретного вида функции F, имела достаточно простой вид и была чувствительна к отклонениям опытных данных от предполагаемой гипотезы.

2. Задается вероятность α, называемая *уровнем значимости*, которая обычно выбирается так: $\alpha = 0.05$ или $\alpha = 0.01$.

3. Решается уравнение $P\{x_\alpha \leq x\} = \alpha$ и находится область значений x, которая называется *критической областью*.

4. По выборке вычисляется значение x_q – выборочное значение.

5. Сравнивается выборочное значение x_q и x_α для заданного уровня значимости. Если $x_q \geq x_\alpha$, то это означает, что наблюдение попало в критическую область, т.е. произошло маловероятное событие. Наступление такого события ставит под сомнение выдвигаемую гипотезу – она

отвергается. Если $x_q < x_\alpha$, то делаем заключение, что опытные данные не противоречат выдвигаемой гипотезе.

2^0.2 Статистический критерий χ^2. Выдвигается гипотеза $X \in F(x)$ (или $X \in f(x)$). Разбиваем область значений, которые может принимать случайная величина X на l интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_l$. Вычисляем вероятность попадания случайной величины в каждый интервал при выдвинутой гипотезе:

$$p_k = \int_{\Delta_k} \mathrm{d}F \text{ или } p_k = \int_{\Delta_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

Здесь $\int_{\Delta_k} \mathrm{d}F$ – интеграл Стилтьеса по функции $F(t)$.

По выборке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вычисляем число наблюдений m_k, попавших в интервал Δ_k. Ясно, что $\sum_{k=1}^{l} p_k = 1$, $\sum_{k=1}^{l} m_k = n$.

В качестве меры близости выбирается следующая случайная величина:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{l} \frac{n}{p_k}\left(\frac{m_k}{n} - p_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{l} \frac{(m_k - np_k)^2}{np_k}. \tag{2}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема Пирсона.

Для любой гипотезы $\mathrm{F}(\mathrm{x})$ *при* $n \to \infty$ *случайная величина* χ^2 *имеет распределение* χ^2 *с числом степеней свободы* $l - r - 1$, *так что* **(3)**

$$F(\chi^2 < x) = \int_0^x K_{l-r-1}(t)\mathrm{d}t,$$

где r *– число параметров проверяемого закона* $F(x, a_1, \ldots, a_r)$, $K_{l-r-1}(t)$ *– плотность распределения* χ^2.

Задаемся уровнем значимости α. Распределение (2) задано в таблицах, что позволяет найти величину χ^2_α. По формуле (2) вычисляем выборочное значение χ^2_q и производим их сравнение:

1) если $\chi^2_\alpha \le \chi^2_q$, то гипотеза отвергается; 2) если $\chi^2_\alpha > \chi^2_q$, то гипотеза не отвергается.

2°.3 Статистический критерий Колмогорова. Справедлива также следующая теорема.

Теорема Колмогорова.

Пусть $F(x)$ – гипотическая функция распределения случайной величины X, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – выборка объема n и $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения.

Тогда

$$P\left\{\sqrt{n}D_n < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} K(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2x^2}, \; x > 0,$$

где $D_n = \sup_x \left| F_n(x) - F(x) \right|$ *).

Случайная величина D_n, называемая *статистикой Колмогорова*, используется для решения следующих задач:

1. Проверка гипотезы H_0: $F_n(x) = F(x)$, где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения случайной величины X, вычисленная по выборке $(x_1, x_2, ..., x_n)$, а $F(x)$ – гипотетическая функция распределения случайной величины X.

2. Построение доверительных границ для $F(x)$.

При использовании статистики Колмогорова нужно иметь ввиду таблицу П.6, в которой для типичных уровней значимости α приведены значения критической точки d_α, удовлетворяющей уравнению

$$P\left(D_n = \sup_x \left| F_n(x) - F(x) \right| > d_\alpha \right) = \alpha .$$

Так как распределение статистики Колмогорова D_n не зависит от оцениваемой функции $F(x)$ и в качестве меры расстояния между $F_n(x)$ и

---

*) При применении данного критерия следует учитывать, что функция $F(x)$ не должна зависеть от параметров выборки

$F(x)$ используют максимальное отклонение, то величину D_n можно применять для построения доверительных границ непрерывной функции распределения $F(x)$.

Для любой неизвестной непрерывной $F(x)$ при произвольном x имеем:

$$P\{F_n(x)-d_\alpha \le F(x) \le F_n(x)+d_\alpha\}=1-\alpha .$$

Значит, доверительная область есть полоса шириной $2d_\alpha$, в центре которой находится выборочная функция распределения $F_n(x)$, причем с вероятностью $1-\alpha$ истинная функция распределения $F(x)$ целиком лежит внутри этой полосы.

Сформулированный результат дает основание для оценивания минимального объема выборки, необходимого для аппроксимации неизвестной функции распределения $F(x)$ с заданной точностью.

В частности, для $n \ge 80$ имеют место соотношения:

$$d_\alpha \cong \frac{1.628}{\sqrt{n}+0.12+\frac{0.11}{\sqrt{n}}}, \quad \alpha = 0.01;$$

$$d_\alpha \cong \frac{1.358}{\sqrt{n}+0.12+\frac{0.11}{\sqrt{n}}}, \quad \alpha = 0.05.$$

Например, при $\alpha = 0.01$, $n = 100$ эмпирическая функция распределения повсюду отстоит от истинной не более чем на 0.161.

Рассмотрим применение общей схемы проверки гипотез к задаче проверки гипотезы о математическом ожидании.

3⁰. Проверка гипотезы о математическом ожидании нормальной случайной величины при известной и неизвестной дисперсиях.

3⁰.1. Пусть генеральная совокупность распределена по нормальному закону. Предположим, что значение дисперсии σ известно. Требуется проверить нулевую гипотезу о том, то математическое ожидание генеральной совокупности равно некоторому числу a_0, т.е. гипотезу H_0: $a = a_0$.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n и по ней найдена выборочная средняя $\bar{x}$. Задача состоит в том, чтобы по выборочной средней при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0$ при альтернативной гипотезе H_1: $a \neq a_0$.

В качестве статистического критерия возьмем нормально распределенную случайную величину

$$Z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma}\sqrt{n}. \tag{4}$$

Тогда область принятия гипотезы будет задаваться неравенствами

$$-u_\alpha < Z < u_\alpha, \tag{5}$$

где

$$\Phi(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2},$$

$\Phi(t)$ – функция Лапласа.

Область отклонения будет такой:

$$Z \in (-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty).$$

Если значение

$$Z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma}\sqrt{n}$$

удовлетворяет неравенствам (5), то гипотезу H_0: $a = a_0$ принимают; в противном случае ее отклоняют и принимают гипотезу H_1: $a \neq a_0$. В этом случае область отклонения гипотезы H_0 имеет вид $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$ и ее называют *двусторонней критической областью значений статистики* Z.

При использовании статистики (4) для проверки нулевой гипотезы H_0: $a = a_0$ при альтернативной H_1: $a > a_0$ область принятия H_0 задается неравенством

$$Z < u_{2\alpha}, \tag{6}$$

где

$$\Phi(u_{2\alpha}) = \frac{1-2\alpha}{2}.$$

Критическая область значений статистики Z будет *правосторонней*, $Z \in (u_{2\alpha}, +\infty)$.

Если же статистика Z проверки гипотезы H_0: $a = a_0$ при альтернативной гипотезе H_1: $a < a_0$, то область принятия гипотезы H_0 задается неравенством

$$Z > -u_{2\alpha}$$

и критическая область значений статистики Z будет *левосторонней*, $Z \in \left(-\infty, -u_{2\alpha}\right)$.

Заметим, что принятие гипотезы H_0 не означает, что она является единственно подходящей. Это означает лишь, что гипотеза H_0 не противоречит выборочным данным. Естественно, что наряду с H_0 могут преобладать и другие гипотезы.

▷ ***Пример 1.*** На станке изготавливаются детали с номинальным контролируемым размером 14 мм. Известно, что распределение контролируемого размера является нормальным с параметрами $a = 14$ мм и $\sigma = 0.5$ мм. В течение суток было отобрано 90 деталей и сделаны замеры контролируемого параметра, средний размер которого оказался $\bar{x} = 14.3$. Можно ли считать, что станок изготавливает детали увеличенного размера с уровнем значимости 0.05?

Решение. Из условия следует, что необходимо проверить нулевую гипотезу H_0: $a = 14$ при альтернативной гипотезе H_1: $a > 14$. Найдем статистику Z по формуле (4):

$$Z = \frac{14.3 - 14}{0.5} \cdot 30 = 18.$$

Далее найдем значение $u_{2\alpha}$ при $\alpha = 0.05$. По таблице П.2 находим, что $u_{2\alpha} = 1.64$. □

Так как в результате имеем, что $Z > u_{2\alpha}$, то статистика Z попала в критическую область и, следовательно, нулевую гипотезу отвергаем. Это означает, что с вероятностью ошибки меньшей, чем 0.05, можно утверждать, что контролируемый размер деталей является завышенным по сравнению с номинальным размером.

3°.2. Пусть теперь генеральная совокупность распределена по нормальному закону и значение дисперсии неизвестно. Требуется проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0$ при альтернативной H_1: $a \neq a_0$.

В качестве статистики критерия возьмем случайную величину

$$T=\frac{\bar{x}-a}{s}\sqrt{n-1}\,, \tag{7}$$

где s – исправленная статистическая дисперсия выборки, n – объем выборки, $\bar{x}$ – среднее значение выборки. Величина T здесь распределена по закону Стьюдента с $\nu=n-1$ степенями свободы и имеет функцию распределения $F_\nu(t)$. Критическая область здесь определяется неравенством

$$|T|>t_{\alpha,\nu}\,, \tag{8}$$

где величина $t_{\alpha,\nu}$ определяется из уравнения

$$P\{|T|>t_{\alpha,\nu}\}=\alpha\,,$$

α – уровень значимости. Значение $t_{\alpha,\nu}$ находится по таблице П.3.

▷ ***Пример 2.*** Техническая норма предусматривает на выполнение некоторой операции на конвейере 30 с. Поступило жалоба от рабочих, что они затрачивают больше времени на эту операцию. ОТК произвел хронометраж у 16 рабочих и получил следующие результаты:

Таблица 1

Значениепризнака	28	29	30	31	32	33	34
Частота	1	2	3	4	3	2	1

Можно ли по имеющимся хронометрическим данным на уровне значимости 0.02 отклонить предположение, что действительное среднее время исполнения операции соответствует норме?

Решение. Нулевая гипотеза здесь есть H_0: $a=30$, альтернативная – H_1: $a\neq 30$. Для проверки гипотезы H_0 необходимо вычислить по элементам выборки объема $n=16$ значение статистики T (см. (7)). Будем предполагать, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону. По данным таблицы 1 находим среднее значение выборки $\bar{x}$ и исправленную статистическую дисперсию выборки s^2:

$$\bar{x}=\frac{1}{16}(28\cdot 1+29\cdot 2+30\cdot 3+31\cdot 4+32\cdot 3+33\cdot 2+34\cdot 1)=31\,;$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} m_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{15}\left(3^2+2\cdot 2^2+3\cdot 1^2+3\cdot 1^2+2\cdot 2^2+3^2\right)}\approx 1.6\,.$$

Следовательно, по формуле (7) находим, что

$$T=\frac{31-30}{1.6}\sqrt{15}\approx 2.4\,. \tag{9}$$

С другой стороны, для $\alpha=0.02$ и $\nu=n-1=15$ по таблице П.3 находим

$$t_{\alpha,\nu}\approx 2.6\,. \tag{10}$$

Сравнивая результаты (9) и (10), находим, что $T<t_{\alpha,\nu}$ и, таким образом, гипотеза H_0: $a=30$ действительно должна быть принята на уровне значимости 0.01.

✍ Задания для самостоятельной работы

1. При продолжительном наблюдении за весом X пакетов орешков, заполняемых автоматически, установлено, что стандартное отклонение веса пакетов $\sigma=10$ г. Взвешено 25 пакетов, при этом их средний вес составил $\bar{x}=244$ г. Проверить гипотезу $M(X)=250$ г при уровне значимости $\alpha=0.05$. Если данное утверждение неверно, то станок-автомат требует подналадки.

2. Анализируется доход X фирм в отрасли, имеющей нормальное распределение. Пусть средний доход в данной отрасли составляет не менее 1 млн. долл. По выборке из 49 фирм получены следующие данные: $\bar{x}=0.9$ млн. долл., $s=1.15$ млн. долл. Не противоречат ли эти результаты выдвинутой гипотезе при уровне значимости $\alpha=0.01$?

3. Исследовалось время безотказной работы бытовых автоматических стиральных машин, для которых гарантийный срок – 150 дней. Для этого фиксировалось время (в днях) с момента продажи до момента первого обращения покупателя в мастерскую по обслуживанию. Были зафиксированы следующие результаты:

Время безотказной работы (в днях)	30	90	150	210	270	300	360
Число отказов	18	42	124	180	104	32	30

Можно ли по имеющимся данным на уровне значимости 0.02 отклонить предположение, что действительное среднее время безотказной работы стиральной машины соответствует гарантийному сроку?

■ Лекция 42

Примеры проверки гипотез

Рассмотрено применение общей схемы проверки гипотез к важным задачам проверки гипотез о дисперсии, равенстве математических ожиданий, равенстве дисперсий, коэффициенте корреляции[*].

1°. Проверка гипотезы о величине дисперсии нормальной случайной величины. Многие экономические решения связаны с анализом разброса возможных результатов. Например, если покупать акции какой-либо компании, то важно оценить риск от такого вложения денежных средств, который определяется рассеиванием годовых дивидендов по данным акциям за продолжительный период времени. Такую оценку можно получить анализируя дисперсию случайной величины – размера дивидендов. Значит, при изучении многих экономических проблем приходится иметь дело с проверкой гипотезы о величине дисперсии.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть случайная величина $X \in N(a, \sigma)$, причем величины a и σ неизвестны. Требуется проверить гипотезу о равенстве дисперсии σ^2 нормально распределенной генеральной совокупности X гипотетическому (предлагаемому) значению σ_0^2.

Тогда:

H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$; H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ($H_1^{(1)}: \sigma^2 > \sigma_0^2$; $H_1^{(2)}: \sigma^2 < \sigma_0^2$).

Для проверки гипотезы H_0 извлекаем выборку $(x_1, x_2, ..., x_n)$ объема n, вычисляем выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, исправленную выборочную дисперсию $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$. Тогда критерий проверки гипотезы H_0 имеет вид

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}. \qquad (1)$$

---

[*] Содержание этой лекции основано на материале § 3.5 из [10].

При справедливости гипотезы H_0 построенная статистика χ^2 имеет распределение χ^2 с числом степеней свободы $\nu = n-1$.

1) При H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ по таблице критических точек χ^2-распределение по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n-1$ находим критические точки $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ и $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ двусторонней критической области.

Если $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ (χ^2 определяется из (1)), то нет оснований для отклонения H_0.

Если $\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ или $\chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$, то H_0 отклоняется в пользу гипотезы H_1.

2) При $H_1^{(1)}: \sigma^2 > \sigma_0^2$ определяем критическую точку $\chi^2_{\alpha,n-1}$ правосторонней критической области.

Если $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,n-1}$, то нет оснований для отклонения H_0.

Если $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha,n-1}$, то H_0 должна быть отклонена в пользу $H_1^{(1)}$.

3) При $H_1^{(2)}: \sigma^2 < \sigma_0^2$ находим критическую точку $\chi^2_{1-\alpha,n-1}$ левосторонней критической области.

Если $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,n-1}$, то нет оснований для отклонения H_0.

Если $\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha,n-1}$, то H_0 отклоняется в пользу $H_1^{(2)}$.

▷ ***Пример 1.*** Точность работы станка автомата, заполняющего пакеты порошком, определяется совпадением веса пакетов. Дисперсия веса не должна превышать 25 (г)^2. По выборке из 20 пакетов определена исправленная дисперсия $s^2 = 35$. Определить, считая $\alpha = 0.05$, требуется ли срочная подналадка станка?

Решение. Сформулируем нулевую и альтернативную гипотезы, соответствующие условию примера 1: H_0: $\sigma^2 = 25$; H_1: $\sigma^2 > 25$.

В соответствии с (1) наблюдаемое значение χ^2 следующее:

$$\chi^2 = \frac{19 \cdot 35}{25} = \frac{19 \cdot 7}{5} = 26.6.$$

По таблице П.4 находим $\chi^2_{кр} = \chi^2_{0.05;19} = 30.14$.

Так как $\chi^2 = 26.6 < 30.14 = \chi^2_{кр}$, то нет оснований для отклонения гипотезы H_0. Значит, имеющиеся данные не дают основания считать, что станок требует срочной подналадки. □

2⁰. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормальных случайных величин при известных дисперсиях. При анализе многих экономических показателей приходится сравнивать две генеральные совокупности. Например, можно сравнивать уровни жизни в двух странах по размеру дохода на душу населения; качество знаний студентов двух университетов – по среднему баллу на комплексном тестовом экзамене и т.д. В таких ситуациях логично провести сравнение по схеме анализа равенства математических ожиданий двух генеральных совокупностей X и Y.

Пусть $X \in N(a_X, \sigma_X)$, $Y \in N(a_Y, \sigma_Y)$, причем дисперсии σ_X^2 и σ_Y^2 известны. По двум выборкам $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ объемов n и k соответственно нужно проверить гипотезу $M(X) = M(Y)$, т.е.

H_0: $M(X) = M(Y)$,

H_1: $M(X) \neq M(Y)$ ($H_1^{(1)}: M(X) > M(Y)$; $H_1^{(2)}: M(X) < M(Y)$).

В качестве критерия проверки гипотезы H_0 примем случайную величину Z:

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{k}}}. \tag{2}$$

При справедливости H_0 случайная величина $Z \in N(0,1)$.

1) При H_1: $M(X) \neq M(Y)$ по таблице для функции Лапласа определяем две критические точки $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ и $u_{\frac{\alpha}{2}}$ из условий:

$$\Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{1-\alpha}{2},\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}=u_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Если $|Z|<u_{\frac{\alpha}{2}}$, то нет оснований для отклонения гипотезы H_0.

Если $|Z|>u_{\frac{\alpha}{2}}$, то H_0 отклоняется в пользу H_1.

2) При $H_1^{(1)}: M(X)>M(Y)$ критическую точку u_α правосторонней критической области находим из равенства $\Phi(u_\alpha)=\frac{1-2\alpha}{2}$.

Если $Z<u_\alpha$, то нет оснований для отклонения H_0.

Если $Z\geq u_\alpha$, то H_0 отклоняется в пользу $H_1^{(1)}$.

3) При $H_1^{(2)}: M(X)<M(Y)$ критическую точку $u_{1-\alpha}$ левосторонней критической области определяем из равенства $u_{1-\alpha}=-u_\alpha$.

Если $Z>u_{1-\alpha}$, то нет оснований для отклонения гипотезы H_0.

Если $Z\leq u_{1-\alpha}$, то H_0 отклоняется в пользу $H_1^{(2)}$.

▷ ***Пример 2.*** Сравниваются средние доходы фирм X и Y в двух разных, но однотипных отраслях, имеющих нормальное распределение с дисперсиями 1 млн. долл. и 2 млн. долл. соответственно. В первой отрасли по выборке из 20 фирм получен средний доход 1 млн. долл., а во второй по выборке из 25 фирм получен средний доход 0.9 млн. долл. Определить, есть ли основание отклонить гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ с уровнем значимости $\alpha=0.05$.

Решение. В данном случае $Z=\dfrac{1-0.9}{\sqrt{\dfrac{1}{20}+\dfrac{4}{25}}}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}\cong 0.22$.

При H_1: $M(X)\neq M(Y)$ по таблице функции Лапласа определяем две критические точки $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ и $u_{\frac{\alpha}{2}}$ из условий:

$$\Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{1-\alpha}{2}=0.475,\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}=u_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Значит, $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.95$.

Так как $|Z|\cong 0.22<1.95$, то нет оснований для отклонения гипотезы H_0: $M(X)=M(Y)$. □

3⁰. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормальных случайных величин при неизвестных дисперсиях. Более реальной по сравнению с пунктом 2⁰ будет ситуация, когда дисперсии рассматриваемых случайных величин неизвестны.

Пусть случайные величины $X\in N(a_x,\sigma_x)$ и $Y\in N(a_y,\sigma_y)$, причем дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны, но равны. По двум выборкам $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ объемов n и k соответственно требуется проверить гипотезу $M(X)=M(Y)$. Обозначим H_0: $M(X)=M(Y)$, H_1: $M(X)\neq M(Y)$ ($H_1^{(1)}: M(X)>M(Y)$; $H_1^{(2)}: M(X)<M(Y)$).

При этих условиях в качестве критерия проверки гипотезы H_0 принимают случайную величину T:

$$T=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2+(k-1)s_Y^2}}\cdot\sqrt{\frac{nk(n+k-2)}{n+k}},\tag{3}$$

где $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\bar{y}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}y_i$, $s_X^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, $s_Y^2=\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(y_i-\bar{y})^2$.

При справедливости H_0 построенная статистика T имеет распределение Стьюдента с $\nu=n+k-2$ степенями свободы.

1) При H_1: $M(X)\neq M(Y)$ по таблице по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu=n+k-2$ определяем критические точки $t_{1-\frac{\alpha}{2},n+k-2}$ и $t_{\frac{\alpha}{2},n+k-2}$ ($t_{1-\frac{\alpha}{2},n+k-2}=-t_{\frac{\alpha}{2},n+k-2}$) двусторонней критической области.

Если $|T|<t_{\frac{\alpha}{2},n+k-2}$, то нет оснований для отклонения H_0.

Если $|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2},n+k-2}$, то H_0 отклоняем в пользу H_1.

2) При $H_1^{(1)}: M(X) > M(Y)$ находим критическую точку $t_{\alpha,n+k-2}$ правосторонней критической области.

Если $T < t_{\alpha,n+k-2}$, то нет оснований для отклонения H_0.

Если $T \geq t_{\alpha,n+k-2}$, то H_0 отклоняется в пользу $H_1^{(1)}$.

3) При $H_1^{(2)}$: $M(X) < M(Y)$ находим критическую точку $t_{1-\alpha,n+k-2} = -t_{\alpha,n+k-2}$ левосторонней критической области.

Если $T > -t_{\alpha,n+k-2}$, то нет оснований для отклонения H_0.

Если $T \leq -t_{\alpha,n+k-2}$, то H_0 отклоняем в пользу $H_1^{(2)}$.

▷ ***Пример 3.*** В университете проведен анализ успеваемости среди студентов и студенток за последние 25 лет. Случайные величины X и Y – их суммарный балл за время учебы. Получены следующие результаты: $\bar{x} = 400$; $s_X^2 = 300$; $\bar{y} = 420$; $s_Y^2 = 150$. Можно ли с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ утверждать, что девушки учатся лучше ребят?

Решение. Здесь нужно проверить следующую гипотезу:

H_0: $M(X) = M(Y)$; $H_1^{(2)}: M(X) < M(Y)$.

По формуле (3) строим статистику T с учетом, что $n = k = 25$:

$$T = \frac{400-420}{\sqrt{24 \cdot 300 + 24 \cdot 150}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot 25(25+25-2)}{25+25}} \cong -4.71;$$

$$t_{\text{кр}} = -t_{0.05;25+25-2} = -1.68.$$

Поскольку $T \cong -4.71 < -1.68 = t_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 должна быть отклонена в пользу $H_1^{(2)}$.

Значит, можно утверждать, что в университете девушки в среднем учатся лучше ребят. □

4°. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных случайных величин. Часто при сравнении экономических показателей на первый план выходит анализ разброса значений рассматриваемых случайных величин. Например, при решении вопроса об инвестировании в одну из двух отраслей остро встает вопрос риска вложений.

Пусть $X \in N(a_X, \sigma_X)$ и $Y \in N(a_Y, \sigma_Y)$, причем дисперсии σ_X^2 и σ_Y^2 неизвестны. Рассмотрим гипотезу о равенстве дисперсий σ_X^2 и σ_Y^2: H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$; H_1: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ ($H_1^{(1)}: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$).

По независимым выборкам $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(y_1, y_2, ..., y_k)$ объемов n и k соответственно определяются $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_X^2, s_Y^2 (считаем $s_X^2 \geq s_Y^2$, так как в противном случае x и y можно переобозначить).

В качестве критерия проверки гипотезы H_0 принимают случайную величину

$$F = \frac{s_X^2}{s_Y^2}, \qquad (4)$$

определяемой отношением большей исправленной выборочной дисперсии к меньшей. Если гипотеза H_0 верна, то данная статистика F имеет распределение Фишера с $\nu_1 = n-1$ и $\nu_2 = k-1$ степенями свободы.

1) При H_1: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ по таблице критических точек распределения Фишера по уровню значимости α и числом степеней свободы ν_1 и ν_2 определяем критическую точку $F_{\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}$.

Если $F < F_{\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}$, то нет оснований для отклонения H_0.

Если $F \geq F_{\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}$, то H_0 отклоняется в пользу H_1.

2) При $H_1^{(1)}: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ определяется критическая точка F_{α,ν_1,ν_2}.

Если $F < F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$, то нет оснований для отклонения H_0.

Если $F \geq F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$, то H_0 отклоняется в пользу $H_1^{(1)}$.

Отметим, что при проверке гипотезы о равенстве дисперсий в качестве альтернативной гипотезы в большинстве случаев используется гипотеза $H_1^{(1)}$.

▷ ***Пример 4.*** В условиях примера 3 определить, есть ли основание считать, что дисперсии двух случайных величин X и Y существенно отличаются друг от друга, т.е. разброс оценок у студентов больше, чем у студенток.

Решение. Строим гипотезу: H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$; $H_1^{(1)}: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$.

Для проверки гипотезы по формуле (4) вычислим статистику $F = \frac{300}{150} = 2$. Критическая точка $F_{\text{кр}} = F_{0.05;24;24} = 1.98$. Поскольку $F = 2 > 1.98 = F_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 должна быть отклонена в пользу $H_1^{(1)}$. Значит, есть основание считать, что разброс оценок у студентов университета существенно больше разброса в оценках у студенток. □

5⁰. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции. Важным элементом эконометрического анализа является установление наличия связи между различными показателями, например, между ценой и спросом, доходом и потреблением, инфляцией и безработицей. Как правило, анализ начинают с простейшей – линейной зависимости (см. Л. 43). Для установления наличия значимой линейной связи между случайными величинами X и Y следует проверить гипотезу о статистической значимости коэффициента корреляции. В связи с этим рассмотрим следующую гипотезу: H_0: $k_{XY} = 0$; H_1: $k_{XY} \neq 0$. Для проверки гипотезы H_0 по выборке $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n)$ объема n строится статистика

$$T = \frac{\hat{k}_{XY}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-k_{XY}^2}}, \qquad (5)$$

где $\hat{k}_{XY}$ – выборочный коэффициент корреляции.

При справедливости гипотезы H_0 статистика T имеет распределение Стьюдента с $\nu = n-2$ степенями свободы. По таблице критических точек этого распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n-2$ определяем критическую точку $t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$.

Если $|T| < t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$, то нет оснований отклонить гипотезу H_0.

Если $|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$, то H_0 отклоняется в пользу альтернативной гипотезы H_1.

Если H_0 отклоняется, то это означает, что коэффициент корреляции статистически значим, т.е. существенно отличен от нуля. Следовательно, случайные величины X и Y коррелированны, т.е. между ними существует линейная связь.

▷ ***Пример 5.*** Определяется наличие линейной зависимости между уровнями инфляции X и безработицы Y в некоторой стране за 11 лет. По статистическим данным рассчитан выборочный коэффициент корреляции $\hat{k}_{XY} = -0.34$. Существует ли значимая линейная связь между указанными показателями в данной стране на интервале в 11 лет при $\alpha = 0.02$.

Решение. Проанализируем следующую гипотезу:

H_0: $k_{XY} = 0$; H_1: $k_{XY} \neq 0$.

По формуле (5) находим $T = \dfrac{-0.34 \cdot \sqrt{11-2}}{\sqrt{1-(-0.34)^2}} = -3.254$. По таблице распределения Стьюдента находим $t_{кр} = t_{0.01;9} = 2.821$. Поскольку $|T| = 3.254 > 2.821$, то коэффициент корреляции k_{XY} статистически значим. Значит, k_{xy} существенно отличается от нуля, и между уровнями инфляции X и безработицы Y существует определенная отрицательная линейная зависимость. □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Расход X бензина автомобилей некоторой фирмы имеет нормальный закон распределения с $a_X = 7.5$ и $\sigma_X = 0.5$ л. Выпустив новую моди-

фикацию автомобиля, фирма утверждает, что у него средний расход a_Y топлива снижен до 7 л при том же σ. Выборки из 15 автомобилей каждой модели дали следующие средние расходы: $\bar{x} = 7.45$; $\bar{y} = 7.15$. Можно ли по этим данным доверять рекламе фирмы?

2. Два университета (A и B) готовят специалистов аналогичных специальностей. Министерство образования, проверяя качество подготовки университетов, применило для этого объемный тестовый экзамен для студентов пятого курса. Отобранные случайным образом студенты показали следующие суммы баллов:

A: 41, 50, 35, 53, 30, 57, 50, 44, 36, 55, 28, 40, 50.

B: 40, 57, 38, 25, 47, 48, 55, 48, 39, 46, 55, 43, 51, 55, 40.

а) Можно ли утверждать с $\alpha = 0.05$, что один из университетов обеспечивает лучшую подготовку;

б) Сравнить разброс в знаниях студентов этих университетов.

3. Исследуется зависимость между количеством (N) покупателей в ювелирном магазине и количеством (Q) проданных товаров. За 10 дней наблюдений составлена таблица:

N	50	61	72	43	60	65	76	55	62	40
Q	10	12	20	9	15	15	21	14	18	7

Оценить наличие и степень линейной зависимости между N и Q.

■ Лекция 43

Статистическая зависимость между случайными величинами

Определены типы зависимостей между случайными величинами, рассмотрены корреляционное отношение и линейная однофакторная регрессия[*].

1^0. Типы зависимостей между случайными величинами. В лекции 34 речь шла о функциональной зависимости между случайными величинами X и Y, т.е. если $Y=\varphi(X)$, где φ – обычная числовая функция.

Такая зависимость очень жесткая. С другой стороны, когда X, Y *независимы в вероятностном смысле* – это полное отсутствие всякой зависимости, так как условные законы распределения Y по отношению к X не меняются в зависимости от значений случайной величины X.

Можно сказать, что функциональная зависимость и независимость – два крайних полюса зависимости между случайными величинами.

Если же независимости между случайными величинами X и Y нет, то говорят об их *статистической зависимости* – это когда при изменении значения одной величины меняется распределение другой.

В п. 2^0 Л. 34 и п. 5^0 Л. 42 уже говорилось о *корреляционной зависимости* – это когда корреляционный момент K_{XY} или коэффициент корреляции k_{XY} не равны нулю.

Если $M\left(Y/_{X=c}\right)$ меняется в зависимости от c, то говорят о *регрессионной зависимости Y от X*, при этом сама эта зависимость называется *регрессией Y на X*. Часто эту зависимость также называют *корреляционной*.

Такая зависимость имеет также место, когда на функциональную зависимость φ случайной величины Y от X накладываются неконтролируемые случайные возмущения, т.е. имеем $Y=\varphi(X)+\varepsilon$, где ε – некоторая случайная величина с нулевым математическим ожиданием, влияющая на Y, но независимой от X.

Одна из случайных величин, зависимость между которыми анали-

---

[*] Содержание лекции 43 в основном соответствует § 18.3 из [39].

зируется, обычно называется *фактором*, тогда другая считается зависимой от этого фактора.

Например, регрессионная зависимость имеется: а) между ростом и весом человека – средний вес более высоких людей также больше; б) между продажной ценой автомобиля и его возрастом: чем больше возраст, тем меньше средняя продажная цена и т.д.

2⁰. Корреляционное отношение. Такое отношение является показателем степени статистической зависимости. Пусть случайная величина Y зависит в основном от фактора X и некоторого остаточного небольшого по величине фактора в виде случайной величины ε, которая влияет на Y, но не на X. Характеристикой общей изменчивости значений случайной величины Y является ее дисперсия $D(Y) = M\left(\left[Y - a_Y\right]^2\right)$, где $a_Y = M(Y)$. В эту величину вносят свой вклад и фактор X, и остаток ε. Рассмотрим их вклад. Для избежания громоздких обозначений далее будем обозначать через $\overline{Z}$ результат усреднения случайной величины Z, т.е. ее математическое ожидание.

При фиксированном значении фактора X, например при $X = b$, дисперсия $D\left(Y/_{X=c}\right) = M\left(\left[Y/_{X=c} - M\left(Y/_{X=c}\right)\right]^2\right)$ условного распределения $Y/_{X=b}$ как раз характеризует влияние на Y остатка ε при этом значении фактора X, а ее среднее значение $\overline{D\left(Y/_{X=c}\right)}$ характеризует влияние в целом остатка ε на Y, которое обозначим $D(Y, \text{ост})$.

Математическое ожидание $M\left(Y/_{X=c}\right)$ – это центр группирования значений случайной величины Y при $X = c$. В то же время $M(Y)$ – общий центр группирования Y. Поэтому разброс групповых центров относительно общего центра определяет дисперсию $\overline{M\left(\left[Y/_{X=c} - M(Y)\right]^2\right)}$, которая и определяет изменчивость значений Y, вызванную фактором X и обозначается $D(Y, \text{фак})$.

Можно показать, что $D(Y) = D(Y, \text{фак}) + D(Y, \text{ост})$.

Обозначим $\rho^2_{Y/X} = \dfrac{D(Y, \text{фак})}{D(Y)} = 1 - \dfrac{D(Y, \text{ост})}{D(Y)}$. Величина $\rho^2_{Y/X}$ показывает, какая доля вариации значений случайной величины Y обусловлена вариацией значений фактора X и называется *коэффициентом детерминации*, а $\rho_{Y/X} = \sqrt{\rho^2_{Y/X}}$ называется корреляционным отношением.

Для корреляционного отношения имеют место следующие *утверждения*:

1) $0 \le \rho_{Y/X} \le 1$;

2) условие $\rho_{Y/X} = 1$ необходимо и достаточно для однозначной функциональной зависимости Y от X.

Действительно, при $\rho_{Y/X} = 1$ имеем $D(Y, \text{ост}) = \overline{D(Y/X = c)} = 0$, а так как $D(Y/X = c) \ge 0$, то отсюда следует, что $D(Y/X = c) = 0$ при всяком c. Последнее означает, что Y есть константа при всяком значении фактора X, т.е. Y есть функция от X.

Наоборот, если Y есть функция от X, то $D(Y/X = c) = 0$ при всяком c, а тогда $\overline{D(Y/X = c)} = 0$ и, значит, $\rho_{Y/X} = 1$;

3) условие $\rho_{Y/X} = 0$ необходимо и достаточно для отсутствия регрессионной зависимости Y от X.

Действительно, если $\rho_{Y/X} = 0$, то $M(Y/X = c) = M(Y)$, т.е. $M(Y/X = c)$ есть константа, и, значит, нет регрессионной зависимости Y от X. Обратное очевидно.

4) чем ближе $\rho_{Y/X}$ к единице, тем ближе статистическая зависимость Y от X к однозначной функциональной, и наоборот – чем ближе зависимость Y от X к однозначной функциональной, тем ближе $\rho_{Y/X}$ к единице.

На практике совместное распределение случайных величин, как правило, неизвестно, и вместо всех параметров используются их выборочные оценки. Пусть имеется n независимых наблюдений двумерной случайной величины (X, Y). Результаты этих наблюдений, т.е. пары наблюдений значений (x_i, y_i) расположим в двумерную корреляционную таблицу 1. Она строится следующим образом: наблюденные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ фактора X группируем в ν групп, наблюденные значения y_1, $y_2, ..., y_n$ группируем в q групп. Затем подсчитываем числа m_{ji}, $i = 1,\ldots,\nu$, $j = 1,\ldots,q$ таких наблюдений (x, y), в которых x попало в i-ю группу, а y в j-ю группу.

Построим выборочный аналог $\hat{\rho}^2_{Y/X}$ коэффициента детерминации.

Выборочный аналог $D(Y)$ есть $s_Y^2 = \sum\limits_j \frac{(y_j - \bar{y})^2 m_j}{n}$, где $\bar{y} = \sum\limits_j \frac{y_j m_j}{n}$ – общая средняя.

Выборочным аналогом условной дисперсии при $x = x_j$ будет групповая выборочная дисперсия $s_i^2 = \sum\limits_j \frac{\left(y_j - \bar{y}^{(i)}\right) m_{ji}}{n_i}$, где

Таблица 1

	i	1	2	…	ν	
j	X / Y	x_1	x_2	…	x_ν	$m_j = \sum\limits_i m_{ij}$
1	y_1	m_{11}	m_{12}	…	$m_{1\nu}$	m_1
2	y_2	m_{21}	m_{22}	…	$m_{2\nu}$	m_2
…	…	…	…	…	…	…
q	y_q	m_{q1}	m_{q2}	…	$m_{q\nu}$	m_q
$n_i = \sum\limits_j m_{ji} - m_i$		n_1	n_2	…	n_ν	$n = \sum\limits_i \sum\limits_j m_{ji} = \sum\limits_i n_i$
$\bar{y}^{(i)}$		$\bar{y}^{(1)}$	$\bar{y}^{(2)}$	…	$\bar{y}^{(\nu)}$	
s_i^2		s_1^2	s_2^2	…	s_ν^2	

$\overline{y}^{(i)} = \sum_j \frac{y_j m_{ji}}{n_i}$ – групповая средняя; аналогом $D(Y$, ост) является

$s^2_{\text{ост}} = \overline{s_i^2} = \sum_i \frac{s_i^2 n_i}{n}$.

Отсюда определим выборочный аналог $D(Y$, фак), а именно $s^2_{\text{фак}} = s^2_Y - s^2_{\text{ост}}$. Определяем выборочный аналог коэффициента детерминации $\hat{\rho}^2_{Y/X} = \frac{s^2_{\text{фак}}}{s^2_Y}$ и выборочное корреляционное отношение

$\hat{\rho}_{Y/X} = \sqrt{\hat{\rho}^2_{Y/X}}$.

Для $\hat{\rho}_{Y/X}$ справедливы утверждения аналогичные соответствующим утверждениям 1)-4) относительно $\rho_{Y/X}$.

▷ ***Пример 1.*** Система случайных величин (X, Y) имеет таблицу распределения:

Таблица 2

$Y \backslash X$	-1	1
-2	0.4	0
0	0.1	0.1
2	0	0.4

Найти коэффициент детерминации и корреляционное отношение между X и Y.

Решение. Находим ряд распределения Y, $M(Y)$ и $D(Y)$:

Y:

−2	0	2
0.4	0.2	0.4

$, M(Y) = 0, D(Y) = 3.2.$

Найдем условные законы распределения:

$Y/_{X=-1}$

−2	0	2
0.8	0.2	0

, $Y/_{X=1}$

−2	0	2
0	0.2	0.8

,

математические ожидания: $M\left(Y/_{X=-1}\right)=-1.6$, $M\left(Y/_{X=1}\right)=1.6$ и дисперсии: $D\left(Y/_{X=-1}\right)=0.64$, $D\left(Y/_{X=1}\right)=0.64$.

Получаем: $D(Y,\text{ост})=D\left(Y/_{X=-1}\right)\cdot P(X=-1)+D\left(Y/_{X=1}\right)\times$ $\times P(X=1)=0.64$. Значит, коэффициент детерминации $\rho^2_{Y/X}=$

$\rho^2_{Y/X}=1-\dfrac{D(Y,\text{ост})}{D(Y)}=1-\dfrac{0.64}{3.2}=\dfrac{4}{5}$, а корреляционное отношение

$\rho_{Y/X}=\sqrt{\dfrac{4}{5}}\cong 0.9$. □

Поскольку $\rho_{Y/X}$ близко к единице, то зависимость Y от X близка к функциональной. Действительно, из таблицы 2 видно, что при данном значении X с большей вероятностью соблюдается равенство $Y=2X$.

3⁰. Линейная однофакторная регрессия. Рассмотрим систему двух случайных величин (X, Y). Подберем линейную зависимость $y=a+bx=\varphi(x)$ так, чтобы $F(a,b)=M\left([Y-a-bX]^2\right)$ было минимальным. Имеем $F(a,b)=M\left(Y^2-2aY-2bXY+a^2+2abX+b^2X^2\right)=$ $=M\left(Y^2\right)-2aM(Y)-2bM(XY)+a^2+2abM(X)+b^2M\left(X^2\right)$. Приравнивая частные производные от $F(a, b)$ по a и b к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a+bM(X)=M(X), \\ aM(X)+bM\left(X^2\right)=M(XY). \end{cases} \qquad (1)$$

Решаем эту систему (1) относительно a и b получим: $b=\dfrac{K_{XY}}{D_X}$,

$a = M(Y) - \dfrac{M(X)K_{XY}}{D_X}$. Значит, с учетом $K_{XY} = k_{XY}\sigma_X\sigma_Y$, где k_{XY} – коэффициент корреляции, получаем искомую линейную зависимость:

$$y = \varphi(x) = a_Y + \frac{(x - a_X)k_{XY}\sigma_Y}{\sigma_X}, \qquad (2)$$

где $a_Y = M(Y)$, $a_X = M(X)$.

Можно показать, что при этих a и b величина $F(a, b)$, называемая *ошибкой приближения* $\varphi(x)$, равна $M\left([Y - \varphi(X)]^2\right) = \sigma_Y^2(1 - k_{XY})$, а *ошибка регрессии* $M\left(\left[X\left(Y/X\right) - \varphi(X)\right]^2\right) = \sigma_Y^2\left(\rho_{Y/X}^2 - k_{XY}^2\right)$.

Отсюда вытекает:

1) если $|k_{XY}|$ приближается к единице, то уменьшается ошибка приближения, т.е. возрастает концентрация значений двумерной случайной величины (X, Y) около прямой линии, выражаемой уравнением (2). Верно и обратное утверждение. Это означает, что k_{XY} показывает степень линейной функциональной зависимости между случайными величинами X и Y;

2) если $|k_{XY}|$ приближается к $\rho_{Y/X}$, то уменьшается ошибка регрессии, т.е. неизвестная функция регрессии приближается к линейной функции (2). Верно и обратное.

Последнее обстоятельство дает возможность использовать разность $\left(\rho_{Y/X}^2 - k_{XY}^2\right)$ в качестве меры отклонения функции регрессии от линейной.

На практике совместное распределение случайной величины (X, Y) неизвестно, а известны только результаты наблюдений, т.е. выборка пар (x, y) значений случайной величины (X, Y). Тогда все рассмотренные величины заменяем их выборочными аналогами. Для определения a, b получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b\overline{X} = \overline{Y}, \\ a\overline{X} + b\overline{X^2} = \overline{XY}. \end{cases} \qquad (3)$$

Решая систему (3), получим $b = \dfrac{\hat{K}_{XY}}{s_X^2}$, $a = \overline{Y} - \overline{X}\dfrac{\hat{K}_{XY}}{s_X^2}$, где $\hat{K}_{XY}$, s_X^2 – выборочные аналоги корреляционного момента случайных величин X и Y и дисперсии X соответственно.

Учитывая, что $\hat{K}_{XY} = \hat{k}_{XY} s_X s_Y$, где $\hat{k}_{XY}$ – выборочный аналог коэффициента корреляции, получаем, что прямая линия регрессии имеет уравнение

$$y = \overline{Y} + \left(x - \overline{X}\right)\hat{k}_{XY}\frac{s_Y}{s_X}. \tag{4}$$

▷ ***Пример 2.*** Дана таблица 17 испытаний (таблица 3).

Таблица 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
X	0.25	0.37	0.44	0.55	0.60	0.62	0.68	0.70	0.73	0.75	0.82	0.84	0.87	0.88	0.90	0.95	1.00
Y	2.57	2.31	2.12	1.92	1.75	1.71	1.60	1.51	1.50	1.41	1.33	1.31	1.25	1.20	1.19	1.15	1.00

Определить уравнение линии регрессии.

Решение. Составляем расчетную таблицу 4.

Из таблицы получаем: $\sum\limits_{i=1}^{17} x_i = 11.95$; $\sum\limits_{i=1}^{17} y_i = 26.83$; $\sum\limits_{i=1}^{17} x_i^2 = 9.1095$; $\sum\limits_{i=1}^{17} y_i^2 = 45.4127$; $\sum\limits_{i=1}^{17} x_i y_i = 17.3917$. Находим:

$$\overline{X} = \frac{14.95}{17} \cong 0.7029;\ \overline{Y} = \frac{26.83}{17} \cong 1.5782;$$

$$\sigma_X^2 = \frac{9.1095}{17} - (0.7029)^2 \cong 0.0418;\ \sigma_X \cong 0.2042;$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{45.4127}{17} - (1.5782)^2 \cong 0.1806;\ \sigma_Y \cong 0.4250;$$

$$K_{XY} \cong \frac{17.3917}{17} - 0.7029 \cdot 1.5782 \cong -0.0863;$$

Таблица 4

i	X	Y	X^2	Y^2	XY
1	0.25	2.57	0.0625	6.6049	0.6425
2	0.37	2.31	0.1369	5.3361	0.8547
3	0.44	2.12	0.1936	4.4944	0.9328
4	0.55	1.92	0.3025	3.6864	1.0560
5	0.60	1.75	0.3600	3.0625	1.0500
6	0.62	1.71	0.3844	2.9241	1.0602
7	0.68	1.60	0.4624	2.5600	1.0880
8	0.70	1.51	0.4900	2.2801	1.0570
9	0.73	1.50	0.5329	2.2500	1.0950
10	0.75	1.41	0.5625	1.9881	1.0575
11	0.82	1.33	0.6724	1.7689	1.0906
12	0.84	1.31	0.7056	1.7161	1.1004
13	0.87	1.25	0.7569	1.5625	1.0875
14	0.88	1.20	0.7744	1.4400	1.0560
15	0.90	1.19	0.8100	1.4161	1.0710
16	0.95	1.15	0.9025	1.3225	1.0925
17	1.00	1.00	1.0000	1.0000	1.0000
Σ	11.95	26.83	9.1095	45.4127	17.3917

$$k_{XY} \cong \frac{-0.0863}{(0.2042 \cdot 0.4250)} \cong -0.9943.$$

Уравнения линии регрессии:

$$y - 1.5782 = -\frac{0.9943 \cdot 0.4250}{0.2042}(x - 0.7029) \text{ или } y = -2.0695x + 3.0329.$$

Здесь $a = 3.0329$, $b = -2.0695$. □

Замечание 1: Ясно, что рассчитанные по выборочным данным коэффициенты a и b в общем случае являются случайными. В связи с этим целесообразно проводить анализ статистической значимости коэффициентов линейной регрессии, а также по возможности сравнение истинных и оцененных зависимостей (см., например, [20, с. 299 – 307]).

Отметим также, что значение экономических объясняемых переменных зависит обычно не от одного, а нескольких объясняющих факторов, и тогда говорят о линейной зависимой y как от некоторого m-вектора x, т.е. о множественной линейной регрессии [20, с. 307 – 311]; в некоторых экономических ситуациях, встречающихся на практике, удобно использовать нелинейную регрессию [20, с. 359 – 361].

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Система случайных величин (X, Y) равномерно распределена в параллелограмме с вершинами $\left(2; 1 \pm \frac{1}{4}\right)$ и $\left(4; 2 \pm \frac{1}{4}\right)$. Найти корреляционное отношение между X и Y.

2. Система случайных величин (X, Y) имеет следующую таблицу распределения:

Y \ X	-1	0	1
0	0.2	0.1	0.1
3	0.1	0.4	0.1

Найти корреляционное отношение между случайными величинами X и Y.

3. Дана корреляционная таблица для величин X и Y, где X – срок службы колеса вагона в годах, а Y – усредненное значение износа по толщине обода колеса в миллиметрах:

X \ Y	0	2	7	12	17	22	27	32	39
0	3	6							
1	25	108	44	8	2				
2	3	50	60	21	5	5			
3	1	11	33	32	13	2	3	1	
4		5	5	13	13	7	2		
5			1	2	12	6	3	2	1
6		1		1			2	1	1
7			1	1				1	

Здесь целые числа, приведенные в таблице, являются кратностями значений соответствующих случайных точек (количествами опытов появления данных случайных точек).

Определить уравнение линии регрессии.

4. Найти оценки параметров a и b линейной регрессии по выборке (9, 6), (10, 4), (12, 7), (5, 3). Пройдет ли прямая регрессии через точку $(\overline{X}; \overline{Y})$?

■ Лекция 44

Общая характеристика финансового рынка и его составляющих

Дана общая характеристика финансового рынка и его составляющих; рассмотрены статистические характеристики ценных бумаг.

1°. Финансовый рынок. Под *финансовым рынком* понимается совокупность спроса, предложения и реализации ценных бумаг. *Участниками финансового рынка* являются банки, страховые общества и другие финансовые структуры, включая индивидуумов.

Основные ценные бумаги – это акции и облигации. *Акции* – это долевые ценные бумаги. Владелец акции, или акционер имеет право как на участие в управлении компанией, так и на получение дивидендов.

Облигации – это долговые ценные бумаги, выпускаемые государством или теми или иными фирмами. Облигации, в отличие от акций, выпускаются на некоторый срок, по истечении которого погашаются (посредством выкупа). *Характеристиками облигации* являются: время погашения, стоимость погашения (номинал), выплаты до погашения (купоны).

На финансовом рынке его участниками проводятся финансовые операции с помощью финансовых инструментов.

Финансовая операция (дальше просто операция или сделка) – это такая операция, начальное и конечное состояние которой имеет денежную оценку, целью проведения которой является максимизация дохода.

Финансовый инструмент – любой документ или множество документов, с которыми связаны финансовые обязательства, например, данный выпуск акций или данный тираж облигаций.

Результат большинства операций, а также ее характеристики (доход, доходность) заранее предсказать невозможно. Выход заключается в том, чтобы принять определенные соглашения о рынке, позволяющие привлекать для анализа какие-то научные доводы. Обычно принимают следующие предложения:

1. "Скрытые" параметры (типа психологических мотивов) не учитываются. Любой участник рынка стремится действовать так, чтобы обеспечить себе наибольший доход, а не действовать "назло" своему конкуренту и тем самым непредсказуемо с объективной точки зрения. Данное

предложение есть принципиальное основание для применения научных методов анализа рынка.

2. Различные показатели рынка можно моделировать как случайные величины, что позволяет использовать теоретико-вероятностные и статистические методы.

Ясно, что в полной мере это предложение не выполняется, однако так всегда обстоит дело, когда применяются теоретико-вероятностные и статистические методы на практике.

3. Об анализируемом финансовом инструменте (или о близких в некотором смысле к нему понятиях) должна быть накоплена определенная информация, которой должно хватить для статистической обработки с целью получения оценок интересующих нас показателей с нужной точностью. В настоящее время накоплены огромные массивы самой разнообразной информации и толково составленный запрос может принести много нужной информации, например информация о курсе доллара и других валют на мировых валютных рынках за последние годы.

2^0. Финансовые операции. Простейший вид финансовой операции – предоставление в долг некоторой суммы $S(0)$ с условием, что через время T (измеримое, как правило, в годах) будет возвращена сумма $S(T)$.

В результате операция кредитор получит прибыль (доход) $Q = S(T) - S(0)$, а в расчете на единицу кредита

$$r_T = \frac{Q}{S(0)}. \tag{1}$$

Величина r_T, являющаяся в статистическом смысле темпом прироста, называется *эффективностью операции* (с точки зрения кредитора), *процентной ставкой*, *ставкой процента* либо просто *интересом*, *ростом*.

Другим показателем эффективности операции с точки зрения кредитора является *дисконт-отношение прибыли к возвращаемой сумме*:

$$d_r = \frac{Q}{S(T)}. \tag{2}$$

Интерес r_T и дисконт d_T обычно измеряются в процентах, однако при практических расчетах и решении задач нужно использовать их реальные значения.

Для указанных величин справедливы следующие соотношения:

$$r_T = \frac{d_T}{1-d_T}; \; d_T = \frac{r_T}{1+r_T};$$
$$S(T) = S(0)(1+r_T); \; S(0) = S(T)(1-d_T). \qquad (3)$$

Обозначим интерес и дисконт за год через r и d; тогда расчет r_T и d_T можно осуществлять по схеме простых или сложных процентов либо по их комбинации.

Формула расчета по простым процентам

$$r_T = Tr. \qquad (4)$$

При расчете по долгосрочным кредитам на целое число лет применяется схема сложных процентов: на вложенный рубль через год будет получено $1 + r$; отдав в рост эту новую сумму, еще через год, т.е. через два года с начала отсчета получим $(1 + r)^2, \ldots$; через T лет –

$$1 + r_T = (1 + r)^T. \qquad (5)$$

При расчетах за неполное число лет иногда применяют комбинированную схему (сложные проценты – целое число лет, простые – за остаток), т.е. следующую формулу

$$1 + r_T = (1 + r)^{[T]}(1 + r\{T\}), \qquad (6)$$

где $[T]$ – целая часть T (целое число лет, содержащихся в T), $\{T\}$ – дробная часть T; $T = [T] + \{T\}$.

Часто используют также *дисконт-фактор*

$$V_T = \frac{1}{1+r_T} = 1 - d_T. \qquad (7)$$

При расчете по сложным процентам за целое число лет T получаем

$$V_T = \frac{1}{(1+r)^T} = (1-d)^T = V^T, \qquad (8)$$

где V – годичный дисконт-фактор.

Эффективной ставкой r_{ef} называется годичная ставка сложных процентов, которая обеспечивает заданное соотношение между возвращаемой суммой $S(T)$ и кредитом $S(0)$:

$$(1+r_{ef})^T = \frac{S(T)}{S(0)},$$

откуда

$$r_{ef} = \left[\frac{S(T)}{S(0)} \right]^{\frac{1}{T}} - 1. \qquad (9)$$

В более сложной ситуации финансовая операция рассматривается как поток платежей. Получение кредита может быть распределено по времени точно так же, как и выплаты по нему. То же можно сказать и об операциях с ценными бумагами.

Если рассмотреть поток платежей с позиций одного из участников, то естественно считать все поступления положительными, а выплаты отрицательными. Результат такой распределенной операции можно измерить путем приведения всех платежей с учетом знака к начальному моменту времени. Эта величина называется *чистой прибылью* NPV (*net present value*):

$$NPV = \sum_{k=1}^{N} S_k V_{t_k} = \sum_{k=1}^{N} S_k \frac{1}{(1+r)^{t_k}}, \qquad (10)$$

где $t_1, \ldots, t_N$ – моменты платежей $S_1, \ldots, S_N$; V_{t_k} – дисконт-фактор в момент t_k. При этом $t_1 = 0$, т.е. момент первой выплаты принимается за начало отсчета.

▷ **Пример 1.** Контракт между фирмой A и банком B предусматривает, что банк предоставляет фирме кредит в течение трех лет с ежегодными платежами 1 млн. долл. в начале каждого года при ставке 10% годовых. Фирма возвращает долг: в конце третьего года 1 млн. долл., четвертого – 2 млн. долл., пятого года 1 млн. долл.

Приемлема ли эта операция для банка?

Решение. По формуле (10) ($t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, $t_5 = 4$, $t_6 = 5$) находим $NPV = -1 - \frac{1}{1+0.1} - \frac{1}{(1+0.1)^2} + \frac{1}{(1+0.1)^3} + {}$

$+ \frac{2}{(1+0.1)^4} + \frac{1}{(1+0.1)^5} = 0.003$ млн. долл. > 0, т.е. эта операция приемлема для банка. □

Для сравнения различных финансовых операций между собой используется *эффективная ставка операции*, которая обеспечивает минимальное из приемлемых значений $NPV = 0$, т.е. является корнем уравнения

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{S_k}{\left(1+r_{ef}\right)^{t_k}}=0\,,\ t_1=0. \qquad \textbf{(11)}$$

В частности, для простейшей финансовой операции

$$-S(0)+\frac{S(T)}{\left(1+r_{ef}\right)^{T}}=0\,,$$

откуда

$$r_{ef}=\left[\frac{S(T)}{S(0)}\right]^{\frac{1}{T}}-1\,,$$

что совпадает с (9).

Если платежи совершаются ежедневно и много раз за день, то удобно рассматривать накопленную сумму таких платежей $S(t)$ конкретно финансового учреждения как функцию непрерывного времени. Тогда можно говорить о *мгновенной скорости роста*

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

и силе роста (силе интереса)

$$\delta(t)=\frac{\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}}{S(t)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ln S(t)\right]. \qquad \textbf{(12)}$$

Если $\delta(t)$ задано, то можно найти накопленную сумму $S(T)$ из (12):

$$S(T)=S(0)e^{\int_0^T \delta(t)\mathrm{d}t}\,.$$

Сравнивая последнее выражение с (3), получаем

$$1+r_T=e^{\int_0^T \delta(t)\mathrm{d}t}\,.$$

При $\delta(t)=\delta=\mathrm{const}$ имеем

$$1+r_T=e^{\delta T}\,,$$

или

$$\delta = \frac{1}{T}\ln\left(1 + r_T\right).$$

Если рост r_T вычисляется по формулам сложных процентов с годовой ставкой r, то

$$\delta = \frac{1}{T}\ln\left(1 + r\right)^T = \ln\left(1 + r\right),$$

а при малых значениях r получаем

$$\delta \cong r\ .$$

Рассмотрим некоторые толкования надежности, рискованности операций инструментов.

Надежность операции как вероятность ее успешного завершения. Если окажется, что операцию нельзя довести до конца, то встает вопрос о ее надежности, т.е. вероятности ее осуществления. Например, какова вероятность осуществления сделки? Можно различать надежность историческую и прогнозную. *Историческая* считается по информации об уже осуществленных операциях, т.е. подсчитывается доля успешно осуществленных, доведенных до конца подобных операций по отношению ко всем, которые были начаты, но, возможно, не закончены. *Прогнозную надежность* оценивают исходя из исторической информации или мнения экспертов с учетом, если это возможно, изменившихся условий.

Пусть, например, фирма по продаже и покупке жилья работает на рынке 10 лет. В ней ведется учет сделок на всех этапах, начиная с обращения клиента и заканчивая окончательным оформлением сделки. Сделки типизированы. Этапы заключения сделок четко описаны, и агент после окончания каждого этапа обязан обратиться к базе данных (БД) и проанализировать сходные (похожие) сделки, чтобы попытаться уберечь себя от ошибок, из-за которых его сделка может быть не доведенной до конца. При таком анализе, он может узнать из БД много полезной информации: каков процент сделок, “развалившихся” после данного этапа, по какой причине сделки “развалились” и т.д.

Надежность операции как предсказуемость. Такое понимание предсказуемости отражает некоторый аспект ее интуитивного неформального понимания. Любой случайный процесс имеет элемент ненадежности. Однако, если некоторые интересующие нас характеристики случайного процесса, например доход, можно предсказать совершенно точно, что позволит четко планировать наши некоторые дальнейшие действия, то случайность процесса можно игнорировать. Подобные соображения широко применяются, например, в страховании, где действует закон больших чисел, и хотя судьбу конкретной автомашины невозможно предсказать, но сколько их будет всего разбито можно предсказать с точностью до долей процента, что позволяет совершенно четко планировать работу страховых компаний.

Рискованность операций и инструментов. В общем случае финансовые операции рискованны, т.е. точный доход от них заранее предсказать невозможно. Отметим, что риск возникает тогда, когда не ясна полностью ситуация, или неизвестно, как будут развиваться события в будущем.

В качестве примера рассмотрим операцию банка по двойной конверсии рублевой суммы в доллары в надежде, что в будущем курс доллар-рубль поднимется и обратная конверсия долларов в рубли принесет некоторую прибыль. Здесь не ясно поведение курса доллар-рубль и развитие ситуации с интересующей нас точки зрения зависит от нашего незнания действий Центробанка, а также и от случайности – случайных, непредсказуемых факторов мирового масштаба, влияющих на положение доллара как мировой валюты.

Последний вывод справедлив и в самом общем смысле: риск есть производные от этих двух факторов (рис. 44.1).

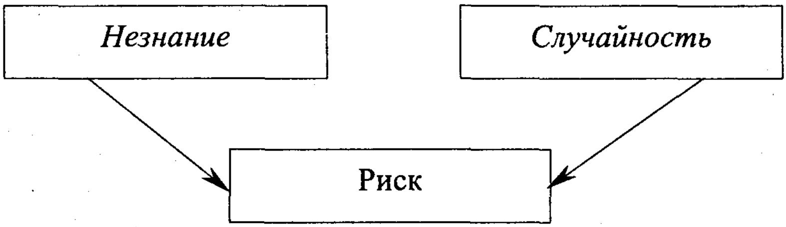


Рис. 44.1

На преодоление незнания тратятся большие средства, задействованы большие силы. Современная тенденция состоит в уменьшении незнания, для чего ЛПР обзаводится всевозможными информационными системами обработки и принятия решений. Таким образом, риск от незнания все время уменьшается и во многих случаях сегодня его уже можно игнорировать.

Остается случайность Результат финансовых операций почти всегда случаен. В частности реальный размер дохода, например, зависит от инфляции, а ее полностью предугадать невозможно в силу многих случайных факторов, которые на нее влияют. В связи с этим возникает много вопросов: 1) Каков средний ожидаемый доход? 2) Какова вероятность получения дохода не менее заданного? 3) Каков риск несет данная операция? 4) Какую операцию из нескольких выбрать, если у них разные доходы и риски? Что надо предпринять, чтобы получить такой-то доход с вероятностью не меньше заданной?

Зная распределение случайного дохода Q, ответить на некоторые из указанных вопросов можно, если использовать теорию вероятностей и математическую статистику.

Пусть, например, распределение случайного дохода Q имеет вид:

−10	0	10	20	30	40	50
0.1	0.2	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1

Тогда ответы на поставленные вопросы такие: 1) вычисляем математическое ожидание $\overline{Q}$, оно равно 21; 2) строим функцию распределения $F(x)$, и тогда вероятность получения дохода не менее заданного равна $P(Q \geq b) = 1 - F(b)$; для конкретных же чисел эту вероятность легко подсчитать непосредственно, например, $P(Q \geq 10) = 0.7$; 3) ответ на этот вопрос зависит, как понимать риск в данной ситуации; здесь, естественно, понимать риск как среднее квадратическое, и тогда получаем $\sigma_Q = \sqrt{M\left(Q - \overline{Q}\right)^2} = \sqrt{285} \cong 16.9$; 4) подобный вопрос решается с помощью п.3^0 Л.29; 5) для ответа на этот вопрос нужно более подробное описание ситуации, и здесь может помочь байесовский подход к принятию решений, описанный в п.5^0 Л.29.

3^0. Статистические характеристики ценных бумаг. Из характеристик ценных бумаг наиболее значимы две: эффективность (или средняя ожидаемая эффективность) E и рискованность r.

Эффективность есть некоторый обобщенный показатель дохода, прибыли или доходности. Обычно эффективность считается случайной величиной E, *среднее ожидаемое значение* есть математическое ожидание $m_E = ME$. При исследовании финансового рынка дисперсию обычно называют *вариацией* V, и *рискованность* r обычно отождествляют с мерой рассеянности значений эффективности вокруг ее некоторого среднего значения. Часто рискованностью отождествляют со средним квадратическим отклонением. Итак, $V = DE = M(E - m_E)^2$, $r = \sqrt{V} = \sqrt{M(E - m_E)^2}$.

Если имеется выборка $w = (e_1,\ldots,e_n)$ значений эффективности ценной бумаги, то $\overline{E} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i$ есть состоятельная и несмещенная оценка средней ожидаемой эффективности. Величины $\widetilde{V} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(e_i - \overline{E}\right)^2$ и $\widetilde{r} = \sqrt{\widetilde{V}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(e_i - \overline{E}\right)^2}$ – состоятельные и несмещенные оценки дисперсии и рискованности.

Распределение эффективности как случайной величины почти никогда не бывает известным. На практике, как правило, имеется лишь ряд ее значений, по которому можно вычислять оценки нужных параметров ее распределения, с которыми и приходится иметь дело.

▷ ***Пример 2.*** Имеем ряд значений эффективности (0, 5, 6, 7, 4, 8, 3, 4, 6, 1, 2, 5, 6, 9, 6, 7, 3, 5, 7, 6). Найти среднее значение и оценку рискованности.

Решение. Используем приведенные выше формулы: $\overline{R} = \frac{1}{20}\times$ $\times(0++5+6+7+4+8+3+4+6+1+2+5+6+9+6+7+3+5+7+6) = 5$,

$$\widetilde{V} = \frac{1}{19}\left[(-5)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-2)^2 + 1^2 + 1^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + \right.$$

$$\left. + 0^2 + 1^2 + 4^2 + 1^2 + 2^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2\right] = \frac{102}{19},\ \widetilde{r} = \sqrt{\widetilde{V}} \cong 2.4.\ \square$$

Отметим еще раз единственное фундаментальное правило, связывающее эффективность и рискованность операций и инструментов финансового рынка: *между эффективностью и рискованностью существует прямая регрессионная зависимость – более эффективные (более доходные) операции, как правило, и более рискованные.*

✍ Задания для самостоятельной работы

1. Рассмотреть следующие высказывания и определить, что в них – незнание или случайность:

а) вы не имеете данных о динамике курса доллар-рубль за прошлый год;

б) вы не имеете данных о состоянии активов вашего банка;

в) вы решаете вопрос о выдаче кредита клиенту, о котором нет детальных сведений, но понятна его принадлежность к определенной социальной группе;

г) выдан кредит под залог жилого дома кредитора; назовите возможные последствия, чем они обусловлены;

д) стаж работы кассира, связь стажа с незнанием и случайными ошибками.

2. Для ряда значений эффективности (1, 3, 5, 7, 9, 11, 6, 3, 4, 15, 20, 1, 3, 7, 9, 13, 11, 3, 2, 8) определить среднее значение и оценку рискованности.

3. Некто положил в банк 100 тыс. долл. Ежемесячно на эту сумму выплачивается 1.6 %. В конце месяца клиент хотел бы получать по 2 тыс. долл.

Сколько месяцев ему придется ждать?

■ Лекция 45

Оптимизация портфеля ценных бумаг

Рассмотрены сущность портфельного подхода и задача оптимизации портфеля ценных бумаг.

1°. Сущность портфельного подхода. На финансовом рынке обращается, как правило, множество ценных бумаг: государственные ценные бумаги, акции частных фирм, векселя и т.п. В лекции 44 уже отмечалось, что эффективность и рискованность ценных бумаг различны. Малорисковые ценные бумаги, как правило, и малодоходны; высокодоходные, как правило, более рисковые.

Любая система мер, направленная на снижение риска, называется *хеджированием*. Далее будет рассмотрена математическая модель, позволяющая выполнить хеджирование путем оптимизации портфеля ценных бумаг.

Покупая акции одной компании, инвестор ставит свое благополучие в зависимость от курсовых колебаний акций этой компании. Если же он вложит свой капитал в акции нескольких компаний, то эффективность сформированного таким образом портфеля ценных бумаг будет зависеть от усредненного курса нескольких компаний, а степень неопределенности будет задаваться усредненной дисперсией. Если такая дисперсия меньше отдельных дисперсий, то, выполняя эту операцию, мы уменьшаем неопределенность.

Рассмотрим теперь общую задачу распределения капитала, который участник рынка хочет потратить на покупку ценных бумаг, по различным видам ценных бумаг.

Пусть x_i – доля капитала, потраченная на закупку ценных бумаг i-го вида, а E_i – случайная эффективность (например, доход за некоторый период времени) ценных бумаг i-го вида, стоящих одну денежную единицу. Пусть далее m_i, σ_i – ожидаемая эффективность и среднее квадратическое отклонение этой эффективности, т.е. m_i – математическое ожидание эффективности R_i и $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$, где V_{ii} – вариация, или дисперсия этой эффективности. Через V_{ij} обозначим ковариацию ценных бумаг i-го и j-го видов (или корреляционный момент K_{ij}). Рискованность ценной бумаги i-го вида отождествим со средним квадратическим отклонением $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$. Набор ценных бумаг у участника рынка называется его *порт-*

фелем. Эффективность портфеля (в простейшем случае это доход, который приносят ценные бумаги за какой-нибудь промежуток времени) в общем случае есть случайная величина, которую обозначим через E_p. Тогда ожидаемое значение этой эффективности $m_p = ME_p = \sum_i x_i m_i$, дисперсия портфеля есть $DE_p = V_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Так как $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$ – мера рискованности i-ой ценной бумаги, то величину $\sigma_p = \sqrt{DE_p}$ можно назвать *риском портфеля*. Таким образом, получены формулы для выражения эффективности и риска портфеля через эффективности составляющих его ценных бумаг и их ковариации.

Изучим влияние корреляции разных ценных бумаг. Пусть вначале ценные бумаги различных видов ведут себя независимо, более точно – они некоррелированы, т.е. $V_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Тогда $V_p = DE_p = \sum_i x_i V_{ii}$,

$\sigma_p = \sqrt{\sum_i x_i V_{ii}}$.

Предположим далее, что деньги вложены равными долями, т.е. $x_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$; тогда $m_p = \frac{1}{n}\sum x_i$ – средяя ожидаемая эффективность портфеля, риск портфеля равен $\sigma_p = \sqrt{V_p} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i V_{ii}}$.

Пусть $\bar{\sigma} = \max \sigma_i$. Тогда $\sigma_p = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}$, т.е. при некоррелированных ценных бумагах, при росте числа их видов и в портфеле, риск портфеля ограничен и стремится к нулю при $n \to \infty$.

Этот вывод называют *эффектом диверсификации портфеля*, и он представляет собой главное практическое правило работы с ценными бумагами на финансовом рынке.

Изучим теперь, как отражается корреляция между видами ценных бумаг на характеристиках портфеля. Она не влияет на эффективность портфеля, ибо $m_p = \sum_i x_i m_i$, но сказывается на его вариации или риске, ибо $V_p = \sum_{i,j} x_{ij} V_{ij}$. Рассмотрим коэффициенты корреляции $k_{ij} = \frac{V_{ij}}{(\sigma_i \sigma_j)}$.

Тогда $V_p = \sum_{i,j} (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) k_{ij}$. Для понимания влияния корреляции рассмотрим два крайних случая:

1. Случай полной прямой корреляции, т.е. когда все $k_{ij} = 1$ – это значит, что при изменении i-го фактора j-ый также изменяется, причем прямо пропорционально. Тогда $V_p = \sum_{i,j} (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) = \sum_i (\sigma_i x_i)^2$. Если при этом вложить деньги равными долями, т.е. $x_i = \frac{1}{n}$, то $V_p = \frac{1}{n^2}\left(\sum_i \sigma_i\right)^2$ и риск портфеля $\sigma_p = \frac{1}{n}\sum_i \sigma_i$. Если $\underline{\sigma} \le \sigma_i \le \overline{\sigma}$, то и $\underline{\sigma} \le \sigma_p \le \overline{\sigma}$.

Следовательно, при полной прямой корреляции диверсификация портфеля не дает никакого эффекта – риск портфеля равен среднему арифметическому рисков составляющих его ценных бумаг и к нулю не стремится при росте числа видов ценных бумаг.

Отметим, что положительная корреляция между эффективностями двух ценных бумаг имеет место, когда курс обеих определяется одним и тем же внешним фактором, причем изменение этого фактора действует на обе бумаги в одну и ту же сторону.

2. Случай полной обратной корреляции, т.е. когда все $k_{ij} = -1$, если $i \ne j$. Для понимания существа дела рассмотрим портфель, состоящий всего из двух видов ценных бумаг. Тогда

$$V_p = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1 x_1 x_2 \sigma_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2, \text{ и если } x_2 = \frac{x_1 \sigma_1}{\sigma_2}, \text{ то } V_p = 0.$$

Отсюда следует, что при полной обратной корреляции возможно такое распределение вложений между видами ценных бумаг, что риск полностью отсутствует.

Отметим, что полная обратная корреляция – это довольно редкое явление, и обычно она очевидна.

2⁰. Оптимальный портфель. Пусть имеется n видов ценных бумаг, из которых инвестор может сформировать портфель. Они характеризуются эффективностями $E_1, E_2, \ldots, E_n$, являющимися случайными величинами с известными математическими ожиданиями $m_j = DE_j$ и известной ковариационной матрицей $B = (\text{cov}(E_i, E_j)) = (V_{ij})$, в частности $\text{cov}(E_i, E_i) = V_{ii} = DE_i = \sigma_i^2$.

Если инвестор распределил свой капитал долями x_i, $0 \le x_i \le 1$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, в разные ценные бумаги, то эффективность сформированного портфеля

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i \tag{1}$$

будет случайной величиной, которая имеет математическое ожидание и дисперсию:

$$m_p = \sum_i x_i m_i ,$$

$$\sigma_p^2 = V_p = DE_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} .$$

Распределение $\text{col}(x_1; \ldots; x_n)$, $0 \le x_i \le 1$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, называют *структурой портфеля ценных бумаг*.

Оставив за инвестором выбор средней эффективности и минимизируя в этом случае неопределенность (риск портфеля), получаем следующую задачу по оптимизации портфеля ценных бумаг:

$$\min V_p = \min \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 , \\ \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = m_p , \\ x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 , \end{gathered} \tag{2}$$

где m_p – выбранное инвестором значение средней эффективности портфеля.

Задача оптимизации (2) является задачей нелинейного, а точнее квадратичного программирования и для ее решения, естественно, может быть применен метод, изложенный в Л. 17.

Применим метод решения, предложенный в Л. 12. Опустив условие неотрицательности переменных, получим так называемую *задачу Марковица*, которую решаем с помощью функции Лагранжа

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda,\mu)=\sum_{i,j=1}^{n}V_{ij}x_ix_j-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i-1\right)-\mu\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\theta_i-m_p\right).$$

Сведем задачу на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум, т.е. к решению системы $(n+2)$ уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_l}=2\sum_{i=1}^{n}b_{il}x_i-\lambda-\mu m_l=0,\ l=\overline{1,n},$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}x_i-1=0\ ,\ \frac{\partial L}{\partial\mu}=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i-m_p=0 \tag{3}$$

с $(n+2)$-мя переменными $x_1, \ldots, x_n, \lambda$, μ .

Введем следующие обозначения:

$$e=\mathrm{col}(1;\ldots;1),\ x=\mathrm{col}(x_1;\ldots;x_n),\ m=\mathrm{col}(m_1;\ldots;m_n),\ x'=(x_1;\ldots;x_n),$$

$$m'=(m_1;\ldots;m_n),$$

где $'$ (штрих), как и раньше, применяется для обозначения операции транспонирования матрицы.

Запишем уравнения (3) в виде

$$Bx=\frac{\lambda}{2}e+\frac{\mu}{2}m, \tag{4}$$

$$e'x=1, \tag{5}$$

$$m'x=m_p. \tag{6}$$

Пусть ковариационная матрица B невырождена (считаем, что между эффективностями $E_1, \ldots, E_n$ нет линейной связи). Тогда существует обратная матрица B^{-1}. Разрешая систему (4) в матричной форме относительно x, получим

$$x=\frac{\lambda}{2}B^{-1}e+\frac{\mu}{2}B^{-1}m. \tag{7}$$

Подставив это решение в (5) и (6), получим два уравнения для определения $\frac{\lambda}{2}$ и $\frac{\mu}{2}$:

$$\begin{cases} \left(e'B^{-1}e\right)\dfrac{\lambda}{2}+\left(e'B^{-1}m\right)\dfrac{\mu}{2}=1, \\ \left(m'B^{-1}e\right)\dfrac{\lambda}{2}+\left(m'B^{-1}m\right)\dfrac{\mu}{2}=m_p. \end{cases}$$

Решая последнюю систему двух уравнений по правилу Крамера, находим:

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{\Delta}\left[\left(m'B^{-1}m\right)-m_p\left(e'B^{-1}m\right)\right],\ \frac{\mu}{2}=\frac{1}{\Delta}\left[m_p\left(e'B^{-1}m\right)-\left(m'B^{-1}m\right)\right],$$

где $\Delta=\left(e'B^{-1}e\right)\left(m'B^{-1}m\right)-\left(m'B^{-1}e\right)^2$.

Подставляя это решение в (7), получим следующую структуру оптимального портфеля:

$$x^*=\frac{1}{\Delta}\left\{\left[\left(m'B^{-1}m\right)-m_p\left(e'B^{-1}m\right)\right]B^{-1}e+\left[m_p\left(e'B^{-1}e\right)-\left(m'B^{-1}e\right)\right]B^{-1}m\right\} \quad (8)$$

Кроме того, находим минимальную дисперсию, соответствующую оптимальной структуре:

$$\left(\sigma_p^*\right)^2=\left(x^*\right)'Bx^*=\frac{1}{\Delta}\left[m_p^2\left(e'B^{-1}e\right)-2m_p\left(m'B^{-1}e\right)+\left(m'B^{-1}m\right)\right]. \quad (9)$$

Если в решении некоторые $x_i^*\le 0$, то исключаем из портфеля соответствующие ценные бумаги и решаем задачу заново.

Если эффективности некоррелированы, то ковариационная матрица B и обратная ей B^{-1} диагональны и имеют вид:

$$B=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sigma_1^2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{\sigma_1^2} \end{pmatrix}.$$

В этом случае выражения для оптимальной структуры и отвечающей ей дисперсии упрощаются. Имеем

$$e'B^{-1}e=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2},\ \left(e'B^{-1}m\right)'=m'B^{-1}e=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{\sigma_i^2},\ m'B^{-1}m=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i^2}{\sigma_i^2}.$$

При расчетах удобно пользоваться следующими естественными предположениями:

а) все средние эффективности ценных бумаг различны (если бы было два вида ценных бумаг с одинаковыми средними эффективностями, но разными дисперсиями, то инвестор всегда выбрал бы бумагу с меньшей дисперсией), и тогда перенумеруем их в порядке убывания их средних эффективностей

$$m_1>m_2>\ldots>m_n;$$

б) большим средним эффективностям соответствуют большие дисперсии

$$\sigma_1^2>\sigma_2^2>\ldots>\sigma_n^2$$

(это предположение естественно, так как из двух ценных бумаг, одна из которых имеет большую эффективность, а другая – большую дисперсию, инвестор всегда выбрал бы первую).

Тогда оптимальная структура портфеля и дисперсия оптимального портфеля, как легко показать, принимают следующий вид:

$$x_l^*=\frac{1}{\sigma_l^2\sum\limits_{i<j}\frac{\left(m_i-m_j\right)^2}{\sigma_i^2\sigma_j^2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(m_i-m_p\right)\left(m_i-m_l\right)}{\sigma_i^2},\quad l=\overline{1,n}, \tag{10}$$

$$\left(\sigma_p^*\right)^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\left(m_i-m_p\right)^2}{\sigma_i^2}}{\sum\limits_{i<j}\frac{\left(m_i-m_j\right)^2}{\sigma_i^2\sigma_j^2}}. \tag{11}$$

▷ ***Пример 1.*** Рассмотрим случай двух видов ценных бумаг. В этом случае задача (2) принимает вид

$$\min\left(V_{11}x_1^2+2V_{12}x_1x_2+V_{22}x_2^2\right)$$

$$x_1m_1+x_2m_2=m_p,$$

$$x_1 + x_2 = 1,$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0.$$

Решение. Пусть для определенности $m_1 > m_2$. Из последних двух уравнений получаем x_1, x_2: $x_1^* = \dfrac{(m_p - m_2)}{(m_1 - m_2)}$, $x_2^* = \dfrac{(m_p - m_1)}{(m_2 - m_1)}$.

Отсюда заключаем, что если требуемая эффективность портфеля лежит между эффективностями видов ценных бумаг, то обе доли x_1^* и x_2^* положительны.

Если же $m_p > m_1$, то $x_2^* < 0$, и исключаем вторую ценную бумагу из портфеля. □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Инвестор может составить портфель из трех видов ценных бумаг, эффективности которых E_1, E_2, E_3 являются некоррелированными случайными величинами и имеют следующие параметры: $ME_1 = 11$, $\sigma_1 = 4$; $ME_2 = 10$, $\sigma_2 = 3$; $ME_3 = 9$, $\sigma_3 = 1$ (все данные в процентах к цене покупки).

Определить оптимальный портфель при $m_p = 10$.

2. Пусть инвестор имеет возможность составить портфель ценных бумаг из четырех видов некоррелированных ценных бумаг (вкладывая деньги равными долями), средняя эффективность которых и риски даны в таблице

i	1	2	3	4
m_i	3	5	8	10
σ_i	2	4	6	8

.

Проанализировать несколько вариантов портфеля:

а) портфель образован только бумагами 1-го и 2-го видов;

б) портфель образован только из бумаг 1-го, 2-го, 3-го видов;

в) портфель образован из бумаг всех четырех видов.

■ Лекция 46

Модификация портфеля ценных бумаг

Рассмотрен оптимальный портфель при наличии безрисковых бумаг и изучено влияние ведущего фактора на составляющие финансового рынка.

1°. Оптимальный портфель при наличии безрисковых бумаг. Через несколько лет после опубликования результатов Марковица, изложенных в Л. 45, другой крупнеший американский экономист Д. Тобин заметил, что при наличии на рынке безрисковых бумаг (к таким в определенной степени можно отнести государственные ценные бумаги) решение задачи об оптимальном портфеле существенно упрощается и приобретает некоторые новые качества.

Пусть m_0 – эффективность безрисковых бумаг, а x_0 – доля капитала, вложенного в них; m_r – средняя ожидаемая эффективность и V_r, σ_r – вариация (дисперсия), среднее квадратичное отклонение эффективности рисковой части портфеля, в которую вложено $(1-x_0)$ часть всего капитала. Тогда ожидаемая эффективность всего

$m_p = m_0 + \dfrac{\sigma_p(m_r - m_0)}{\sigma_r}$, т.е. ожидаемая эффективность портфеля линейно зависит от его риска.

Рассмотрим задачу об оптимальном портфеле в этом случае, причем рисковые виды ценных бумаг нумеруем от 1 до n.

Тогда в строгой постановке получаем следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j, \tag{1}$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \text{ или } e'x + x_0 = 1, \tag{2}$$

$$x_0 m_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = m_p \text{ или } m'x + m_0 x_0 = m_p, \tag{3}$$

$$x_0 \ge 0,\ x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, \tag{4}$$

при этом естественно предполагать, что $m_0 < m_p$.

Как и в Л. 45, решим задачу без учета ограничений (4) (*задача Тобина*).

Строим функцию Лагранжа

$$L(x_0, x_1, \ldots, x_n, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij}x_i x_j - \lambda\left(\sum_{i=0}^{n} x_i - 1\right) - \mu\left(\sum_{i=0}^{n} m_i x_i - m_p\right)$$

и приравниваем к нулю ее производные по x_i:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_0} = -(\lambda + \mu m_0) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_l} = 2\sum_{i=1}^{n} V_{il}x_i - \lambda - \mu m_l = 0, l = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5}$$

Из (5), используя обозначения Л. 45, получаем

$$\lambda = -\mu m_0, \tag{6}$$

$$Bx^* = \frac{\lambda}{2}e + \frac{\mu}{2}m,$$

отсюда

$$x^* = \frac{\lambda}{2}B^{-1}e + \frac{\mu}{2}B^{-1}m. \tag{7}$$

Подставляя эти выражения в (2), (3), получим два уравнения относительно μ и x_0^*:

$$\frac{\mu}{2}\left(-m_0 e' B^{-1} e + e' B^{-1} m\right) = 1 - x_0^*,$$

$$\frac{\mu}{2}\left(-m_0 m' B^{-1} e + m' B^{-1} m\right) = m_p - m_0 x_0^*.$$

Поделив второе на первое, находим

$$\frac{m_p - m_0 x_0^*}{1 - x_0^*} = \frac{(m' B^{-1} m) - m_0(m' B^{-1} e)}{(e' B^{-1} m) - m_0(e' B^{-1} e)}.$$

Отсюда

$$x_0^* = \frac{\left[\left(m'B^{-1}m\right) - m_0\left(m'B^{-1}e\right)\right] - m_p\left[\left(e'B^{-1}m\right) - m_0\left(e'B^{-1}e\right)\right]}{\left[\left(m'B^{-1}m\right) - m_0\left(m'B^{-1}e\right)\right] - m_0\left[\left(e'B^{-1}m\right) - m_0\left(e'B^{-1}e\right)\right]}. \quad \textbf{(8)}$$

Используя x_0^*, получаем

$$\mu = \frac{2\left(m_p - m_0\right)}{\left(m'B^{-1}m\right) - 2m_0\left(m'B^{-1}e\right) + m_0^2\left(e'B^{-1}e\right)} = \frac{m_p - m_0}{\left(m - m_0 e\right)' B^{-1}\left(m - m_0 e\right)}.$$

Поэтому согласно (6) и (7) имеем:

$$\lambda = \frac{2m_0\left(m_p - m_0\right)}{\left(m - m_0 e\right)' B^{-1}\left(m - m_0 e\right)},$$

$$x^* = \frac{\left(m_p - m_0\right)B^{-1}\left(m - m_0 e\right)}{\left(m - m_0 e\right)' B^{-1}\left(m - m_0 e\right)}. \quad \textbf{(9)}$$

Значит,

$$\left(\sigma_p^*\right)^2 = \left(x^*\right)' Bx^* = \frac{\left(m_p - m_0\right)^2}{\left(m - m_0 e\right)' B^{-1}\left(m - m_0 e\right)}$$

или

$$\sigma_p^* = \frac{m_p - m_0}{\Delta},$$

где $\Delta^2 = \left(m - m_0 e\right)' B^{-1}\left(m - m_0 e\right)$.

Если некоторые из θ_i меньше нуля в решении (8), (9), то исключаем из портфеля соответствующие ценные бумаги и решаем задачу заново.

▷ ***Пример 1.*** Сформировать оптимальный портфель заданной эффективности $m_p = 6$ из трех видов ценных бумаг: безрисковых эффективности 2 и некоррелированных рисковых ожидаемых эффективностей 4 и

10 и рисками $\sigma_1 = 2$ и $\sigma_2 = 4$ соответственно. Как устроена рисковая часть оптимального портфеля?

Решение. Здесь $m_0 = 2$, $m = \text{col}\,(4;10)$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$, $m_p = 6$. Для использования формулы (9) вычислим обратную матрицу к матрице B.

Имеем $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$. Далее получаем $B^{-1}(m - m_0 e) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ (m - m_0 e)' B^{-1}(m - m_0 e) = (2;\quad 8) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 5.$$ Итак, вектор долей рисковых бумаг $x^* = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, т.е. рисковые доли должны быть одинаковы, и каждая из них равна $\frac{2}{5}$. Следовательно, $x_0^* = \frac{1}{5}$. □

2⁰. Влияние ведущего фактора на составляющие финансового рынка. *Цель анализа финансового рынка* – разработка рекомендаций для инвесторов: в какие ценные бумаги вкладывать капитал и в каком количестве. В п. 1^0 рассмотрено решение задачи формирования оптимального портфеля ценных бумаг. Отметим, что такое решение носит несколько формальный характер, так как предполагает, что эффективности вложений являются случайными величинами с заданными вектором математических ожиданий и матрицей ковариации.

Возникает естественный вопрос: откуда взять эти величины?

Ответить на поставленный вопрос в некотором смысле можно так. В развитых странах регулярно публикуются сведения о биржевом курсе ценных бумаг, прежде всего акций ведущих компаний. Значит, можно проанализировать последовательности, отражающие историю курсов и выплачиваемых дивидендов за достаточно длительный период. Пусть значения эффективности E образуют ряд чисел (выборку $w = (e_1, \ldots, e_n)$). Используя методы математической статистики, можем найти среднее $\overline{E} = \frac{\sum_i e_i}{n}$ и несмещенную оценку дисперсии или вариации $\tilde{V} = \frac{\sum_i \left(e_i - \overline{E}\right)}{(n-1)}$, а затем использовать их в качестве приближенных значений математического ожидания и дисперсии. Аналогично можно поступить и с ковариациями.

Однако в реальной ситуации, как правило, нужно оценить намного больше величин, чем имеем данных, в силу чего точность оценок не может быть хорошей. Поэтому прямой статистический подход непригоден. Выход был найден через анализ зависимостей курсов и других характеристик ценных бумаг от ведущих факторов финансового рынка. Что же такое *ведущий фактор*? Например, в экономической жизни все взаимосвязано, но уровень цен на нефть (в частности на ближневосточную) влияет на котировку акций почти всех компаний США, поскольку нефть покрывает более половины энергетических потребностей этой страны.

Пусть F – один из таких ведущих факторов, который определяет зависимость эффективности всех вложений. Простейшая форма зависимости – линейная, и примем гипотезу, что эффективность данной фиксированной ценной бумаги E линейно зависит от ведущего фактора: $E = a + bF$. Как найти константы a и b? Такая задача была рассмотрена в Л. 43. Теоретически зависимость E от F выглядит так: $b = \frac{V_{FF}}{V_{EE}}$, $a = m_E - bm_F$. На практике приходится использовать соответствующие оценки, и тогда получаем:

$$b = \frac{\hat{V}_{FE}}{\hat{V}_{EF}}, \; a = \overline{E} - b\overline{F},$$

где $\hat{V}_{FE} = \overline{EF} - \overline{E} \cdot \overline{F}$ и $\hat{V}_{EE} = \overline{E^2} - \left(\overline{E}\right)^2$.

Если гипотеза о влиянии ведущего фактора на данную ценную бумагу верна, то все отклонения от прямой $E = a + bF$ являются действительно случайными, и если в будущем возникает новая пара значений E,

F, то соответствующая точка будет расположена где-то в окрестности указанной прямой.

Если ведущий фактор выбран удачно, то им определяются почти все случайные колебания эффективности E_i, а остаточные колебания r_i оказываются сравнительно небольшими и некоррелированными и друг с другом, и с эффективностями E_i (будем обозначать через v вариации и ковариации величин r). Тогда, окончательно имеем: $E_i = a_i + b_i F + c_i$ и $v_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Если для каждой ценной бумаги аналогичная зависимость ее эффективности E_i от ведущего фактора F найдена, то легко определяются все нужные величины для формирования оптимального портфеля.

В самом деле, $m_i = a_i + b_i m_F$, $V_{ii} = b_i^2 V_{FF} + v_{ii}$, $V_{ij} = b_i b_j V_{FF}$.

В качестве ведущего фактора F удобно брать эффективность самого финансового рынка. Это взвешенная (с учетом капитала) сумма эффективностей всех ценных бумаг, обращающихся на рынке. Таким образом, получаем $E_i = a_i + \beta_i F + e_i$ (обычно вместо буквы b_i используют β_i и называют "бета i-го вклада"). Величины β_i определяют влияние рынка на судьбу ценных бумаг: если $\beta_i > 0$, то эффективность бумаг i-го вида колеблется в такт с рынком, а если $\beta_i < 0$, то поведение бумаги прямо противоположно колебаниям эффективности рынка в целом.

Отметим, что вариация эффективности V_{ii} каждой ценной бумаги равна $\beta_i^2 V_{FF} + v_{ii}$, т.е. складывается из двух слагаемых: "собственной" вариации v_{ii}, не зависящей от рынка, и "рыночной" части вариации $\beta_i^2 V_{FF}$, определяемой случайным поведением рынка в целом. Их отношение $\dfrac{\beta_i^2 V_{FF}}{v_{ii}}$ обозначают R^2 и называют *R-squared*. Это отношение характеризует долю риска ценных бумаг, вносимую рынком. Те бумаги, для которых R-squared велико, в каком-то смысле предпочтительнее, так как их поведение более предсказуемо.

Удобно отсчитывать эффективность ценных бумаг от эффективности безрискового вклада m_0. Итак, $m_i - m_0 = \beta_i (m_F - m_0) + \alpha_i$, где $\alpha_i = a_i + \beta_i m_0 - m_0$. Превышение средней эффективности ценной бумаги над безрисковой эффективностью m_0 называется *премией за риск*. Таким образом, премия за риск линейно зависит от премии за риск, складывающейся для рынка в целом.

3°. Оптимальный портфель на идеальном конкурентном рынке. Под *идеальным конкурентным финансовым рынком* понимают рынок, все участники которого располагают одинаковой информацией и принимают на ее основе наилучшее оптимальное решение, в частности, каждый участник стремится сформировать оптимальный портфель своих ценных бумаг.

Согласно теории Тобина структура рисковой части оптимального портфеля одна и та же и не зависит от склонности инвестора к рынку. Поэтому все участники захотят сформировать портфель, одинаковый по своей рисковой части. Однако структура продаваемых ценных бумаг может не быть таковой, и тогда пойдут обычные перераспределительные процессы: ценные бумаги, спрос на которые больше их предложения, начнут повышаться в цене, а спрос на которые меньше – понижаться. В конце концов установится равновесие, при котором оптимальный портфель в своей рисковой части будет такой же, как и весь рынок в рисковой части. Следовательно, и для рынка в целом будет иметь место соотношение: $m_i = m_0 + \beta_i(m_F - m_0)$, где m_F – средняя эффективность всего рынка в целом; значит, премия за риск, связанный с данной ценной бумагой, пропорциональна премии за риск рынка в целом, и коэффициентом пропорциональности является "бета" данной ценной бумаги.

Данное соотношение называют основным уравнением равновесного рынка, и его удобно использовать в графическом виде (рис. 46.1).

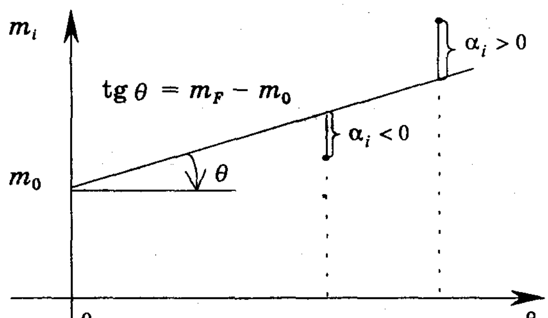


Рис. 46.1

На рис. 46.1 по горизонтальной оси отложены величины "бета", а по вертикальной – средние ожидаемые эффективности ценных бумаг m_i. Прямая линия называется *линией рынка ценных бумаг* (*Security Market Line, SML*). В теории точка (бета, эффективность) любой ценной бумаги должна лежать на этой прямой. В реальной ситуации уравнение для ценной бумаги включает еще одно слагаемое α. Если $\alpha_i > 0$, то считается, что *рынок недооценивает ценные бумаги* этого вида, а если $\alpha_i < 0$, то *переоценивает*, т.е. точки, которые лежат выше линии рынка, соответствуют недооцененным ценным бумагам, а ниже – переоцененным. Одна из практических рекомендаций состоит в том, что инвестор должен включить в портфель прежде всего недооцененные рынком бумаги, т.е. $\alpha > 0$.

Таким образом, оптимальный портфель на идеальном конкурентном финансовом рынке имеет ту же структуру рисковых бумаг, что и весь рынок и, значит, при формировании портфеля надо довериться рынку и сформировать рисковую часть портфеля аналогично рынку. Например, если в общей стоимости всех рисковых бумаг на рынке акции некоторой компании составляют 20 %, то и инвестор должен вложить 20 % своего капитала, предназначенного для рисковых ценных бумаг, в акции этой компании.

Как же разделить капитал на рисковую и безрисковую части теория Тобина ничего не говорит, и это разделение зависит от склонности инвестора к риску. Если инвестор желает увеличить эффективность своего портфеля, то он должен будет уменьшить долю безрисковых бумаг и увеличить доли рисковых бумаг, сохраняя оптимальные пропорции между ними.

▷ ***Пример 2.*** В таблице 1 указаны курс акций E и эффективность рынка F на протяжении ряда кварталов, причем эффективность безрисковых вложений равна 4.

Таблица 1

E:	15	13	14	15	16	17	16	15	14	15
F:	10	9	9	10	10	11	12	10	9	10

Найти зависимость курса акций от эффективности рынка, а также характеристики акций: "собственную" вариацию v и α, β, R^2.

Решение. Имеем $\overline{E}=15$, $\overline{F}=10$, $\hat{V}_{EE}=\sum_{i=1}^{10}\frac{(e_i-15)^2}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$,

$\hat{V}_{FF} = \sum_{i=1}^{10} \frac{(f_i - 10)^2}{10} = \frac{4}{5}$, $\quad \hat{K}_{EF} = \sum_{i=1}^{10} \frac{(e_i - 15)(f_i - 10)}{10} = \frac{4}{5}$. Значит, $b = \frac{\hat{K}_{EF}}{\hat{V}_{FF}} = 1$, $a = \overline{E} - b\overline{F} = 15 - 10 \cdot 1 = 5$. Таким образом, уравнение приближенной линейной зависимости E от F есть: $E = 5 + F$.

Следовательно, случайная величина остаточных колебаний e есть $E - (5 + F)$. Найдем вариацию этого остатка, составив ряд значений остатка e:

0	−1	0	0	1	1	−1	0	0	0

. Среднее, естественно, равно нулю, и поэтому $\hat{V}_{ee} = \frac{2}{5}$. Далее, $\beta = b = 1$,

$\alpha = a - m_0 + \beta m_0 = 5 - 4 + 4 = 5$, $R^2 = \beta^2 \frac{\hat{V}_{FF}}{\hat{V}_{ee}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}} = 2$. Поскольку $\alpha > 0$, то эта ценная бумага недооценена рынком. □

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Сформировать оптимальный портфель заданной эффективности из двух видов ценных бумаг: безрисковых эффективности 2 и рисковых ожидаемой эффективности 10 и риском 5. Найти зависимость ожидаемой эффективности портфеля от его риска.

2. Решить задачу формирования оптимального портфеля в общем виде при наличии безрисковых бумаг и некоррелированных остальных.

3. В таблице 2 указаны курс акций E и эффективность рынка F на протяжении ряда кварталов. Найти регрессию курса акций на эффективность рынка, а также оценки характеристик акций: "собственной" вариации v и α, β, R^2, причем эффективность безрисковых вложений равна 6.

Таблица 2

E:	35	33	34	35	36	37	36	35	34	35
F:	10	9	9	10	10	11	12	10	9	10

4. Инвестор имеет возможность составить портфель из трех видов некоррелированных бумаг, эффективности E_i и риски σ_i которых даны в таблице 3. Рассмотреть все варианты составления портфеля из этих бумаг равными долями. Дать графическое изображение всех этих портфелей точками (эффективность, риск). Есть ли точки, оптимальные по Парето?

Таблица 3

i	1	2	3
E_i	2	6	12
σ_i	8	10	12

.

■ Лекция 47

Временные ряды и их характеристики

Дано понятие временного ряда; сформулированы цели анализа временных рядов; рассмотрены формы тренда, сглаживание временных рядов, сезонность.[*)]

1°. Введение в анализ временных рядов.

1°.1 Понятие временного ряда. Наблюдения над некоторым явлением, характер которого меняется во времени, порождает упорядоченную последовательность, называемую *временным рядом*. Теоретически измерения могут регистрироваться непрерывно, но обычно они осуществляются через равные промежутки времени и нумеруются аналогично выборке (объема n): $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Временной ряд является, таким образом, совокупностью наблюдений случайного процесса. Во временных рядах главный интерес представляет описание или моделирование их структуры.

В каждый момент времени (или временной интервал) t значение исследуемой величины, являющейся числовой характеристикой явления, может формироваться под совокупным воздействием большого числа факторов как случайного, так и неслучайного характера.

Изменение условий развития явления ведет к ослаблению действия одних факторов и усилению других и в конечном счете к варьированию изучаемого признака во времени. Характерным для временного ряда $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}$ является то, что порядок в последовательности $t_1, t_2, ..., t_n$ существен для анализа, т.е. время выступает как один из определяющих факторов. Это отличает временной ряд от случайной выборки $(y_1, y_2, ..., y_n)$, где индексы служат лишь для удобства идентификации.

Можно привести множество примеров временных рядов, появляющихся в реальной действительности. Укажем некоторые из них:

- кривая потребления товаров в течение ряда лет;
- данные о населении какой-либо страны, полученные при проведении регулярных переписей;
- количество осадков за определенные периоды времени;
- запись температуры и атмосферного давления в некотором районе, полученная неким самопишущим прибором и т.д.

---

*) Математические модели и методы по анализу временных рядов приведены в главе V из [57].

Первые три примера являются иллюстрациями временных рядов дискретного типа. В последнем примере речь идет о ряде с непрерывным временем, требующем особых методов анализа. В экономической практике моменты времени, в которые проводились наблюдения, часто даны заранее, что приводит к рассмотрению рядов дискретного типа.

Как правило, имеют дело с рядами, определенными в равноотстоящие друг от друга моменты времени. Тогда в качестве единицы времени выбирают интервал между двумя соседними моментами и члены ряда обозначают символами $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Если необходимо рассматривать значения ряда в моменты, предшествующие начальному, то используются обозначения $\ldots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}$.

Очевидное требование к временному ряду состоит в том, чтобы результаты наблюдений были сравнимы между собой. Для обеспечения сравнимости в случае, когда временными интервалами являются месяцы или дни, необходимо до проведения анализа устранять некоторые мешающие эффекты. Например, месяцы имеют различную продолжительность, общественные праздники влияют на сравнимость экономических и социологических данных.

1°.2 Цели анализа временных рядов. Существуют две основные цели анализа временных рядов: определение природы ряда; прогнозирование (предсказание будущих значений временного ряда по настоящим и прошлым значениям). Обе эти цели требуют, чтобы модель ряда была идентифицирована и, более или менее, формально описана. Как только модель определена, то с ее помощью можно интерпретировать рассматриваемые данные (например, использовать для понимания сезонного изменения цен на товары в экономике). Не обращая внимания на глубину понимания и справедливость теории, можно экстраполировать затем ряд на основе найденной модели, т.е. предсказать его будущие значения.

Рассмотрение реальных ситуаций позволяет прийти к выводу, что типичные временные ряды могут быть представлены как декомпозиция из четырех составляющих:

$$X_t = f(S_t, T_t, C_t, e_t),$$

где S_t – эффект сезонности; T_t – тренд, или систематическое движение; C_t – колебания относительно тренда с большей или меньшей регулярностью (*цикличность*); e_t – случайная (несистематическая) остаточная компонента.

Любой ряд можно описать в виде одной из таких составляющих или комбинации нескольких из них.

Например, тренд представляет собой общую систематическую линейную или нелинейную компоненту, которая может изменяться во времени; сезонная составляющая – это периодически повторяющаяся компонента. Оба эти вида регулярных компонент часто присутствуют в ряде одновременно. Например, продажи компании могут возрастать из года в год, но они также содержат сезонную составляющую (как правило, 25 % годовых продаж приходится на декабрь и только 4 % на август).

Наиболее легок для обнаружения и выделения эффект сезонности. Под *сезонностью* понимают влияние внешних факторов, действующих циклически с заранее известной периодичностью. Типичными примерами являются эффекты, связанные с астрономическими либо календарными причинами. Так, в ряду ежемесячных данных естественно ожидать наличие сезонных эффектов с периодом 12, в квартальных рядах – с периодом 4. В свою очередь, в информации, собираемой с интервалом 1 час, вполне могут возникнуть сезонные эффекты с периодом 24.

Определить понятие тренда труднее. *Трендом* (или *тенденцией*) называют неслучайную медленно меняющуюся составляющую временного ряда, на которую могут накладываться случайные колебания или сезонные эффекты. Это не вполне строгое понятие лежит в основе нескольких моделей и методов анализа временных рядов, так или иначе разлагающих временной ряд на несколько компонент, одна из которых является в том или ином смысле достаточно гладкой, а остальные компоненты характеризуют воздействие случайных факторов.

Следует признать относительность термина долгий. Его использование зависит от поставленных целей. Например, при исследовании величины осадков в течение сотни лет, медленное увеличение в течение всей длительности изучаемого периода может быть понято как тренд, однако на самом деле этот рост осадков, характерный для данного столетия, может оказаться частью некоторого медленного колебательного процесса, наблюдаемого в пределах нескольких тысячелетий. Делать вывод на тысячелетие вперед на основе «тренда», выявленного по данным одного столетия, очевидно, неправильно.

1^0.3 Формы тренда. Говоря о тренде, мы должны учитывать длину ряда, к которому относится формулируемое утверждение. При различении тренда и колебания невозможно исключить из рассуждений элемент субъективности.

После выделения тренда и сезонных (периодических) изменений, остается ряд, представляющий флуктуации более или менее регулярного типа. Примером такого ряда могут служить данные об урожайности некоторой сельскохозяйственной культуры, производимой в относительно неизменных условиях (при отсутствии тренда и сезонности). Здесь возникает вопрос:

(а) является ли остаточный ряд *систематическим* (т.е. можно ли его значения представить как достаточно гладкую функцию времени и, следовательно, предсказывать их)?

(б) этот ряд абсолютно *случаен* (т.е. его члены представляют собой случайную выборку из некоторой генеральной совокупности)?

(в) а может быть, мы имеем дело со смесью точной функциональной зависимости (а) и случайной выборки (б)?

Флуктуации типа (а) называют *систематическими* и относят к колебаниям, флуктуации типа (б) называют *несистематическими* или *случайными*.

Указанные задачи решаются с помощью различных методов. Дадим лишь краткое пояснение некоторых из них. В основном будем обсуждать методы решения наиболее важной задачи – выявления основной тенденции развития (тренда) и измерения отклонений от нее.

2^0. Сглаживание временных рядов. Достаточно простым методом выявления тенденции развития является сглаживание временного ряда, т.е. замена фактических уровней расчетными, имеющими меньшую колеблемость, чем исходные данные. Соответствующее преобразование называется *фильтрованием*. Рассмотрим несколько методов сглаживания.

2^0.1 Метод скользящих средних. Этот метод может применяться для целей краткосрочного прогнозирования. Необходимость применения скользящей средней вызывается следующими обстоятельствами. Бывают случаи, когда имеющиеся данные динамического ряда не позволяют обнаруживать какую-либо тенденцию развития (*тренд*) того или иного процесса (из-за случайных и периодических колебаний исходных данных). В таких случаях для лучшего выявления тенденции прибегают к методу скользящей средней.

Метод скользящей средней состоит в замене фактических уровней динамического ряда расчетными, имеющими значительно меньшую колеблемость, чем исходные данные. При этом *средняя рассчитывается по группам данных за определенный интервал времени, причем каждая последующая группа образуется со сдвигом на один год (месяц)*. В результате подобной операции первоначальные колебания динамического ряда сглаживаются, поэтому и операция называется *сглаживанием ря-*

дов динамики (основная тенденция развития выражается при этом уже в виде некоторой плавной линии).

Метод скользящей средней называется так потому, что при вычислении средние как бы скользят от одного периода к другому; с каждым новым шагом средняя как бы обновляется, впитывая в себя новую информацию о фактически реализуемом процессе.

Таким образом, при прогнозировании исходят из простого предположения, что следующий во времени показатель по своей величине будет равен средней, рассчитанной за последний интервал времени.

Данный метод основан на представлении ряда в виде суммы достаточно гладкого тренда и случайной компоненты. В основе метода лежит идея расчета теоретического значения на основе локального приближения. Для построения оценки тренда в точке t по значениям ряда из временного интервала $(t - m, t + m)$ рассчитывают теоретическое значение ряда. Наибольшее распространение в практике сглаживания рядов получил случай, когда все веса для элементов интервала $(t - m, t + m)$ равны между собой. По этой причине этот метод называют *методом скользящих средних*, так как при выполнении процедуры происходит скольжение окном шириной $2m + 1$ по всему ряду от начала до конца. Ширину окна обычно берут нечетной, так как теоретическое значение рассчитывается для центрального значения: количество слагаемых $k = 2m+1$ с одинаковым числом уровней слева и справа от момента t (рис 47.1).

Формула для расчета скользящей средней в этом случае принимает вид

$$y'_t = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=t-m}^{t+m} y_i .$$

Общая формула метода скользящих средних имеет вид:

$$y'_t = a_{-m} y_{t-m} + \ldots + a_0 y_t + \ldots + a_m y_{t+m} ,$$

где y'_t – сглаженное (отфильтрованное) значение уровня на момент t; a_m – вес, приписываемый уровню ряда, находящемуся на расстоянии m от момента t. Суммирование в фильтре распространяется на $1 + 2m$ уровней (m уровней до момента t и m уровней после него).

Дисперсия для y' равна $\dfrac{\sigma^2}{k}$, где через σ^2 обозначена дисперсия исходных членов ряда, поэтому чем больше интервал сглаживания, тем сильнее усреднение данных и менее изменчива выделяемая тенденция.

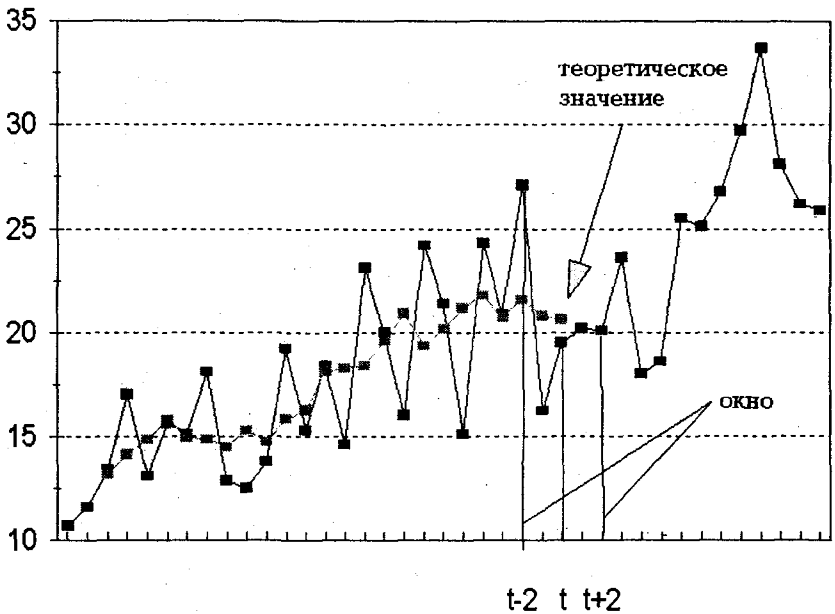


Рис. 47.1

Чаще всего сглаживание производят по трем, пяти и семи членам исходного ряда. При этом следует учитывать следующие особенности скользящей средней: если рассмотреть ряд с периодическими колебаниями постоянной длины, то при сглаживании на основе скользящей средней с интервалом сглаживания, равным или кратным периоду, колебания полностью устранятся; нередко сглаживание на основе скользящей средней столь сильно преобразует ряд, что выделенная тенденция развития проявляется лишь в самых общих чертах, а более мелкие, но важные для анализа детали (волны, изгибы и т.д.) исчезают; после сглаживания мелкие волны могут иногда поменять направление на противоположное – на месте «пиков» появляются «ямы» и наоборот. Все это требует осторожности в применении простой скользящей средней и заставляет искать более тонкие методы описания.

Краевые эффекты. Метод скользящих средних не дает значений тренда для первых *m* и последних *m* членов ряда. Этот недостаток особенно заметно сказывается в случае, когда длина ряда невелика, или же если необходимо провести экстраполяцию на будущее.

▷ *Пример 1.* Если объем продаж товара X составил (штук): в январе – 60; в феврале – 85; в марте – 80; в апреле – 92; в мае – 88; в июне – 96, то прогноз продаж на июль (для пятимесячного периода) составит: $\frac{(85+80+92+88+96)}{5}=88.2$.

Если реальный объем продаж на июль составил 94 штуки, то прогноз продаж на август уже будет равен: $\frac{(80+92+88+96+94)}{5}=90$ и так далее.

Число значений n для подсчета скользящей средней (в примере 1равно 5) выбирается в зависимости от того, насколько важны старые значения исследуемого показателя в сравнении с новыми. Так, если мы будем использовать для подсчета трехмесячный период, то $y'_{\text{июль}}=\frac{(92+88+96)}{3}=92$.

В случае с пятимесячной средней старые значения имеют удельный вес $\frac{4}{5}$, а текущие – $\frac{1}{5}$. В случае с трехмесячной средней старые значения «весят» $\frac{2}{3}$, а текущие – $\frac{1}{3}$, т.е. скользящая средняя уже в большей степени зависит от текущего уровня и несколько слабее – от предшествующего. □

2^0.2 Экспоненциальное сглаживание. При рассмотрении скользящей средней было отмечено, что чем «старше» наблюдение, тем меньше оно должно оказывать влияние на величину скользящей средней, т.е. влияние прошлых наблюдений должно затухать по мере удаления от момента, для которого определяется средняя.

Одним из простейших приемов сглаживания динамического ряда с учетом «устаревания» является расчет специальных показателей, получивших название *экспоненциальных средних*, которые широко применяются в краткосрочном прогнозировании. Основная идея метода состоит в использовании в качестве прогноза линейной комбинации прошлых и текущих наблюдений. Экспоненциальная средняя Q_t является примером асимметричной скользящей средней, в которой учитывается степень старения данных – чем старее информация, тем с меньшим весом входит она в формулу для расчета сглаженного значения уровня ряда Q_t. Экспоненциальная средняя рассчитывается по формуле:

$$Q_t = \alpha y_t + (1-\alpha) Q_{t-1}. \quad (1)$$

Здесь: Q_t – экспоненциальная средняя, заменяющая наблюденное значение ряда y_t (в сглаживании участвуют все данные, полученные к текущему моменту t); α – параметр сглаживания, характеризующий вес текущего (самого нового) наблюдения, $0 < \alpha < 1$. Если α равно 1, то предыдущие наблюдения полностью игнорируются. Если α равно 0, то игнорируются текущие наблюдения. Значения α, принадлежащие интервалу $(0, 1)$, дают промежуточные результаты.

Легко получить, что $Q_t = Q_{t-1} + \alpha(y_t - Q_{t-1})$. Последнее соотношение позволяет дать следующую интерпретацию экспоненциальной средней: если Q_{t-1} – прогноз значения ряда y_t, то разность $y_t - Q_{t-1}$ есть погрешность прогноза; таким образом прогноз Q_t для следующего момента времени $t + 1$ учитывает ставшую известной в момент t ошибку прогноза α.

Можно показать, что $MQ_t = My_t$, $DQ_t = \frac{Dy_t}{2-\alpha}$, т.е. математические ожидания наблюдений и экспоненциальных средних совпадают, а дисперсия сглаженных уровней меньше дисперсии наблюдений. Если α близка к единице, то различие между дисперсиями невелико, однако с уменьшением α колебания экспоненциальной средней все более поглощаются. Выбор параметра сглаживания представляет собой достаточно сложную проблему. Значения α могут находиться в пределах от 0 до 1, однако практически диапазон значений находится в пределах от 0.1 до 0.3. В большинстве случаев хорошие результаты дает значение $\alpha = 0.1$. При выборе α необходимо учитывать, что для повышения скорости реакции на изменение процесса развития нужно повысить значение α (тем самым увеличивается вес текущих наблюдений), однако при этом уменьшается «фильтрационные» возможности экспоненциальной средней. Использование больших значений сглаживающей константы приведет к плохим прогнозам.

▷ ***Пример 2.*** Применение метода экспоненциального сглаживания в прогнозировании рассмотрим на предыдущем примере, дополнив его данными о продажах за последующие месяцы (в пределах года). Допустим, что $\alpha = 0.2$. Для выполнения прогнозных расчетов формулу (1) представим следующим образом: новый прогноз продаж равен сумме произведений α на величину последней продажи и $(1-\alpha)$ на величину предыдущего прогноза.

Решение. Возьмем в качестве начального значения экспоненциальной средней величину y_1; тогда, подставляя в предыдущую формулу данные о фактических продажах в феврале (при прогнозе на январь в 60 штук), получим прогноз продаж на февраль $0.2 \cdot 85 + (1-0.2) \cdot 60 = 65$. С учетом февральского прогноза прогноз на март составит $0.2 \cdot 80 + (1-0.2) \cdot 65 = 68$ и т.д. (см. табл. 1).

Результаты расчета для всех месяцев года представлены в таблице 1.

Таблица 1

Месяц	Фактические продажи	Прогноз продаж
Январь	60	60
Февраль	85	65
Март	80	68
Апрель	92	73
Май	88	76
Июнь	96	80
Июль	98	84
Август	93	86
Сентябрь	90	87
Октябрь	86	87
Ноябрь	77	85
Декабрь	80	84

Представим фактические и прогнозные данные об объемах продаж в виде графика (рис. 47.2).

Из графика видно, что кривая прогнозов продаж по сравнению с кривой фактических продаж представляет собой более плавную линию (сглаженную тенденцию). □

Применение скользящей и экспоненциальных средних в качестве основы для прогностической оценки имеет смысл лишь при относительно небольшой колеблемости уровней. Данные методы прогнозирования относятся к числу наиболее распространенных методов экстраполяции трендов.

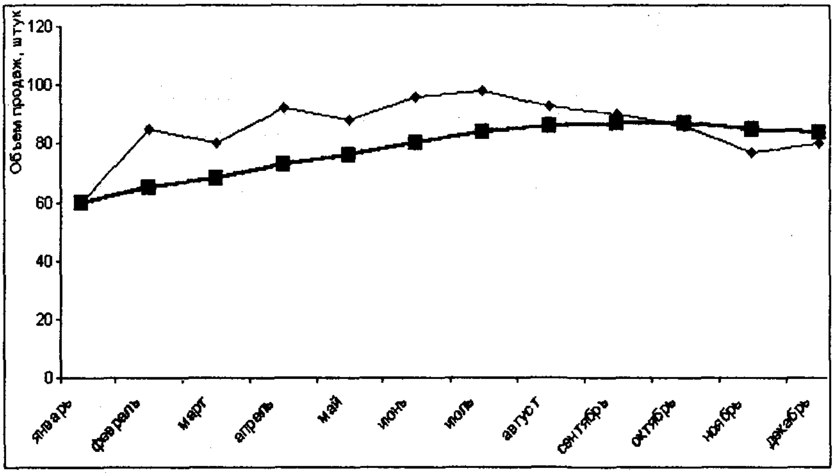


Рис. 47.2

2°.3 Медианное сглаживание. Основное достоинство медианного сглаживания – устойчивость к выбросам. В основе метода лежит вычисление скользящей медианы. Для того чтобы найти значение скользящей медианы в точке t, вычисляется медиана значений ряда во временном интервале $(t-q, t+q)$. Медиана ряда во временном интервале определяется как центральный член *вариационного ряда* – последовательности значений ряда, входящих в этот временной интервал, упорядоченной по возрастанию. Соответствующее значение называется $(2q+1)$-*точечной скользящей медианой.* В отличие от выборочного среднего, выборочная медиана значительно более устойчива по отношению к наличию выбросов и других случайных искажений данных. Например, при введении в базу данных последовательности чисел (24, 27, 23, 31, 29, 27, 26) была допущена ошибка: вместо числа 23 было введено 233. Эта ошибка в меньшей мере скажется на результатах расчета медианы этого ряда, так как при построении вариационного ряда ошибочное значение будет находиться в самом конце ранжированного по возрастанию ряда, а за теоретическое значение берется центральный член.

Как ясно из описания, если момент времени t отстоит от начала или конца ряда менее чем на q точек, вычисление становится невозможным. Для того чтобы, тем не менее, не сужать область определения сглаженного ряда по сравнению с исходным, для устранения этих краевых эффектов используют различные методы. Например, для таких точек, за исключением концевых, вычисляется значение скользящей медианы меньшего, максимально возможного порядка.

3°. Сезонность. Временные ряды с интервалом меньше года (месяц, квартал) очень часто содержат эффект сезонности. Под *сезонностью* понимают систематически повторяющиеся колебания показателей, обусловленные особенностями производственных условий в определенный период. Примером сезонных колебаний могут служить рыночные цены на сельскохозяйственную продукцию, например на картофель. Очевидно, что цены будут самыми низкими в период после уборки основных сортов картофеля, потом по мере роста затрат на хранение цены будут увеличиваться и достигнут своего максимума перед урожаем следующего года. И это повторяется каждый год.

Сезонные колебания присутствуют не только в сельскохозяйственных рядах, но и во многих общеэкономических. Потребление электроэнергии, газа, продажа определенных видов товаров, деловая активность предприятий – все эти ряды в той или иной степени подвержены эффекту сезонности.

Применительно к задачам краткосрочного управления и прогнозирования сезонная составляющая зачастую не является информативной, т.е. при прогнозе основная проблема сводится к оценке тенденции, после чего эта оценка корректируется на сезонность. Таким образом, при анализе прогноза временных рядов мы два раза сталкиваемся с необходимостью учета влияния сезонности. Во-первых, при оценке тенденции, которая представляет собой ряд, очищенный от случайной составляющей и сезонности. Сезонная составляющая в таких случаях лишь затрудняет идентификацию тех составляющих динамики, которые являются информативными. Во-вторых, с сезонностью сталкиваемся при корректировке прогнозных значений.

Сезонные эффекты, несмотря на то, что время их проявления и характер из года в год могут несколько изменяться, имеют достаточно регулярный характер. Размах и форма сезонных колебаний могут также демонстрировать эволюцию с течением времени. Однако регулярность сезонных колебаний позволяет проводить их идентификацию, что в свою очередь обеспечивает возможность сезонной корректировки временных рядов.

Существует несколько методик оценки сезонной компоненты. Основные отличия их сводятся к тому, в какой последовательности производить выделение составляющих временного ряда, какими методами и на каком этапе считать выделение составляющих достаточно точным.

Между компонентами временного ряда существуют специфические функциональные отношения. В анализе временных рядов принято рассматривать две формы взаимосвязи: *аддитивную*, *мультипликативную*, а так же *смешанную*.

В аддитивной форме ряд представляется в виде

$$Y_t = (TC_t) + S_t + \varepsilon_t ,$$

где тренд и циклическую компоненту обычно объединяют в одну *трендциклическую компоненту* (TC_t), ε_t – ошибка, а S_t – сезонная составляющая, которая предполагается периодической с периодом L: $S_t = S_{t+L}$.

Мультипликативная форма: $Y_t = (TC_t)S_t\varepsilon_t$.

Смешанная форма: $Y_t = (TC_t)S_t + \varepsilon_t$.

Для простоты расчетов при оценке сезонной составляющей первые две компоненты – тенденцию и цикличность (TC_t) – выделяют вместе. Сезонная составляющая (S_t) представляет собой набор индексов сезонности для каждого месяца. ε_t – случайная составляющая. В случае аддитивной модели индексы будут измеряться в абсолютных величинах, а в случае мультипликативной модели – в относительных.

Рассмотрим на примере различие между аддитивной и мультипликативной сезонными компонентами. График объема продаж детских игрушек, вероятно, будет иметь ежегодный пик в ноябре-декабре (перед новогодними праздниками), и другой – существенно меньший по высоте – в летние месяцы, приходящийся на каникулы. Такая сезонная закономерность будет повторяться каждый год. По своей природе сезонная компонента может быть аддитивной или мультипликативной.

Так, например, каждый год объем продаж некоторой конкретной игрушки может увеличиваться в декабре на 3 миллиона долларов. Поэтому можно учесть эти сезонные изменения, прибавляя к своему прогнозу на декабрь 3 миллиона. Здесь мы имеем *аддитивную* сезонность.

Может получиться иначе. В декабре объем продаж некоторой игрушки может увеличиваться на 40 %, то есть умножаться на *множитель* 1.4. Это значит, например, что если средний объем продаж этой игрушки невелик, то абсолютное (в денежном выражении) увеличение этого объема в декабре также будет относительно небольшим (но в процентном исчислении оно будет постоянным); если же игрушка продается хорошо, то и абсолютный (в долларах) рост объема продаж будет значительным. Здесь опять объем продаж возрастает в число раз, равное определенному *множителю*, а сезонная компонента – по своей природе *мультипликативная* компонента (в данном случае равная 1.4).

Если перейти к графикам временных рядов, то различие между этими двумя видами сезонности будет проявляться так: в аддитивном случае ряд будет иметь постоянные сезонные колебания, величина которых не зависит от общего уровня значений ряда; в мультипликативном случае величина сезонных колебаний будет меняться в зависимости от общего уровня значений ряда.

Для измерения сезонных колебаний обычно исчисляются *индексы сезонности* S_i. Существует несколько методов рассчета индексов сезонности.

Рассмотрим вначале *мультипликативные индексы сезонности.* Мультипликативные индексы сезонности используются в случае, когда по мере повышения среднего уровня динамики увеличиваются абсолютные отклонения, вызванные сезонностью. В отличие от аддитивных индексов сезонности, которые имеют абсолютную величину, мультипликативные отражают относительное отклонение каждого периода сезона от средней величины.

В общем виде мультипликативные индексы сезонности определяются отношением исходных (эмпирических) уровней ряда динамики y_i к теоретическим (расчетным) уровням y_{t_i}, выступающим в качестве базы сравнения:

$$S_i = \frac{y_i}{y_{t_i}}. \tag{2}$$

Именно в результате того, что в приведенной выше формуле измерение сезонных колебаний производится на базе соответствующих теоретических уровней тренда y_{t_i}, в исчисляемых при этом индивидуальных индексах сезонности влияние основной тенденции развития элиминируется (устраняется). Поскольку на сезонные колебания могут накладываться случайные отклонения, для их устранения производится усреднение индивидуальных индексов одноименных внутригодовых периодов анализируемого ряда динамики. Поэтому для каждого периода годового цикла определяются обобщенные показатели в виде *средних индексов сезонности* $\bar{S}$:

$$S = \frac{\sum S_i}{n}. \qquad (3)$$

Рассчитанные по формуле (3) средние индексы сезонности свободны от влияния основной тенденции развития и случайных отклонений.

В зависимости от характера тренда формулу (3) можно записать так:

1. Для рядов внутригодовой динамики с ярко выраженной основной тенденцией развития:

$$S = \frac{\sum \frac{y_i}{y_{t_i}}}{n}. \qquad (4)$$

Выступающие при этом в качестве переменной базы сравнения теоретические уровни y_{t_i} представляют своего рода «среднюю ось кривой», так как их расчет получается из метода наименьших квадратов. Поэтому измерение сезонных колебаний на базе переменных уровней тренда называется *способом переменной средней.*

2. Для рядов внутригодовой динамики, в которых повышающийся (снижающийся) тренд отсутствует, или он незначителен

$$S = \frac{y_i}{y}. \qquad (5)$$

В этой формуле базой сравнения является общий для анализируемого ряда динамики средний уровень y. Поскольку для всех эмпирических уровней анализируемого ряда динамики этот общий средний уровень является постоянной величиной, то применение формулы (5) называют *способом постоянной средней.*

▷ ***Пример 3.*** Рассчитать прогнозные индексы сезонности товарооборота группы предприятий массового питания по данным первых четырех граф таблицы 2.

Решение. Расчет прогноза на основе сезонных колебаний проведем по формуле (5), т.е. по способу постоянной средней (здесь нет значительной тенденции роста).

1. Определяем средние уровни товарооборота по месяцам y_i: для января $y_я = \frac{(78.4\ +\ 82.8\ +\ 75.1)}{3} = \frac{236.3}{3} = 78.8$ тыс. руб.; для февраля

Таблица 2

Месяц	Уровни, тыс. руб., y_i			Расчетные графы		
	1-й год	2-й год	3-й год	Σy_i	$y = \frac{\Sigma y_i}{n}$	$S_i = \left(\frac{y_i}{y}\right) \cdot 100$
1	2	3	4	5	6	7
Январь	78.4	82.8	75.1	236.3	78.8	93.9
Февраль	79.3	83.4	76.5	239.2	79.7	95.0
Март	80.9	83.5	84.4	248.8	82.9	98.8
Апрель	81.8	85.4	83.6	250.1	83.4	99.4
Май	74.3	73.2	77.2	224.7	74.9	89.3
Июнь	102.9	108.4	110.0	321.3	107.1	127.7
Июль	101.0	92.4	100.8	294.2	98.1	116.9
Август	84.3	75.0	82.6	241.9	80.6	96.1
Сентябрь	85.7	85.9	78.9	250.5	83.5	99.5
Октябрь	76.7	78.2	80.4	235.3	78.4	93.5
Ноябрь	73.1	73.8	76.3	223.2	74.4	88.7
Декабрь	83.3	84.0	87.2	254.5	84.8	101.1
Σ	1001.0	1006.0	1013.0	3020.0	83.9	100.0

$y_ф = \frac{(79.3 + 83.4 + 76.5)}{3} = \frac{239.2}{3} = 79.7$ тыс. руб. и т.д. Проставляем полученные значения в графу 6.

2. Определяем общий для всего ряда динамики средний уровень товарооборота y:

$$y = \frac{78.8 + 79.7 + 82.9 + 83.4 + 74.9 + 107.1 + 98.1 + 80.6 + 83.5 + 78.4}{12} +$$

$$+ \frac{78.4 + 74.4 + 84.8}{12} = 83.9 \text{ тыс.руб.}$$

и проставляем полученное значение в итоговую строку графы 6.

3. Определяем средние индексы сезонности товарооборота по месяцам S_i: $S_{янв} = \frac{78.8}{83.9} \cdot 100 = 93.9\,\%$; $S_{фев} = \frac{79.7}{83.9} \cdot 100 = 95\,\%$ и т.д. Проставляем полученные значения в графу 7.

Из графы 7 видно, что сезонные колебания товарооборота анализируемой группы предприятий характеризуется повышением в июне (27.7 %), июле (16.9 %) и декабре (1.1%) и снижением в остальных месяцах. Рассчитанные таким образом средние индексы сезонности можно положить в основу планирования товарооборота на следующий год.

□

Приведенные методы измерения сезонных колебаний не являются единственными. Так, для выявления сезонных колебаний можно применять рассмотренный выше метод скользящей средней или другие методы.

Рассмотрим пример модели с аддитивной сезонной компонентой, в котором для выявления сезонных колебаний применим метод скользящей средней.

Чтобы оценить сезонную составляющую в модели, нужно сначала оценить гладкую компоненту (тренд или краткосрочные колебания). Для ее выделения можно использовать метод центрированного скользящего среднего. Поскольку теоретическое значение при методе сглаживания скользящим средним определяется для центрального элемента окна, то ширина окна сглаживания должна быть нечетной. Но период сезонности обычно включает четное число временных интервалов (12 месяцев, 4 квартала). Для выхода из такой ситуации используется метод центрированного среднего:

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{24}\left(Y_{t-6} + 2Y_{t-5} + 2Y_{t-4} + \ldots + 2Y_{t+4} + 2Y_{t+5} + Y_{t+6}\right),$$

т.е. используется ширина окна 13, при этом данные за крайние месяца берутся с весом 1, или на половину меньше чем все остальные, и, таким образом, данные за все 12 месяцев учитываются одинаково.

Затем вычисляется разница между исходными данными и центрированными средними $X_t = Y_t - \tilde{y}_t$, т.е. вычисляются отклонения, которые и есть эффект сезонности.

Для определения влияния каждого конкретного периода года на динамику рассчитываются средние $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{12}$ (по месяцам):

$$\bar{x}_i = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{p} x_{j+i}, & i = 1, 2, \ldots, 6; \\ \dfrac{1}{p}\sum\limits_{j=0}^{p-1} x_{j+i}, & i = 7, 8, \ldots, 12, \end{cases}$$

где p – число целых циклов в ряду.

Различные пределы суммирования объясняются тем фактом, что центрированное среднее дает первое значение для момента $t = 7$, а последнее – для момента $t = 12p - 6$.

Сезонный индекс определяется из соотношения

$$S_i = \bar{x}_i - \bar{x},$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}\bar{x}_i .$$

Это соотношение необходимо для того, чтобы суммарное воздействие индексов сезонности на динамику было нейтральным.

▷ ***Пример 4.*** Ежемесячные данные о количестве пассажиров, перевозимых авиакомпанией Соединенного Королевства за период с 1949 г. по 1960 г., приведены в таблице 3. Определить аддитивные индексы сезонности и построить график индекса сезонности.

Таблица 3

	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
jan	112	115	145	171	196	204	242	284	315	340	360	417
feb	118	126	150	180	196	188	233	277	301	318	342	391
mar	132	141	178	193	236	235	267	317	356	362	406	419
apr	129	135	163	181	235	227	269	313	348	348	396	461
may	121	125	172	183	229	234	270	318	355	363	420	472
jun	135	149	178	218	243	264	315	374	422	435	472	535
jul	148	170	199	230	264	302	364	413	465	491	548	622
aug	148	170	199	242	272	293	347	405	467	505	559	606
sep	136	158	184	209	237	259	312	355	404	404	463	508
oct	119	133	162	191	211	229	274	306	347	359	407	461
nov	104	114	146	172	180	203	237	271	305	310	362	390
dec	118	140	166	194	201	229	278	306	336	337	405	432

Решение. Используя таблицу 3 и формулу для определения центрированных средних, приходим к таблице 4.

Изобразим графически исходные данные и центрированные средние (рис. 47.3).

Таблица 4

	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
jan		131.2	157.1	183.1	215.8	228.0	261.8	310.0	348.2	375.2	402.5	456.3
feb		133.1	159.5	186.2	218.5	230.5	266.7	314.4	353.0	377.9	407.2	461.4
mar		134.9	161.8	189.0	220.9	232.2	271.1	318.6	357.6	379.5	411.9	465.2
apr		136.4	164.1	191.3	222.9	233.9	275.2	321.7	361.4	380.0	416.3	469.3
may		137.4	166.7	193.6	224.1	235.6	278.5	324.5	364.5	380.7	420.5	472.7
jun		138.8	169.1	195.8	224.7	237.7	282.0	327.1	367.2	381.0	425.5	475.0
jul	126.8	140.9	171.2	198.0	225.3	240.5	285.7	329.5	369.5	381.8	430.7	
aug	127.2	143.2	173.6	199.7	225.3	244.0	289.3	331.8	371.2	383.7	435.1	
sep	128.0	145.7	175.5	202.2	225.0	247.2	293.2	334.5	372.2	386.5	437.7	
oct	128.6	148.4	176.8	206.2	224.6	250.2	297.2	337.5	372.4	390.3	441.0	
nov	129.0	151.5	178.0	210.4	224.5	253.5	301.0	340.5	372.7	394.7	445.8	
dec	129.7	154.7	180.2	213.4	225.5	257.1	305.5	344.1	373.6	398.6	450.6	

На графике просматривается повышение числа перевозимых пассажиров в период летних отпусков и на рождественские праздники.

Для определения сезонных индексов S_i (рис. 47.4) вычисляем разности $X_t = Y_t - \tilde{y}_t$, средние $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{12}$, $\bar{x}$ и результаты заносим в таблицу 5.

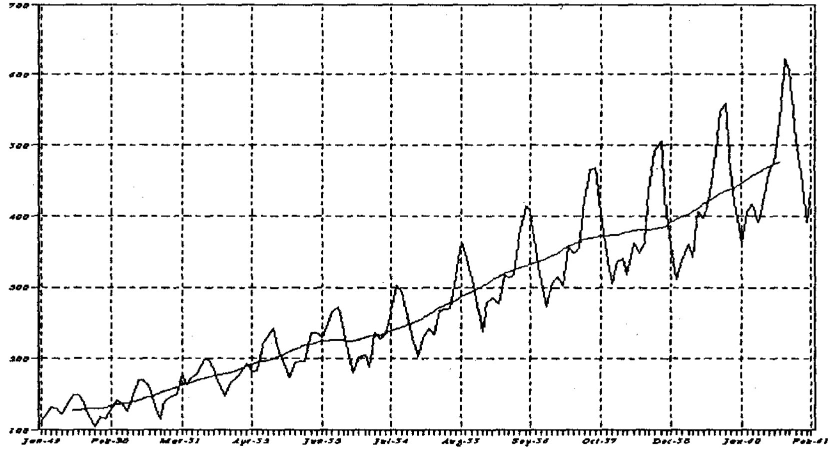


Рис. 47.3

Таблица 5

	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	$\bar{x}_i$	S_i
jan		-16.3	-12.1	-12.1	-19.8	-24.0	-19.8	-26.0	-33.2	-35.2	-42.5	-39.3	-25.50	-24.75
feb		-7.1	-9.5	-6.2	-22.5	-42.5	-33.7	-37.4	-52.0	-59.9	-65.2	-70.4	-36.94	-36.19
mar		6.1	16.2	4.0	15.1	2.8	-4.1	-1.6	-1.6	-17.5	-5.9	-46.2	-2.99	-2.24
apr		-1.4	-1.1	-10.3	12.1	-6.9	-6.2	-8.8	-13.4	-32.0	-20.3	-8.3	-8.79	-8.04
may		-12.4	5.3	-10.6	4.9	-1.6	-8.5	-6.5	-9.5	-17.7	-0.5	-0.8	-5.26	-4.51
jun		10.2	8.9	22.2	18.3	26.3	33.0	46.9	54.8	54.0	46.5	60.0	34.65	35.40
jul	21.2	29.1	27.8	32.0	38.7	61.5	78.3	83.5	95.5	109.2	117.3		63.08	63.83
aug	20.8	26.8	25.4	42.3	46.7	49.0	57.7	73.2	95.8	121.3	123.9		62.07	62.82
sep	8.0	12.3	8.5	6.8	12.0	11.8	18.8	20.5	31.8	17.5	25.3		15.77	16.52
oct	-9.6	-15.4	-14.8	-15.3	-13.6	-21.3	-23.2	-31.5	-25.4	-31.3	-34.0		-21.39	-20.64
nov	-25.0	-37.5	-32.0	-38.4	-44.5	-50.5	-64.0	-69.5	-67.8	-84.7	-83.8		-54.34	-53.59
dec	-11.8	-14.7	-14.2	-19.4	-24.5	-28.1	-27.5	-38.1	-37.6	-61.6	-45.6		-29.37	-28.62
$\bar{x}$													-0.751	0

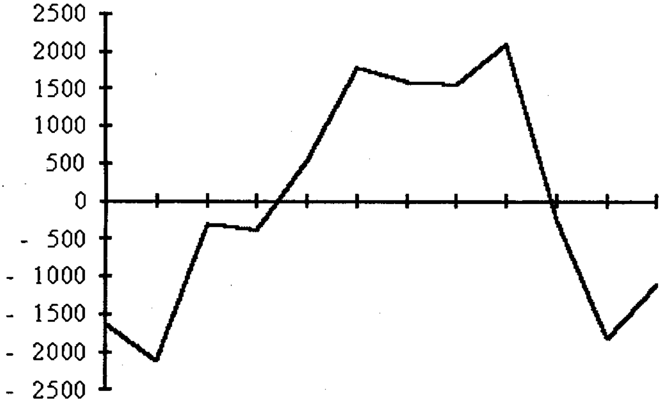


Рис. 47.4

✍ *Задания для самостоятельной работы*

1. Зная значения уровня безработицы в США за 1992–1999 годы:
1992 7.4% 1993 6.8% 1994 6.1% 1995 5.6%

1996 5.4% 1997 4.9% 1998 4.5% 1999 4.2%, спрогнозируйте, используя метод скользящих средних, значение уровня безработицы на 2000 год. Используйте ширину окна: а) 6 лет, б) 4 года, в) 3 года. В каком из этих случаев вы придаете наибольший вес старым данным? Текущим данным?

2. Известно, что фактический уровень безработицы в США в 2000 году составил 4.0 %. Используя данные задания 1 и метод скользящих средних, определите ожидаемое в 2001 году значение уровня безработицы, если ширину окна прогнозирования брать равной: а) 6 лет, б) 4 года, в) 3 года.

3. Используя метод экспоненциального сглаживания ($a = 0.3$) и данные из задания 1, спрогнозируйте уровень безработицы для всех лет (с 1992 по 2000 год). По результатам прогнозирования постройте график факических и прогнозных значений уровня безработицы на период 1992–2000.

4. Ниже приведена информация о количестве задержанных рейсов крупнейшей авиакомпании США – Delta Air Lines в период с января 1997г по декабрь 2000г:

	1997	1998	1999	2000
январь	29.49	21.93	28.63	26.78 %
февраль	27.25	22.83	19.21	20.75 %
март	23.73	22.40	20.74	20.9 %
апрель	23.11	21.19	21.30	20.55 %
май	20.71	18.87	20.34	19.33 %
июнь	30.99	22.03	27.67	26.27 %
июль	26.50	16.33	25.94	23.86 %
август	22.32	15.29	22.04	22.69 %
сентябрь	15.75	11.63	19.11	21.85 %
октябрь	18.38	12.30	21.94	17.95 %
ноябрь	24.43	13.75	16.31	32.56 %
декабрь	25.07	21.27	19.84	43.91 %

а) Можете ли вы определить, используя эти данные, какой метод рассчета мультипликативных индексов сезонности уместен для этого примера? Обоснуйте свой ответ.

б) Используя метод постоянной средней, рассчитайте значения индексов сезонности для каждого месяца. Постройте график сезонных колебаний. Как можно интерпретировать полученные результаты? Какие рекомендации вы можете дать этой авиакомпании с целью улучшения качества обслуживания пассажиров?

Замечание. Данные для заданий 1-3 взяты с web-стриницы Бюро Статистики Труда США *www.stats bls.gov* Данные для задания 4 взяты с web-стриницы Министерства Транспорта США *http.//www bts.gov/ntda/oai/index.shtml*

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМАМ

Коллоквиум № 1

1. Выпуклые множества в R^n и их основные свойства.
2. Выпуклая оболочка системы точек в R^n.
3. Примеры задач линейного программирования (ЛП).
4. Разновидности задач ЛП.
5. Геометрические свойства задачи ЛП и множество ее оптимальных решений.
6. Графический метод решения задачи ЛП в случае двух или трех переменных.
7. Симплекс-метод решения канонической задачи ЛП.
8. Алгоритм решения канонической задачи ЛП с помощью симплексных таблиц.
9. Двойственные задачи ЛП.
10. Анализ ситуации отклонения ресурсов при оперативном управлении.
11. Метод искусственного базиса нахождения начальной угловой точки канонической задачи ЛП.
12. Транспортная задача (ТЗ) и определение исходного опорного решения.
13. Алгоритм метода потенциалов решения ТЗ.
14. Экономические примеры задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП).
15. Метод Гомори решения канонической ЦЗЛП.
16. Вогнутые и выпуклые функции.
17. Безусловный максимум функции многих переменных.
18. Классическое правило множителей Лагранжа.
19. Условия минимума второго порядка для задачи условной оптимизации.
20. Условный экстремум при условиях-неравенствах.
21. Функция полезности и ее свойства.
22. Предельные полезность и норма замещения благ.
23. Математическая модель задачи оптимального выбора благ потребителем.
24. Взаимная задача к задаче оптимального выбора благ потребителем.

25. Производственная функция и ее основные свойства.
26. Типовые производственные функции.
27. Математическая модель задачи минимизации издержек производства.
28. Задача максимизации объема выпуска продукции.
29. Критерий размерности задачи квадратичного программирования.
30. Алгоритм решения задачи квадратичного программирования.
31. Задачи управления запасами.
32. Параметрическое программирование.
33. Динамическое программирование и уравнение Р. Беллмана.
34. Динамическое программирование для задачи управления запасами.
35. Формулировка принципа максимума Л.С. Понтрягина.
36. Односекторная модель оптимального экономического роста.
37. Понятие многокритериальной задачи оптимизации.
38. Оптимальность по Парето.

Коллоквиум № 2

1. Случайные события и соотношения между ними.
2. Частота и вероятность.
3. Геометрическая вероятность.
4. Формула для вероятности суммы двух событий и теорема сложения.
5. Условная вероятность.
6. Формула Бернулли.
7. Формула полной вероятности.
8. Форма Байеса.
9. Элементы теории нечетких множеств.
10. Матрица инциденций.
11. Инциденция второго порядка.
12. Исследование скрытых воздействий с помощью матриц инциденций.
13. Случайная величина и ее функция распределения.
14. Непрерывные случайные величины.
15. Дискретные случайные величины.
16. Математическое ожидание случайной величины.
17. Дисперсия случайной величины.

18. Моменты, асимметрия и эксцесс случайной величины.
19. Принятие решений в условиях полной неопределенности.
20. Принятие решений в условиях частичной неопределенности.
21. Байесовский подход к принятию решений.
22. Биноминальный закон распределения.
23. Закон Пуассона.
24. Равномерное распределение.
25. Показательное распределение.
26. Нормальное распределение.
27. Неравенство Чебышева и закон больших чисел в форме Чебышева.
28. Теорема Бернулли.
29. Усиленный закон больших чисел.
30. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа.
31. Теорема Пуассона.
32. Центральная предельная теорема.
33. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
34. Применения закона больших чисел в экономике.
35. Системы случайных величин, ковариация и корреляция.
36. Функция случайных величин.
37. Одноканальная система массового обслуживания (СМО) с отказами.
38. Многоканальная СМО с отказами.
39. Виды задач стохастического программирования (СТП).
40. Анализ влияния случайностей на решение задач СТП.

Коллоквиум № 3

1. Генеральная и выборочная совокупности.
2. Вариационный ряд и его характеристики.
3. Числовые характеристики выборки.
4. Аппроксимация выборочного распределения.
5. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии.
6. Метод максимального правдоподобия.
7. Интервальные оценки.
8. Предельная ошибка и необходимый объем выборки.
9. Распределение “хи-квадрат” (χ^2).
10. Распределение Стьюдента.
11. Распределение Фишера.

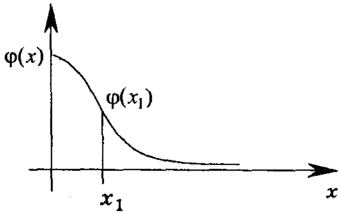
12. Интервальное оценивание математического ожидания случайной величины X с неизвестной дисперсией.
13. Интервальное оценивание среднеквадратичного отклонения нормально распределенной случайной величины.
14. Статистическая гипотеза и общая схема построения критериев согласия.
15. Статистическая критерий χ^2.
16. Статистический критерий Колмогорова.
17. Проверка гипотезы о математическом ожидании нормальной случайной величины при известной и неизвестной дисперсиях.
18. Проверка гипотезы о величине дисперсии нормальной случайной величины.
19. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормальных случайных величин при известных дисперсиях.
20. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормальных случайных величин при неизвестных дисперсиях.
21. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных случайных величин.
22. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции.
23. Зависимость между случайными величинами и корреляционное отношение.
24. Линейная однофакторная регрессия.
25. Финансовый рынок и простейшие финансовые операции.
26. Статистические характеристики ценных бумаг.
27. Сущность портфельного подхода при анализе ценных бумаг.
28. Оптимизация портфеля ценных бумаг.
29. Оптимальный портфель при наличии безрисковых бумаг.
30. Влияние ведущего фактора на составляющие финансового рынка.
31. Понятие временного ряда, цели анализа временных рядов, формы тренда.
32. Сглаживание временных рядов.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

Малая функция Лапласа

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



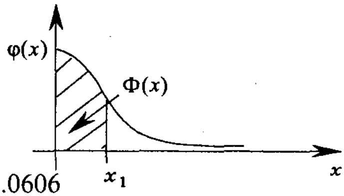
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3726	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3351
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	00014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0:0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0 0002	0.0002	0.0002	0 0002	0 0002	0.0002	0.0002	0 0002	0.0001	0 0001

Таблица 2

Функция Лапласа (стандартизированное нормальное распределение)

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,.$$



Пример:

$\Phi(1.55)=P(0\le X\le 1.55)=0.4394$;

$P(X>1.55)=0.5-P(0\le X\le 1.55)=0.0606$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.3	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

3.1 0.49903 **3.2** 0.49931 **3.3** 0.49952 **3.4** 0.49966 **3.5** 0.49977 **3.6** 0.49984 **3.7** 0.49989 **3.8** 0.49993 **3.9** 0.49995 **4.0** 0.499968 **4.5** 0.49999 **5.0** 0.49999997

Таблица 3

Распределение Стьюдента (t-распределение)

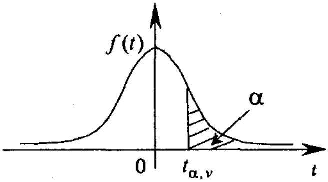
ν - число степеней свободы, α - уровень значимости.

Пример:

$t_{\alpha,\nu} = t_{0.05;20} = 1.725$;

$P(T > 1.725) = 0.05$;

$P(|T| > 1.725) = 0.10$.



ν \ α	0.4	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.6
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.6
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.94
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.859
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.405
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.050	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.080	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.450	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	2.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.255	0.680	1.296	1.676	2.009	2.403	2.678	3.262	3.495
60	0.255	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.254	0.679	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.415
100	0.254	0.678	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626	3.174	3.389
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.467	3.160	3.366
200	0.254	0.676	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.339
500	0.253	0.675	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.106	3.310
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

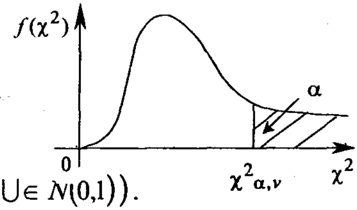
Таблица 4

χ^2-распределение

Пример:

при $\nu = 15$ $\quad P(\chi^2 > 8.55) = 0.9,$

$\qquad\qquad\quad P(\chi^2 > 22.31) = 0.1;$



при $\nu > 100$ $\quad \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1} = U\left(U \in N(0,1)\right).$

$\nu \backslash \alpha$	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	$0.4 \cdot 10^{-4}$	$0.2 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}	$4 \cdot 10^{-4}$	0.016	0.101	0.454	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.58	139	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.37	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.9	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.19
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.1	13.34	17.12	21.06	23.69	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.68	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.88	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.61	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.78	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.9
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.0	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.78	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.70	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.38	79.08	83.30	88.38	91.9
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.32	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Таблица 5

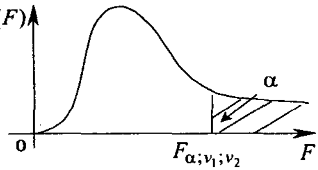
Распределение Фишера (F-распределение)

Пример:

при $\nu_1 = 6, \nu_2 = 5 \quad P(F > 3.40) = 0.1;$

при $\nu_1 = 6, \nu_2 = 5 \quad P(F > 4.95) = 0.05;$

при $\nu_1 = 6, \nu_2 = 5 \quad P(F > 10.7) = 0.01.$



ν_2	α	ν_1 (число степеней свободы)											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.10	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.6	60.7
	0.05	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	0.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41
	0.05	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
	0.01	98.5	99.2	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4
3	0.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22
	0.05	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74
	0.01	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1
4	0.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90
	0.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
	0.01	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.4
5	0.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27
	0.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68
	0.01	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89
6	0.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90
	0.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
	0.01	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	0.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67
	0.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
	0.01	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
8	0.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50
	0.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28
	0.01	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67
9	0.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38
	0.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07
	0.01	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	0.10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28
	0.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91
	0.01	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71
11	0.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21
	0.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79
	0.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40

ν_2	α	ν_1 (число степеней свободы)											
		15	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**60**	**100**	**120**	**200**	**500**	∞
1	**0.10**	61.2	61.7	62.0	62.3	62.5	62.7	62.8	63.0	63.1	63.2	63.3	63.3
	0.05	246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254
2	**0.10**	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.48	9.49	9.49	9.49
	0.05	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
	0.01	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	**0.10**	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.14	5.14	5.14	5.13
	0.05	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.55	8.54	8.53	8.53
	0.01	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.4	26.3	26.2	26.2	26.2	26.1	26.1
4	**0.10**	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.78	3.77	3.76	3.76
	0.05	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.66	5.65	5.64	5.63
	0.01	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.7	13.6	13.6	13.5	13.5	13.5
5	**0.10**	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13	3.12	3.12	3.11	3.10
	0.05	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.40	4.39	4.37	4.36
	0.01	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.20	9.13	9.11	9.08	9.04	9.02
6	**0.10**	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.77	2.76	2.75	2.74	2.73	2.73	2.72
	0.05	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.71	3.70	3.69	3.68	3.67
	0.01	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.09	7.06	6.99	6.97	6.93	6.90	6.88
7	**0.10**	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.52	2.51	2.50	2.49	2.48	2.48	2.47
	0.05	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.27	3.25	3.24	3.23
	0.01	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.86	5.82	5.75	5.74	5.70	5.67	5.65
8	**0.10**	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.32	2.31	2.30	2.29
	0.05	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.97	2.95	2.94	2.93
	0.01	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.07	5.03	4.96	4.95	4.91	4.88	4.86
9	**0.10**	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.22	2.21	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16
	0.05	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.76	2.75	2.73	2.72	2.71
	0.01	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.48	4.42	4.40	4.36	4.33	4.31
10	**0.10**	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.12	2.11	2.09	2.08	2.07	2.06	2.06
	0.05	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.59	2.58	2.56	2.55	2.54
	0.01	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.08	4.01	4.00	3.96	3.93	3.91
11	**0.10**	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	2.00	1.99	1.98	1.97
	0.05	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.46	2.45	2.43	2.42	2.40
	0.01	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.78	3.71	3.69	3.66	3.62	3.60

ν_2	α	ν_1 (число степеней свободы)											
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
12	**0.10**	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15
	0.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
	0.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	**0.10**	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.12	2.10
	0.05	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
	0.01	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	**0.10**	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.08	2.05
	0.05	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53
	0.01	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	**0.10**	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02
	0.05	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
	0.01	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	**0.10**	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.01	1.99
	0.05	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42
	0.01	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55
17	**0.10**	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.98	1.96
	0.05	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38
	0.01	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46
18	**0.10**	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.96	1.93
	0.05	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
	0.01	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37
19	**0.10**	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.94	1.91
	0.05	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31
	0.01	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30
20	**0.10**	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.92	1.89
	0.05	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28
	0.01	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23
22	**0.10**	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.88	1.86
	0.05	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23
	0.01	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
24	**0.10**	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83
	0.05	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18
	0.01	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03

ν_2	α	ν_1 (число степеней свободы)											
		15	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**60**	**100**	**120**	**200**	**500**	∞
12	**0.10**	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90
	0.05	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38.	2.35	2.34	2.32	2.31	2.30
	0.01	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.54	3.47	3.45	3.41	3.38	3.36
13	**0.10**	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.88	1.86	1.85	1.85
	0.05	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.26	2.25	2.23	2.22	2.21
	0.01	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.38	3.34	3.27	3.25	3.22	3.19	3.17
14	**0.10**	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.83	1.82	1.80	1.80
	0.05	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.19	2.18	2.16	2.14	2.13
	0.01	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.22	3.18	3.11	3.09	3.06	3.03	3.00
15	**0.10**	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.79	1.77	1.76	1.76
	0.05	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07
	0.01	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.05	2.98	2.96	2.92	2.89	2.87
16	**0.10**	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.79	1.78	1.76	1.75	1.74	1.73	1.72
	0.05	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.07	2.06	2.04	2.02	2.01
	0.01	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.97	2.93	2.86	2.84	2.81	2.78	2.75
17	**0.10**	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78'	1.76	1.75	1.73	1.72	1.71	1.69	1.69
	0.05	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.02	2.01	1.99	1.97	1.96
	0.01	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.87	2.83	2.76	2.75	2.71	2.68	2.65
18	**0.10**	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.74	1.72	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66
	0.05	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92
	0.01	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.78	2.75	2.68	2.66	2.62	2.59	2.57
19	**0.10**	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.67	1.65	1.64	1.63
	0.05	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.94	1.93	1.91	1.89	1.88
	0.01	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.71	2.67	2.60	2.58	2.55	2.51	2.49
20	**0.10**	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61
	0.05	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84
	0.01	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.54	2.52	2.48	2.44	2.42
22	**0.10**	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.61	1.60	1.39	1.58	1.37
	0.05	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.89	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78
	0.01	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.50	2.42	2.40	2.36	2.33	2.31
24	**0.10**	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53
	0.05	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73
	0.01	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21

ν_2	α	ν_1 (число степеней свободы)											
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
26	**0.10**	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.84	1.81
	0.05	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
	0.01	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96
28	**0.10**	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.81	1.79
	0.05	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
	0.01	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90
30	**0.10**	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79	1.77
	0.05	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09
	0.01	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84
40	**0.10**	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.73	1.71
	0.05	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00
	0.01	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66
60	**0.10**	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.68	1.66
	0.05	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
	0.01	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50
80	**0.10**	2.77	2.37	2.16	2.02	1.93	1.85	1.80	1.75	1.72	1.69	1.65	1.63
	0.05	3.96	3.11	2.72	2.48	2.33	2.21	2.12	2.05	1.99	1.95	1.91	1.88
	0.01	6.96	4.88	4.04	3.56	3.25	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.41
100	**0.10**	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.63	1.61
	0.05	3.94	3.09	2.70	2.46	2.30	2.19	2.10	2.03	1.97	1.92	1.88	1.85
	0.01	6.90	4.82	3.98	3.51	3.20	2.99	2.82	2.69	2.59	2.51	2.43	2.36
120	**0.10**	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60
	0.05	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83
	0.01	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34
200	**0.10**	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63	1.60	1.57
	0.05	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80
	0.01	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27
∞	**0.10**	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.57	1.55
	0.05	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75
	0.01	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18

ν_2	α	ν_1 (число степеней свободы)											
		15	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**60**	**100**	**120**	**200**	**500**	∞
26	**0.10**	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.59	1.58	1.35	1.54	1.53	1.51	1.50
	0.05	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.80	1.76	1.75	1.73	1.71	1.69
	0.01	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.36	2.33	2.25	2.23	2.19	2.16	2.13
28	**0.10**	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48
	0.05	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65
	0.01	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.26	2.19	2.17	2.13	2.09	2.06
30	**0.10**	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.55	1.54	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46
	0.05	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62
	0.01	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.25	2.21	2.13	2.11	2.07	2.03	2.01
40	**0.10**	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38
	0.05	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.59	1.58	1.55	1.53	1.51
	0.01	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.06	2.02	1.94	1.92	1.87	1.83	1.80
60	**0.10**	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.41	1.40	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29
	0.05	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.48	1.47	1.44	1.41	1.39
	0.01	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.88	1.84	1.75	1.73	1.68	1.63	1.60
80	**0.10**	1.58	1.52	1.49	1.45	1.41	1.38	1.36	1.31	1.31	1.29	1.27	1.25
	0.05	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.47	1.42	1.40	1.38	1.34	1.32
	0.01	2.24	2.11	2.03	1.94	1.84	1.78	1.76	1.65	1.63	1.57	1.52	1.49
100	**0.10**	1.56	1.50	1.47	1.43	1.39	1.36	1.34	1.29	1.28	1.26	1.24	1.22
	0.05	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.48	1.45	1.39	1.38	1.34	1.30	1.28
	0.01	2.19	2.06	1.98	1.89	1.79	1.73	1.70	1.59	1.57	1.51	1.46	1.43
120	**0.10**	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.34	1.32	1.27	1.26	1.24	1.21	1.19
	0.05	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.37	1.35	1.32	1.28	1.25
	0.01	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.70	1.66	1.56	1.53	1.48	1.42	1.38
200	**0.10**	1.52	1.46	1.42	1.38	1.34	1.31	1.28	1.24	1.22	1.20	1.17	1.14
	0.05	1.72	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.39	1.32	1.29	1.26	1.22	1.19
	0.01	2.13	1.97	1.89	1.79	1.69	1.63	1.58	1.48	1.44	1.39	1.33	1.28
∞	**0.10**	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.26	1.24	1.18	1.17	1.13	1.08	1.00
	0.05	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.17	1.11	1.00
	0.01	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.52	1.47	1.36	1.32	1.25	1.15	1.00

Таблица 6

Критические значения d_α статистики Колмогорова

$$P\left(\sup_x \left| F_n(x) - F(x) \right| \geq d_\alpha \right) = \alpha .$$

n \ α	0.10	0.05	0.01	n \ α	0.10	0.05	0.01
1	0.950	0.975	0.995	19	0.271	0.301	0.361
2	0.776	0.842	0.929	20	0.265	0.294	0.352
3	0.636	0.708	0.829	25	0.238	0.264	0.317
4	0.565	0.624	0.734	30	0.218	0.242	0.290
5	0.509	0.563	0.669	35	0.202	0.224	0.269
6	0.468	0.519	0.617	40	0.189	0.210	0.252
7	0.436	0.483	0.576	45	0.179	0.198	0.238
8	0.410	0.454	0.542	50	0.170	0.188	0.226
9	0.387	0.430	0.513	55	0.162	0.180	0.216
10	0.369	0.409	0.489	60	0.155	0.172	0.207
11	0.352	0.391	0.468	65	0.149	0.166	0.199
12	0.338	0.375	0.449	70	0.144	0.160	0.192
13	0.325	0.361	0.432	75	0.139	0.154	0.185
14	0.314	0.349	0.418	80	0.135	0.150	0.179
15	0.304	0.338	0.404	85	0.131	0.145	0.174
16	0.295	0.327	0.392	90	0.127	0.141	0.169
17	0.286	0.318	0.381	95	0.124	0.137	0.165
18	0.279	0.309	0.371	100	0.121	0.134	0.161

ЛИТЕРАТУРА

1. Аванесов Э.Т., Ковалев М.М., Руденко В.Г. Финансово-экономические расчеты: анализ инвестиций и контрактов. Мн.: БГУ, 1998. –228 с.

2. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

3. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985. – 488 с.

4. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.

5. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1986. – 317 с.

6. Альсевич В.В. Математическая экономика. Конструктивная теория. Мн.: Дизайн ПРО, 1998. – 240 с.

7. Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. М., 1980. – 293 с.

8. Балашевич В.А., Андронов А.М. Экономико-математическое моделирование производственных систем. Мн.: БГУ, 1995. – 240 с.

9. Беллман Р. Динамическое программирование /Под ред. Воробьева Н.Н. М.: Иностр. литер., 1960. – 400 с.

10. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики. Мн.: БГУ, 2000. – 354 с.

11. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.

12. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Мн.: БГУ, 1981. – 350 с.

13. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. Математическое моделирование макроэкономических процессов. Кишинэу: Еврика, 1997. – 313 с.

14. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. Математическое моделирование микроэкономических процессов. Кишинэу: Штиница, 1996. – 280 с.

15. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей /Под ред. Воробьева Н.Н. М.: Иностр. лит., 1963. – 418 с.

16. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного програм-мирования транспортного типа М.: Наука, 1969. – 382 с.

17. Доугерти К. Введение в эконометрику. М.: ИНФРА-М, 1999. – 402 с.

18. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. М.: Финансы и статистика, 2000. – 176 с.

19. Еремин И.И. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. – 189 с.

20. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике М.: МГУ, Дело и Сервис, 1997. – 368 с.

21. Занг В.Б. Синергетическая экономика. М.: Мир, 1999. - 335 с.

22. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. – 607 с.

23. Кавалёў М.М., Пісарук М.М. Сучаснае лінейнае праграмаванне. Мн.: 1998. – 264 с.

24. Ковалев В.В., Улапов В.А. Курс финансовых вычислений. М.: Финансы и статистика, 1999. – 328 с.

25. Ковбаса С.И., Ивановский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб: Альфа, 2001. – 192 с.

26. Колемаев В.А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.

27. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ИНФРА-М, 1997. – 302 с.

28. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов. М.: ИНФРА-М, 1997. – 208 с.

29. Кофман А., Хил. Алуха Х. Модели для исследования скрытых воздействий. Мн.: Вышэйшая школа, 1993.

30. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.

31. Красс М.С., Чупрыков Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: “Дело”, 2000. – 688с.

32. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 543 с.

33. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. и др. Высшая математика для экономистов. М.: ЮНИТИ, 1998. – 472 с.

34. Крыньский Х.Э. Математика для экономистов. М.: Статистика, 1970. – 580 с.

35. Кузнецов А.В. Руководство по решению задач по математическому программированию. Мн.: Вышэйшая школа, 1978. – 256 с.

36. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. Мн.: Вышэйшая школа. 1994. –288 с.

37. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. М.: ЮНИТИ, 1998. – 319 с.

38. Лебедева Г.И., Микулик Н.А. Прикладная математика Ч. 1. Мн.: "Вуз-ЮНИТИ", БГПА, 1998. – 271 с.

39. Малыхин В.И. Математика в экономике. М.: ИНФРА-М, 1999. – 356 с.

40. Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. Мн.: Вышэйшая школа, 1993. – 272 с.

41. Медведев Г.А. Начальный курс финансовой математики. М. ТОО "Остожье", 2000. – 267 с.

42. Минюк С.А., Ровба Е.А. Высшая математика. Гродно: ГрГУ, 2000. – 394 с.

43. Мороз А.И. Математические основы менеджмента. М.: Academia, 1997. – 256 с.

44. Нечеткие множества и теория возможностей: последние достижения. Мн.: Легпромбытиздат, 1986. – 405 с.

45. Первозванский А.Т., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М.: ИНФРА-М, 1994. – 192 с.

46. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики М.: Энергоавтомиздат, 1996. – 544 с.

47. Рубахов А.И., Головач Э.П. Коммерческие риски. Брест: БПИ, 1999. – 340 с.

48. Сакович В.А. Оптимальные решения экономических задач. Мн.: Вышэйшая школа, 1982. – 282 с.

49. Самаль С.А. и др. Высшая математика: Общий курс. Мн.: Вышэйшая школа, 2000.

50. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Ч. 1. М.: Финансы и кредит, 2000. – 219 с.

51. Фалин Г.И., Фалин А.И. Введение в актуарную математику. М.: МГУ, 1994.

52. Харин Ю.С., Малюгин В.И. и др. Основы имитационного и статистического моделирования. Мн.: Дизайн ПРО, 1997. – 288 с.

53. Хацкевич Г.А. Эконометрическое моделирование и анализ неустойчивых эконометрических процессов. Мн.: НИУ и П, 2000. – 196 с.

54. Холод Н.И. Пособие по решению задач по линейной алгебре и линейному программированию /Под ред. Комлика В.И. Мн.: БГУ, 1971. – 176 с.

55. Чернов В.П., Ивановский В.Б. Математика для экономистов. Теория массового обслуживания. М.: ИНФРА-М, 2000. – 158с.

56. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: “Дело-Лтд”, 1995. – 320 с.

57. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 367 с.

58. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. М.: Дело, 2000. – 640 с.

59. Экономическая статистика /Под ред. Ю.Н. Иванова/ М.: ИНФРА-М, 2000. – 480 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ 2. Теория вероятностей и стохастические экономические модели 186

ЧАСТЬ 3. Математическая статистика и экономические модели 287

Учебное издание

Минюк Степан Андреевич
Ровба Евгений Алексеевич
Кузьмич Константин Константинович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Редактор С. В. Процко
Дизайн обложки Н.В. Канаш
Компьютерная верстка Ю.М. Огренич
Ответственный за выпуск А.Ф. Мясников

Подписано в печать с готовых диапозитивов 02.07.2002.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага для офсетной печати. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Печ. л. 27 Усл печ л. 25,2. Тираж 3100 экз. Заказ 1437.

Научно-техническое общество с ограниченной ответственностью «ТетраСистемс».
Лицензия ЛВ № 76 от 19.11.1997.
220116, г. Минск-116, а/я 139 (тел. 219-74-01; E-mail: books@tut.by; http://www.ts.by).

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство "Белорусский Дом печати"»
220013, г Минск, проспект Ф. Скорины, 79